الفصل الأول

أساسيات الجبر والحساب
Basic Algebra and Arithmetic

(١ , ١) الحساب البدائي
Elementary Arithmetic

يعد الحساب أول المهارات الرياضية التي يتعلمها الأطفال: بداية بالعد على الأصابع ثم الجمع والطرح والضرب والقسمة. جميع هذه المهارات تعد من المهارات المباشرة ولكن ماذا لو واجهتنا عبارة مثل $2+6\times 3$، فهل يعني ذلك أن نضيف العدد 6 إلى العدد 2 ومن ثم نضرب الناتج بالعدد 3 (لنحصل على 24) أم أننا نقوم بضرب العدد 6 بالعدد 3 أولاً ثم نضيف الناتج إلى العدد 2 (لنحصل على 20) ؟ لتجنب هذا الالتباس، نتبع ترتيب الأولوية المتفق عليه لعمليات الحساب الأساسية وهو، حساب ما بداخل الأقواس أولاً، ثم حساب العملية من (of) مثل "نصف من ستة" وهي نادرة الاستخدام، بعد ذلك القسمة، الضرب، الجمع، الطرح على التوالي.[1] على سبيل المثال، يمكن صياغة العبارة المقدمة أعلاه على النحو التالي

$$2+6\times 3=2+(6\times 3)\neq(2+6)\times 3$$

حيث الأقواس ليست ضرورية للعبارة الوسطى؛ (لأنها تساوي العبارة اليسرى حسب ترتيب الأولوية) ولكنها ضرورية للعبارة اليمنى.

---

(١) أقواس من قسمة ضرب جمع طرح.

قبل الانتقال إلى بند آخر نذكر القارئ بقاعدة ضرب الأقواس وهي

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd \qquad (١,١)$$

لكل الأعداد الحقيقية a, b, c, d أعداد حقيقية حيث $ac=a\times c$.

(١,٢) القوى والجذور واللوغاريتمات
Powers, Roots and Logarithms

إذا ضربنا العدد a بنفسه مرة واحدة فإننا نكتب الناتج على الصورة a^2 ويُسمى a تربيع. يُكتب حاصل ضرب a مع نفسه ثلاث مرات على الصورة a^3 ويُسمى a تكعيب. وبصورة عامة يكتب حاصل ضرب a مع نفسه N من المرات على الصورة a^N ويُقرأ a للقوة (أو الأس). [٢] إذا كان N عدداً صحيحاً موجباً فإن معنى العبارة «للقوة» واضحاً. ولكن ماذا لو كان $N=0$ أو N عدداً سالباً ؟ من الممكن الإجابة عن هذا السؤال بسهولة لو لاحظنا أنه للحصول على a^{N-1} فإننا نقوم بقسمة a^N على a. ولذا، إذا كان a^0 هو a^1 مقسوماً على a فإن $a^0=1$، وبالمثل إذا كان a^{-1} هو a^0 على a فإن $a^{-1}=\frac{1}{a}$. وبصورة عامة، a^{-N} هو مقلوب a^N. ويكون لدينا

$$a^{-N}=\frac{1}{a^N} \quad \text{و} \quad a^0=1 \qquad (١,٢)$$

التعريف الأساسي لقوة العدد يقودنا مباشرة إلى الصيغة التالية لضرب قوتي عدد

---

(٢)
$a^1=a$
$a^2=a\times a$
$a^3=a\times a\times a$
$a^4= a\times a\times a\times a$

$$a^M a^N = a^{M+N} \qquad (١,٣)$$

حيث M و N عددان صحيحان موجبان. إذا أردنا أن تتحقق المساواة (١,٣) لجميع الأعداد M و N فإن ذلك يقودنا إلى تفسير القوى الكسرية على أنها جذور. فمثلاً، في الحالة $M = N = \frac{1}{2}$، نجد من المساواة (١,٣) أن a مرفوعاً للقوة $\frac{1}{2}$ يجب أن يساوي الجذر التربيعي للعدد a. وإذا كان a مرفوعاً للقوة $\frac{1}{3}$ مضروباً بنفسه ثلاث مرات يساوي a فإن $a^{\frac{1}{3}}$ يجب أن يساوي الجذر التكعيبي للعدد a.[٣] بصورة عامة الجذر p للعدد a يُعَرَّف على النحو التالي

$$a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a} \qquad (١,٤)$$

حيث p عدد صحيح. المساواة الأخيرة للقوى هي

$$(a^M)^N = a^{MN} \qquad (١,٥)$$

وبرهانها واضح إذا كان العددان M و N صحيحين. ومن الممكن استخدام القواعد (١,٢) إلى (١,٥) لإيجاد قيم قوى أكثر تعقيداً، على سبيل المثال

$$9^{-5/2} = \frac{1}{9^{5/2}} = \frac{1}{9^{2+1/2}} = \frac{1}{9^2 9^{1/2}} = \frac{1}{81\sqrt{9}} = \frac{1}{243}$$

وطريقة أُخرى لوصف عدد مرفوعٍ لقوة معينة هي استخدام اللوغاريتمات. أي أنه إذا كان y يساوي a مرفوعاً للعدد x فإن x يساوي لوغاريتم y للأساس a.

---

(٣) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} = a$

$a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}} = a$

$$y = a^x \Leftrightarrow x = log_a(y) \qquad (١ , ٦)$$

حيث الرمز $\Leftrightarrow$ يعني تكافؤ العبارتين. أي أن المساواة التي على اليسار تؤدي إلى المساواة التي على اليمين والعكس صحيح. وبما أننا غالباً ما نقوم بحساب قوى العدد 10 (مائة، ألف، مليون). أي أن $a = 10$. في هذه الحالة يُسمى log_{10} اللوغاريتم الاعتيادي[٤] وعادة يُكتب log (ولكن ذلك يُحدث إلتباساً في بعض الأحيان). ومن الأساسات المستخدمة بكثرة، الأساس ٢ والأساس e (2.718 مقرباً لثلاث مراتب عشرية)، سنستخدم العدد e في الفصول القادمة. يُسمى log_e اللوغاريتم الطبيعي[٥] ويُرمز له بالرمز ln.

باستخدام التعريف (٦ , ١) والمساواة (٣ , ١) نستطيع إثبات أن "لوغاريتم حاصل الضرب يساوي مجموع اللوغاريتمات" مهما كان الأساس، وباستخدام المساواة (٢ , ١) نجد أن "لوغاريتم خارج القسمة يساوي الفرق بين اللوغاريتمين".

$$\begin{aligned} log(AB) &= log(A) + log\,(B) \\ log\left(\frac{A}{B}\right) &= log(A) - log\,(B) \end{aligned} \qquad (١ , ٧)$$

وبالمثل، باستخدام (٦ , ١) نستطيع كتابة (٥ , ١) بدلالة لوغاريتم قوة ومن ثم الحصول على صيغة عند تغيير أساس اللوغاريتم (من a إلى b).

$$\begin{aligned} log\left(A^{\beta}\right) &= \beta log(A) \\ log_b(A) &= log_a(A) \times log_b\,(a) \end{aligned} \qquad (١ , ٨)$$

وعلى وجه الخصوص، $ln(x) = 2.3026\, log_{10}\, x$ حيث المعامل العددي هو $ln\,(10)$ مقرباً إلى ثلاث مراتب عشرية، وهكذا.

---

(٤) $log_{10}(10^0) = 0$ $\quad log_{10}(10^1) = 1$ $\quad log_{10}(10^2) = 2$

(٥) $ln(e^0) = 0$ $\quad ln(e^1) = 1$ $\quad ln(e^2) = 2$

(١,٣) معادلات الدرجة الثانية (التربيعية)
Quadratic Equations

إن أبسط أنماط المعادلات في متغير (مجهول) واحد وليكن x ، هو المعادلة الخطية $ax+b=0$ حيث a و b عددان ثابتان. وباستخدام قواعد الجبر الأولية• أي عملية تُجرى على أحد طرفي المعادلة يجب أن تُجرى على الطرف الآخر• نحصل على الحل التالي للمعادلة الخطية $x=-b/a$. ومعادلة أكثر تعقيداً والتي تُستخدم كثيراً هي المعادلة التربيعية (معادلة الدرجة الثانية) التي تأخذ الصورة العامة

$$ax^2+bx+c=0 \tag{١,٩}$$

إن الفرق الأساسي بين هذه المعادلة والمعادلة الخطية هو وجود الحد x^2 مما يؤدي إلى صعوبة إيجاد قيمة x التي تحقق المعادلة مباشرة. إذا استطعنا إعادة كتابة المعادلة (١,٩) بعد القسمة على aa على النحو التالي

$$(x-x_1)(x-x_2)=0$$

حيث x_1 و x_2 عددان ثابتان فإن حلا المعادلة هما $x=x_1$ أو $x=x_2$[٦]؛ لأنه إذا كان حاصل ضرب عددين صحيحين يساوي صفراً فإن العدد الأول يساوي صفراً أو العدد الثاني يساوي صفراً. وفي الحالات التي تواجهنا صعوبة في الحصول على مثل هذا التحليل فإننا نلجأ إلى كتابة المعادلة (١,٩) على الصورة

$$(x+\alpha)^2-\beta=0$$

---

(٦) $x_1x_2={}^{c}/_{a}$

$x_1x_2={}^{-b}/_{a}$

وذلك باستخدام طريقة تُسمى «إكمال المربع» حيث يمكن التعبير عن α و β بدلالة الثوابت a، b، c (ولكن ليس x).(٧) إن هذا يؤدي إلى صيغة عامة لإيجاد حلي المعادلة التربيعية

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (١,١٠)$$

وهذا يكافئ $x = -\alpha + \sqrt{\beta}$ و $x = -\alpha - \sqrt{\beta}$. وبما أن مربع أي عدد (سالب أم موجب) يجب أن يكون عدد غير سالب، أي أن $b^2 \geq 4ac$ في المعادلة (١,١٠) لكي نحصل على قيم حقيقية للمتغير x.

(١,٤) المعادلات الآنية

Simultaneous Equations

في الكثير من الأحيان تحتوي المعادلات على أكثر من متغير، ومن الأمثلة البسيطة على معادلات تحتوي على متغيرين x و y هي المعادلة $x + y = 3$. إن حل هذه المعادلة يتطلب إيجاد قيم x و y اللذان يحققان المساواة. وفي الحقيقة يوجد عدد غير منتهٍ من الحلول للمعادلة. على سبيل المثال ($x = 0$ و $y = 3$)، ($x = 1$ و $y = 2$)، ($x = p$ و $y = 3 - p$) بعض هذه الحلول.

لكي نجد قيمه وحيدة لكل من x و y فإننا نحتاج إلى معادلة أُخرى، مثل $x - y = 1$. والحل الوحيد للمعادلتين هو $x = 2$ و $y = 1$. حل هاتين المعادلتين معاً هو مثال على حل المعادلات آنياً.

---

(٧) $\alpha = \dfrac{b}{2a}$

$\beta = \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{c}{a}$

إن أبسط أنماط المعادلات الآنية هو المعادلات الخطية التي يكون كل من متغيراتها مرفوعاً* للقوة ١ وكل من حدودها يحتوي على متغير واحد فقط، وأبسط هذه الأنظمة هو النظام الذي يتكون من معادلتين كل منها تحتوي على متغيرين ويأخذ هذا النظام الشكل(٨)

$$ax + by = \alpha$$
$$cx + dy = \beta$$

إحدى طرائق حل هذا النظام هي طريقة التعويض حيث تُستخدم إحدى المعادلتين لإيجاد متغير بدلالة الآخر ومن ثم التعويض في المعادلة الأخرى. مثلاً، من المعادلة الأولى نجد أن $y = (\alpha - ax)/b$، وبالتعويض عن قيمة y في المعادلة الثانية نحصل على معادلة خطية في المتغير x، وبحل هذه المعادلة نحصل على قيمة x ومن ثم نستخدم المعادلة الأولى للحصول على قيمة y. من الممكن اتباع الأسلوب نفسه لحل أنظمة معادلات خطية تحتوي على ثلاث متغيرات x، y، z وهكذا. وللحصول على حل وحيد لمثل هذه الأنظمة فإنه يجب أن تكون جميعها مختلفة ولا نستطيع توليد أي معادلة منها باستخدام معادلتين أو أكثر من معادلات النظام. لاحظ أيضاً أنه للحصول على حل وحيد فإنه من الضروري أن تكون جميع المعادلات خطية، فإذا استبدلنا المعادلة الثانية في المثال المقدم في بداية هذا البند لتكون $x^2 - y = 3$ فإننا نحصل، بعد إيجاد قيمة y من المعادلة $x + y = 3$ والتعويض على معادلة الدرجة الثانية $x^2 + x - 6 = 0$. وبالتحليل نجد أن $(x + 3)(x - 2) = 0$. أي أن $x = 2$ أو $x = -3$ ومن ثم فإن $y = 1$ أو $y = 6$ على التوالي.

(٨) $x = \frac{ad - \beta b}{ad - bc}$

(١ , ٥) مفكوك ذو الحدين

The Binomial Expansion

إذا وضعنا $c = a$ و $d = b$ في المعادلة (١ , ١) فإننا نستطيع كتابة مربع مجموع عددين على النحو التالي $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$، وبضرب طرفي هذه المعادلة بالمجموع $a + b$ فإننا نحصل على مكعب مجموع عددين وهو

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

وبالاستمرار على هذا المنوال عدد N من المرات، فإننا نحصل على مفكوك ذي الحدين $(a+b)^N$ وهو

$$(a+b)^N = \sum_{r=0}^{N} \binom{N}{r} a^{N-r} b^r \qquad (١ , ١١)$$

حيث الرمز اليوناني Σ يعني "مجموع الحدود من $r = 0$ إلى $r = N$".[٩] معامل ذو الحدين $\binom{N}{r}$ يُعَّرف على النحو التالي

$$\binom{N}{r} = \frac{N!}{r!\,(N-r)!} \qquad (١ , ١٢)$$

حيث دالة المضروب تُعَّرف كالتالي

$$N! = N \times (N-1) \times (N-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \qquad (١ , ١٣)$$

---

(٩) $\sum_{r=0}^{N} A_r = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots A_N$

سنرى لاحقاً أن $0! = 1$ [على الرغم من عدم وضوح ذلك من المعادلة (١٣ , ١)]. من الممكن حساب معاملات ذي الحدين باستخدام مثلث باسكال عوضاً عن المعادلة (١٢ , ١)، حيث كل عدد داخلي في أي صف من صفوف المثلث هو مجموع العددان الأقرب له الواقعان في الصف الأعلى منه مباشرة.[١٠] أعداد الصف الثالث من مثلث باسكال هي معاملات فك المربع وأعداد الصف الرابع هي معاملات فك المكعب وهكذا.

(٦ , ١) المتتاليات الحسابية والهندسية

Arithmetic & Geometric Progressions

نحتاج في بعض الأحيان لإيجاد مجموع متتالية من الأعداد المولَّدة باستخدام قاعدة جبرية معينة . أسهل مثال على ذلك هو المتتالية الحسابية ويُرمز لها بالرمز $APAP$، حيث يكون أي حد منها هو الحد السابق له مضافاً إليه عدد ثابت dd يُسمى الفرق المشترك.

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \cdots + (l - d) + l$$

---

(١٠)

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

إذا كان عدد حدود المتتالية يساوي N وحدُّها الأول a فالحد الأخير l هو

$$l = a + (N-1)d$$

بكتابة حدود المتسلسلة أعلاه بطريقة معكوسة وجمع المتسلسلتين نجد أن ضعف مجموع المتسلسلة يساوي $N(a+l)$ ومن ثم نحصل على الصيغة التالية لمجموع AP[١١]

$$\sum_{j=1}^{N} (a+(j-1)d) = \frac{N}{2}[2a+(N-1)d] \qquad (١,١٤)$$

وهناك نوع آخر من المتتاليات التي تقابلنا مراراً وهي المتتاليات الهندسية ويُرمز لها بالرمز GP حيث أي حد من حدودها هو الحد السابق له مضروباً بعدد ثابت r يُسمى النسبة المشتركة.

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{N-2} + ar^{N-1}$$

إذا ضربنا كل حد من حدود المتسلسلة أعلاه بالعدد r وطرحنا المتسلسلتين نجد أن حاصل ضرب المجموع الذي نسعى إليه بالعدد $1-r$ يساوي $a - ar^N$. ومن ثم نحصل على الصيغة التالية لمجموع GP

$$\sum_{j=1}^{N} ar^{j-1} = \frac{a(1-r^N)}{1-r} \qquad (١,١٥)$$

(١١) $1+2+3+\cdots+N = \frac{N(N+1)}{2}$

إذا كانت القيمة المطلقة $|r|$ للنسبة المشتركة أصغر من ١ (أي $-1 < r < 1$)[١٢] فإن مجموع GP لا يستمر في التزايد عندما يؤول عدد الحدود إلى مالا نهاية. في الحقيقة r^N يصبح صغيراً جداً عندما N يؤول إلى مالا نهاية، ومن ثم فإن الصيغة (١,١٥) تأخذ الصورة

$$\sum_{j=1}^{\infty} ar^{j-1} = \frac{a}{1-r}\,, \qquad |r| < 1 \tag{١,١٦}$$

(١,٧) الكسور الجزئية

Partial Fractions

نقدم في هذا البند الأخير من هذا الفصل مفهوم الكسور الجزئية. إن أفضل طريقة لتوضيح هذا المفهوم هي استخدام أمثلة محددة، نبدأ بالمثال التالي

$$\frac{5x+7}{(x-1)(x+3)} = \frac{3}{(x-1)} + \frac{2}{(x+3)}$$

إن عملية جمع كسرين أو أكثر للحصول على كسر مكافئ عملية سهلة، وتتم بإيجاد المضاعف المشترك للمقامات وعادة ما يُسمى ذلك "تبسيط المعادلة". ينصب اهتمامنا في هذا البند على العملية العكسية، أي تجزئة كسر إلى مجموع كسور جزئية حيث لهذه التجزئة العديد من الاستخدامات. لاحظ أن الكسر المراد تجزئته هو خارج قسمة كثيرتي حدود (كثيرة الحدود هي مجموع قوى صحيحة موجبة لمتغير مثل x) بحيث يكون مقام

---

(١٢) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{2}{3}$

الكسر قابل للتحليل إلى عوامل أبسط. لكي نستطيع تفريق الكسر إلى كسور جزئية يجب أن نتأكد أولاً من أن درجة كثيرة حدود البسط أصغر من درجة كثيرة حدود المقام وإن لم تكن كذلك فإننا نقسم البسط على المقام أولاً (١٣)، وهذا يشبه تماماً وضع كسر غير فعلي على صورة مجموع عدد صحيح وكسر فعلي (مثلاً،). وإذا كان البسط في مثالنا السابق هو $2x^2 + 9x + 1$ فإننا نقوم بقسمته على المقام قسمة مطولة لنحصل على

$$\frac{2x^2 + 9x + 1}{(x-1)(x+3)} = 2 + \frac{5x+7}{(x-1)(x+3)}$$

ومن ثم نجزئ الكسر الأخير إلى مجموع كسور جزئية. نبين الآن كيفية إنجاز ذلك . إن المثال المقدم أعلاه هو من أسهل أمثلة الكسور الجزئية حيث المقام حاصل ضرب عوامل خطية، ولذا فإننا نستطيع تجزئته على الصورة

$$\frac{5x+7}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)}$$

حيث A و B ثابتان . وإذا وُجد حد آخر في المقام مثل $2x + 3$ فإننا نحصل على كسر إضافي $C/(2x+3)$ في الطرف الأيمن. ولحساب الثوابت A و B فإننا نقوم بجمع كسري الطرف الأيمن للمعادلة من خلال توحيد المقامات ليكون المقام مساوياً لمقام الكسر في الطرف الأيسر للمعادلة ومن ثم نساوي البسطين لنحصل على

---

(١٣)

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \\ \hline \chi^2+2\chi-3 & 2\chi^2+9\chi+1 \\ & \underline{2\chi^2+4\chi-6} \\ & \quad 5\chi+7 \end{array}$$

$$5x + 7 = A(x + 3) + B(x - 1)$$

ولكي تكون هذه المعادلة محققة فيجب أن تكون معاملات قوى x في الطرف الأيسر تساوي معاملات قوى x المقابلة في الطرف الأيمن. وبهذا نحصل على نظام من المعادلات الخطية للثوابت.(١٤) وطريقة أُخرى لإيجاد قيم الثوابت تتم بالتعويض عن قيم مختارة للمتغير x، وعلى وجه الخصوص القيم التي تجعل المقام يساوي صفراً. ولذا بوضع $x = 1$ نجد أن $4B = 8$. وتُسمى هذه الطريقة المختصرة بقاعدة التغطية، للحصول على قيمة A، نضع $x - 1 = 0$، أي $x = 1$. وللحصول على قيمة B، نضع $x + 3 = 0$، أي $x = -3$.

إذا احتوى المقام في مثالنا المُقدم أعلاه على عامل من الدرجة الثانية فإن الكسر المناظر لهذا العامل يكون بسطه عامل خطي على الصورة

$$\frac{5x + 7}{(x - 1)(x^2 + 4x + 3)} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 4x + 3)}$$

ومن ثم فإننا نقوم بحساب الثوابت بطريقة مماثلة لما سبق. بجمع كسري الطرف الأيمن للمعادلة ومساواة بسط الناتج مع بسط الطرف الأيسر نحصل على

$$5x + 7 = A(x^2 + 4x + 3) + (Bx + C)(x - 1)$$

(١٤) $A + B = 5$

$3A - B = 7$

في هذه الحالة نستطيع الحصول على قيمة AA بتعويض $x = 1$، لنجد . ولإيجاد قيمة B و C نقوم بمقارنة معاملات x^0، x^1، x^2 في طرفي المعادلة.(١٥)

الحالة الأخيرة في الكسور الجزئية هي وجود عوامل مكررة في المقام مثل . من الممكن فك هذا العامل لنحصل على $x^2 + 6x + 9$ ومن ثم نستخدم الطريقة السابقة للعامل التربيعي، ولكن يفضل استخدام الأسلوب التالي

$$\frac{5x+7}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)} + \frac{C}{(x+3)^2}$$

ويتم حساب الثوابت كما في السابق حيث نساوي البسطان بعد جمع كسور الطرف الأيمن

$$5x + 7 = (x+3)[A(x+3) + B(x-1)] + C(x-1)$$

وبوضع $x = 1$ و $x = -3$ نحصل مباشرة على A و C ومن ثم نحصل على B بمقارنة معاملات x^0، x^1، x^2.

---

(١٥) $A + B = 0$

$4A - B + C = 5$

$3A - C = 7$

تمارين

(١, ١) احسب قيمة كل من

(١) $1 + 2 \times 6 - 3$

(٢) $3 - 1/(2 + 4)$

(٣) $2^3 - 2 \times 3$

(١, ٢) بسط المساواة (١أ) عندما يكون

(١) $b = 0$

(٢) $a = ca = c$ و $b = db = d$

(٣) $a = ca = c$ و $b = -db = -d$

(١, ٣) احسب قيمة كل من

(١) $4^{3/2}$

(٢) $27^{-2/3}$

(٣) $3^2 3^{-3/2}$

(٤) $log_2(8)$

(٥) $log_2(8^3)$

(١, ٤) باستخدام تعريف اللوغاريتم المُقدم بالمعادلة (١, ٦) وتعويض $A = a^M$ و $B = a^N$، اثبت أنه بأخذ log_a لطرفي المعادلة (١, ٣) نحصل على المعادلة (١, ٧). بالمثل، أثبت أن المعادلة (١, ٥) تؤدي إلى المعادلة (١, ٨).

(١ , ٥) بقسمة المعادلة (١ , ٩) على a وإكمال المربع أثبت المعادلة (١ , ١٠).

(١ , ٦) حل كل من المعادلات التالية

(١) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(٢) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

(٣) $x^2 - 4x + 2 = 0$

(١ , ٧) جد قيم k التي تجعل للمعادلة $x^2 + kx + 4 = 0$ جذور حقيقية.

(١ , ٨) حل كل من أنظمة المعادلات الآتية

(١)
$$3x + 2y = 4$$
$$x - 7y = 9$$

(٢)
$$x^2 + y^2 = 2$$
$$x - 2y = 1$$

(٣)
$$x^2 - 4x + 2 = 0$$
$$x + 4y - 2z = 9$$
$$4x - 6y + 3z = 3$$

(١ , ٩) جد مفكوك كل من $(2 + x)^5$ و $(1 + x)^9$ و $(x + 2/x)^6$ بدلالة قوى x.

(١ , ١٠) برهن صيغتي المجموع لكل من AP و GP.

(١,١١) بكتابة العدد العشري الدوري $0.12121212\cdots$ كمجموع متتالية هندسية غير منتهية، أثبت أن $\frac{4}{33} = 0.12121212\cdots$. ماهي القيمة الكسرية للعدد $0.318318318\cdots$ ؟

(١,١٢) فرّق الكسور التالية إلى كسور جزئية

(١) $$\frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

(٢) $$\frac{x^2 - 5x + 1}{(x-1)^2(2x-3)}$$

(٣) $$\frac{11x + 1}{(x-1)(x^2 - 3x - 2)}$$

(١,١٣) احسب قيمة كل من المجموعين التاليين

(١) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

(٢) $$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+{}^{1}/_{2})}$$