الفصل الثاني

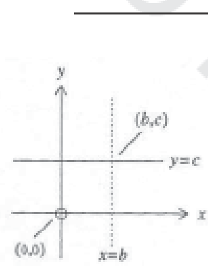
المنحنيات والرسوم
Curves & Graphs

(١ , ٢) المستقيمات
Straight Lines

إن أفضل الوسائل لفهم العلاقة التي تربط كميتين x و y هو رسم المنحنى الذي يمثل هذه العلاقة ، ويتم ذلك بتعيين بعض القيم للأزواج المرتبة (x,y) في المستوى الإحداثي المكون من مستقيمين متعامدين يتقاطعان في النقطة $(0,0)$ والتي نطلق عليها نقطة الأصل، المستقيم الأفقي يدعى محور x والرأسي يدعى محور y. وكما هو متفق عليه فإن قيم x تزداد من اليسار إلى اليمين وقيم y تزداد من الأسفل إلى الأعلى. وباستخدام هذا التمثيل لنقاط المستوى يكون من السهل عادة تحديد التغير في y المصاحب للتغير في x ، وأبسط الحالات هو عدم وجود تغير في قيم y مهما كانت قيم x. وهذا تعبر عنه المعادلة $y = c$ حيث بيانها هو المستقيم الأفقي الذي يقطع محور y في النقطة $(0,c)$.[1] أما معادلة المستقيم العامة فتأخذ الصيغة الجبرية

---

(١)



$$y = mx + c \qquad (٢,١)$$

حيث الثابت m يحدد قيمة وإتجاه ميل المستقيم، فإذا كان m موجباً فإن y يزداد مع ازدياد x، وإذا كان m سالباً فإن y يتناقص مع ازدياد x، أما إذا كان $m = 0$ فإن قيم y تبقى ثابتة مهما كانت قيم x. يتم تحديد القيمتين m و c بمعرفة نقطتين (x_1,y_1) و (x_2,y_2) على المستقيم

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{و} \qquad c = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$$

ويسميان ميل المستقيم والتقاطع مع محور y على التوالي. لاحظ أن القيمة c هي قيمة y عندما يكون $x = 0$، ومن ثم فإن التغير في قيمة c يؤدي إلى إزاحة المستقيم إلى الأعلى أو إلى الأسفل. تُدعى قيمة x التي تقابل $y = 0$ الإحداثي السيني. بناء على ماسبق نستطيع تفسير الحل الوحيد لمعادلتين آنيتين في متغيرين المقدم في البند (١,٤) على أنه نقطة تقاطع خطين مستقيمين.[٢]

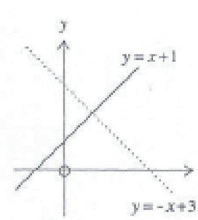
(٢,٢) القطوع المكافئة

Parabolas

قدمنا في الفصل الأول معادلة الدرجة الثانية التي تحتوي على حد x^2 إضافة إلى الحد الخطي x. الصيغة العامة لمعادلة الدرجة الثانية هي

---

(٢)



$$y = ax^2 + bx + c \qquad (٢,٢)$$

وبيانها يمثل قطع مكافئ (يشبه مسار قذيفة مدفع). تحدد إشارة a (معامل) فيما إذا كان البيان مقعراً للأسفل أو مقعراً للأعلى[٣]. أما قيمته فتحدد السرعة التي يتم فيها التقعر. ولاستيعاب تأثير a ، b ، c على وضع القطع المكافئ فإنه من الأفضل إكمال المربع في المعادلة (٢ , ٢) كما هو مبين في البند (٣ , ١) لنحصل على

$$y = a(x + \alpha)^2 + \gamma$$

من السهل أن نرى الآن أن إحداثيا رأس القطع المكافئ (أعلى أو أخفض نقطة على المنحنى) هما $x = -\alpha = \frac{-b}{2a}$ و $y = \gamma = c - \frac{b^2}{4a}$.

عند حلنا للمعادلة التربيعية فإننا نبحث عن قيمتي x اللتان تجعلان المعادلة (٢ , ٢) تساوي صفراً. هاتان القيمتان هما نقطتا تقاطع القطع المكافئ مع محور x ، وتتساوى هاتان القيمتان عندما يكون $b^2 = 4ac$. ومن الممكن أيضاً ألاّ يقطع القطع المكافئ محور x (أي عدم وجود حلول حقيقية) وهذا يحدث كما بينا في البند (٣ , ١) عندما يكون $b^2 < 4ac$.

تفسر لنا المعادلة (٢ , ٢) السبب وراء عدم حصولنا على حل وحيد لمعادلتين آنيتين إحداهما من الدرجة الثانية والأخرى من الدرجة الأولى؛ لأننا نبحث في هذه الحالة عن نقاط تقاطع قطع مكافئ مع مستقيم.

(٣)

(٣ ,٢) كثيرات الحدود

Polynomials

المستقيم والقطع المكافئ اللذان درسناهما في البند السابق هما حالتان خاصتان من عائلة منحنيات تُسمى كثيرات الحدود. من السهل أن نرى الشبه بين منحنيات هذه العائلة من المعادلة الجبرية التي تُعرِّفها

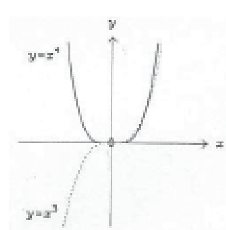
$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots a_Nx^N \qquad (٣\,,٢)$$

حيث $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_N$ أعداد ثابتة. يُسمى N (أعلى قوة للمتغير x) درجة (أو رتبة) كثيرة الحدود. إذا كان $N = 0$ فإننا نحصل على خط مستقيم أفقي ، وإذا كان $N = 1$ فإننا نحصل على المعادلة العامة للخط المستقيم ، أما إذا كان $N = 2$ فإننا نحصل على قطع مكافئ.

تحتوي بيانات كثيرات الحدود (عدا المستقيم) على انحناءات وتذبذبات. وفي الأطراف، أي عندما تكون القيمة المطلقة للمتغير x كبيرة جداً فإن جميع قيم حدود المعادلة (٣ ,٢) تصبح صغيرة مقارنة مع الحد الأخير. ولذا فإن منحنيات كثيرات الحدود تكون مقعرة للأسفل (أو للأعلى) بالاتجاه نفسه إذا كان N زوجياً وبعكس الاتجاه إذا كان N فردياً.[٤] ومع أن التقعر يزداد بازدياد N ، إلا أن معدل تغيره واتجاهه يتحكم بها قيمة وإشارة المعامل a_N على التوالي.

عندما تتزايد قيمة x ومن $-\infty$ إلى $+\infty$ فإنه من الممكن أن يتذبذب الإحداثي y عدد من المرات للقيم الداخلية للإحداثي x. من الممكن لبيان كثيرة حدود من الدرجة N أن يحتوي على عدد $N - 1$ من الانعطافات ومن الممكن أيضاً أن يحتوي

(٤)



على أقل من ذلك (بمضاعف للعدد ٢). على سبيل المثال، إذا كان $N = 3$ فإنه من الممكن أن يحتوي البيان على انعطافين (قيمتان عظمى وصغرى) أو ألا يحتوي على أي إنعطافات. وإذا كان $N = 4$ فإن البيان يحتوي على ثلاثة انعطافات أو انعطاف واحداً.(٥)

تُسمى قيم x التي تجعل المعادلة (٣ , ٢) صفراً، جذور (أو أصفار) كثيرة الحدود. وهذه هي النقاط التي يقطع عندها البيان محور x. ومن ثم فإنه من الممكن استنتاج أن عدد الجذور الحقيقية لكثيرة حدود من الدرجة N لايزيد عن N.

(٤ , ٢) القوى والجذور واللوغاريتمات

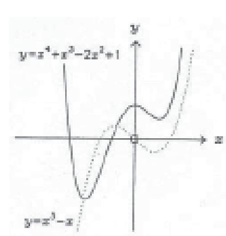
Powers, Roots and Logarithms

إحدى العلاقات الأساسية بين كميتين هي علاقة التناسب. فإذا تضاعفت قيمة y كلما تضاعفت قيمة x وأصبحت ثلاثة أمثال أصبحت قيمة x ثلاثة أمثال (وهكذا)، فإننا نقول إن y يتناسب طردياً مع x ونكتب $y \propto x$. يمكن التعبير عن هذا التناسب بمعادلة وذلك باستخدام ثابت ضربي k فيكون التناسب $y = kx$ وبيانه هو المستقيم المار بنقطة الأصل. وبصورة عامة من الممكن أن يتناسب y طردياً مع قوة للكمية x

$$y \propto x^M \Leftrightarrow y = kx^M \qquad (٢ , ٤)$$

على سبيل المثال، إذا كان $M = 2$ فإن قيمة y تصبح أربعة أمثال كلما ازدادت قيمة x مرتين وتصبح تسع أمثال ازدادت قيمة x ثلاث مرات.

(٥)



على الرغم من أن الصيغة الجبرية للمعادلة (٤ , ٢) بسيطة فإنه من الصعب معرفة قيمة M و k من بيان المعادلة ، ويعود السبب في ذلك إلى صعوبة معرفة المنحنى الذي يحتوي على عدة التفافات (عدا $M = 0, \pm 1$) ، ولكن من الممكن التغلب على هذه الصعوبة بأخذ اللوغاريتم لطرفي المعادلة (٤ , ٢)

$$log(y) = log(kx^M) = Mlog(x) + log\ (k) \qquad (٢ , ٥)$$

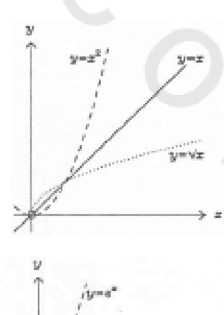
حيث استخدمنا المعادلتين (٧ , ١) و (٨ , ١) للحصول على الطرف الأيمن من المعادلة (٥ , ٢). الآن إذا رسمنا المعادلة باستخدام محوري $log(x)$ و $log(y)$ (لأي أساس أكبر من صفر) فإننا نحصل على خط مستقيم ميله يساوي M ويقطع محور $log(y)$ عند $log\ (k)$.[٦] معادلة القوة التالية تُسمى معادلة الاضمحلال الأسي وهي من المعادلات المهمة وتأخذ الصورة

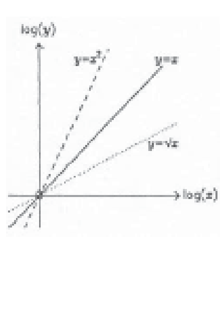
$$y = Ae^{-\beta x} = Aexp(-\beta x) \qquad (٢ , ٦)$$

حيث exp هو بديل للتعبير (e إلى القوة) ، وحيث A و β ثابتان. الثابت β يجب أن يكون موجباً وإلا فإن المعادلة تصبح معادلة نمو أُسي. وبصورة مشابهه لما قدمناه أعلاه فإننا نستطيع تبسيط المعادلة (٦ , ٢) لغرض رسم بيانها[٧] بأخذ اللوغاريتم لطرفي المعادلة

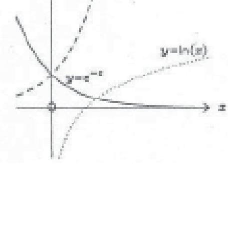
---

(٦)





(٧)



$$ln(y) = ln(A) - \beta x \qquad (٢,٧)$$

حيث استخدمنا تعريف log_e المقدم في المعادلة (٦ , ١) للحصول على الحد الثاني من الطرف الأيمن. وإذا رسمنا الآن المعادلة باستخدام محوري $ln\ (y)$ و x (حيث $A > 0$) فإننا نحصل على خط مستقيم ميله يساوي $-\beta$ ويقطع محور $ln\ (y)$ عند $ln(A)$. يتم في العادة رسم بيانات دوال كثيرات الحدود ودوال القوة الأكثر تعقيداً بدراسة سلوك أجزائها. على سبيل المثال ، من الممكن رسم الدالة $y = x/(1 + x^2)$ بملاحظة مايلي

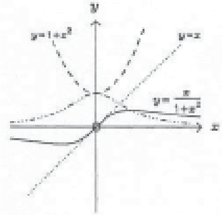
١- $1 + x^2$ قطع مكافئ قيمته كبيرة وموجبة عندما $x \to \pm\infty$ وله قيمة صغرى $y = 1$ عند $x = 0$.

٢- $\frac{1}{1+x^2}$ يتناقص إلى الصفر عندما $x \to \pm\infty$ وله قيمة عظمى $y = 1$ عند $x = 0$.

٣- بالضرب بالقيمة x (أو المستقيم المار بنقطة الأصل) نجد $\frac{x}{1+x^2}$ يكون متزايداً من $(0,0)$ إلى أن يصل قيمته العظمى قبل أن يبدأ بالتلاشي إلى الصفر عندما $x \to \infty$ وهو متماثل حول نقطة الأصل، فلذا جزء البيان (عندما $x < 0$) هو صورة مرآة للجزء $x > 0$.[٨]

---

(٨)



(٥ , ٢) الدوائر

Circles

يُعدُّ مُنحنى الدائرة ، المُنحنى المثالي من بين جميع المُنحنيات. تُعَّرف الدائرة رياضياً على أنها مجموعة النقاط التي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة مقداراً ثابتاً. ولإيجاد معادلة الدائرة ، نفرض أن (x_0, y_0) نقطة ثابتة (تُسمى مركز الدائرة) ولنفرض أن (x, y) أي نقطة على محيط الدائرة. بإنشاء مثلث قائم الزاوية واستخدام مبرهنة فيثاغورس (مربع الوتر= مجموع مربعي ضلعَّي القائمة) ، فإننا نجد أن المسافة بين النقطتين (x_0, y_0) و (x, y) تساوي الجذر التربيعي للمقدار $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2$.[٩] وبما أن هذا المقدار ثابت لكل نقطة على المحيط فنستنتج أن معادلة الدائرة هي

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2 \qquad (٢ , ٨)$$

حيث R هو نصف قطر الدائرة. وإذا كان مركز الدائرة هو نقطة الأصل فالمعادلة (٢ , ٨) تأخذ الشكل $x^2 + y^2 = R^2$.

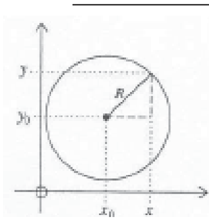
بفك المعادلة (٢ , ٨) وإعادة ترتيب الحدود نحصل على المعادلة القياسية التالية للدائرة

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (٢ , ٩)$$

حيث المركز عند النقطة $(-g, -f)$ ونصف القطر هو الجذر التربيعي للمقدار $g^2 + f^2 - c$. أما محيط الدائرة فيساوي $2\pi R$ ومساحتها تساوي πR^2.

---

(٩)



(٢ , ٦) القطوع الناقصة

Ellipses

إذا ضغطنا الدائرة بحيث نحصل على قطرين متعامدين غير متساويين (محوران رئيسان) فيُسمى الشكل الناتج عن ذلك القطع الناقص. أبسط معادلات القطع الناقص هي

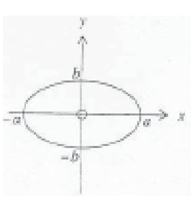
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (٢ , ١٠)$$

حيث المركز هو نقطة الأصل والمحوران الرئيسان هما محور xx ومحور yy وطولا هذان المحوران هما $2a$ و $2b$ على التوالي.[١٠] وإذا كان $a=b$ فإننا نحصل على معادلة الدائرة حيث مقام الطرف الأيسر هو R^2. إذا كان مركز القطع الناقص هو النقطة $(x_o ، y_o)$ فالمعادلة (٢ , ١٠) تأخذ الصورة

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$$

من الممكن كتابة المعادلة بصورة مشابهة للمعادلة (٢ , ٩) مع ملاحظة أن معاملي x^2و y^2 يجب أن يكونا مختلفين. إذا كان المحور الرئيسي (الأكبر) والمحور الثانوي (الأصغر) غير واقعين على محوري x و y فإن المعادلة ستحتوي على حد xy. من الممكن إثبات أن مساحة القطع الناقص الذي معادلته هي (٢ , ١٠) تساوي πab ولكن لا توجد صيغة مناسبة لمحيطه.

(١٠)



كل من القطع الناقص والقطع المكافئ هو مثال لما يسمى بالقطوع المخروطية. بمعنى أنه إذا قطعنا مخروطاً بطرائق مختلفة فإن المقطع العرضي الناتج يكون قطع ناقص أو قطع مكافئ أو قطع زائد (حسب اتجاه المقطع العرضي). رياضياً كل من هذه القطوع هو عبارة عن مسار لنقطة $P(x, y)$ تتحرك بحيث تكون النسبة بين بعدها r عن نقطة ثابتة S (تسمى البؤرة) إلى البعد العمودي l من مستقيم ثابت (يسمى الدليل) ثابتاً (يسمى الاختلاف المركزي ويرمز له بالرمز ϵ). أي أن

$$\frac{r}{l} = \epsilon$$

إذا كان $\epsilon < 1$ فإننا نحصل على قطع ناقص.

إذا كان $\epsilon = 1$ فإننا نحصل على قطع مكافئ.(١١)

أما إذا كان $\epsilon > 1$ فإننا نحصل على قطع زائد.

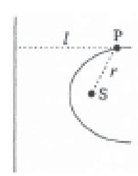
إذا استخدمنا المعادلة (١٠ , ٢) للقطع الناقص فإن S هي $(a\epsilon,0)$ والدليل هو المستقيم $x = \frac{a}{\epsilon}$ أو باستخدام التماثل فإن S هي $(-a\epsilon,0)$ والدليل هو المستقيم $x = \frac{-a}{\epsilon}$. كما أنه من الممكن إثبات أن $b^2 = a^2\left(1 - \epsilon^2\right)$ ومن ثم فإننا نحصل على المعادلة بوضع $\epsilon = 0$.

مدار الكون هو مثال فيزيائي على قطع ناقص إحدى بؤرتيه هي الشمس (من اكتشافات كيبلر في العام ١٦٠٩م).

معادلة القطع الزائد مشابهة لمعادلة القطع الناقص (١٠ , ٢) والإختلاف الوحيد هو وجود إشارة سالب بين حدّي الطرف الأيسر عوضاً عن اشارة الموجب ، وبيانه عبارة عن قطعتين متماثلتين تشبه كل منها القطع المكافئ ، كما أنه له خطان مقاربان معادلاتهما $y = \pm bx/a$ عندما يكون x كبيراً جداً.

---

(١١)



تمارين

(٢ , ١) ارسم المستقيمات الثلاث $y = x$ و $y = x \pm 1$ على الإحداثيات نفسها. ارسم أيضاً الست مستقيمات $y = \pm 2x$ و $y = \pm x$ و $y = \pm \frac{x}{2}$.

(٢ , ٢) جد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-1,3)$ و $(3,1)$. جد نقطة تقاطعه مع المستقيم $y = x + 1$.

(٢ , ٣) ارسم بيان كل زوج من القطوع المكافئة $y = x^2 \pm 1$ و $y = \pm x^2 + 1$ و $y = \pm 2x^2 + 1$.

(٢ , ٤) استخدم إكمال المربع لإيجاد إحداثيات النقطة القصوى (العظمى أوالصغرى) للدالة $y = x^2 + x + 1$ ومن ثم ارسم القطع المكافئ.

(٢ , ٥) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالثلاث نقاط $(0,3)$ ، $(3,0)$ ، $(5,8)$. ماهي جذور المعادلة ؟

(٢ , ٦) جد نقاط تقاطع المُنحنى $y = (x-3)(x-1)(x+1)$ مع محوري x و y. ارسم مُنحنى دالة الدرجة الثالثة هذه ثم الفترة التي تكون فيها قيم x موجبة.

(٢ , ٧) ارسم الدالتين $y = 1 - e^{-x}$ و $y = 1 - e^{-2x}$ لقيم x الموجبة ثم ارسم الدوال $y = e^{-|x|}$ ، $y = \frac{1}{x}$ ، $y = \frac{1}{x^2-1}$ لكل قيم x.

(٢,٨) على فرض أن الدالة الأسية هي المسيطرة لقيم x الكبيرة ، ارسم الدوال $y = xe^{-x}$ ، $y = xe^{-2x}$ ، $y = x^2e^{-x}$ لكل $x \geq 0$.

(٢,٩) جد مركز ونصف قطر الدائرة $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

(٢,١٠) ارسم القطع الناقص $3x^2 + 4y^2 = 3$. جد الإختلاف المركزي وحدد البؤرتين والدليل.

(٢,١١) ارسم القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$ وجد الخطان المقاربان.

(٢,١٢) بالتحليل أولاً أو بأي طريقة أخرى ارسم بيان المعادلة $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2 = 0$.