الفصل الخامس عشر

متسلسلة وتحويلات فورييه
Fourier Series & Transforms

(١٥ , ١) تقريب دوال دورية
Approximating Periodic Functions

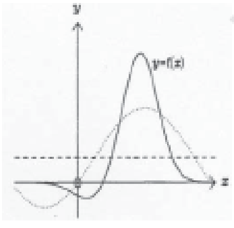
بينا في الفصل السادس كيفية استخدام متسلسلة تايلور لمحاكاة (تقريب) الدوال بواسطة كثيرة حدود درجتها صغيرة في جوار نقطة معينة. إذا كانت الدالة المقربة دورية فمن الممكن استخدام متسلسلة فورييه لتقريبها

$$^{(1)}f(x) \approx \frac{a_0}{2} + a_1 cos(\omega x) + a_2 cos(2\omega x) + a_3 cos(3\omega x) + \cdots$$

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + a_1 cos(\omega x) + a_2 cos(2\omega x) + a_3 cos(3\omega x) + \cdots \quad (١٥ , ١)$$

$$+b_1 sin(\omega x) + b_2 sin(2\omega x) + b_3 sin(3\omega x) + \cdots$$

---

(١) 

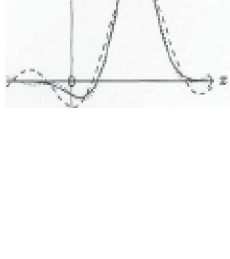
حيث a_i ، b_i ، ω ثوابت. في الحقيقة المعادلة (١٥,١) هي رديف المعادلة (٦,١). تبين لنا المعادلة (١٥,١) امكانية تمثيل أي دالة دورية كمجموع لدالتي الجيب وجيب التمام. لاحظ أنه يمكن استبدال $a_1 cos(\omega x) + b_1 sin(\omega x)$ بالمقدار $c_1 cos(\omega x + \varphi_i)$ أو بالمقدار $c_1 sin(\omega x + \varphi_i)$ ولكن الصيغة الأولى هي المفضلة؛ لأنها تتمتع بالخاصية الخطية. ثمثل الدورة في المعادلة (١٥,١) أصغر توافقية ω وهي $^{2\pi}/_{\omega}{}^{2\pi}/_{\omega}$. بضرب طرفي المعادلة (١٥,١) مرة بالمقدار $sin(n\omega x)$ وحساب التكامل على إحدى الدورات نستطيع اثبات ان معاملات متسلسلة فورييه هي[1]

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x)\, cos(n\omega x) dx \quad \text{و} \quad b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x)\, sin(n\omega x) dx \qquad (١٥,٢)$$

حيث $n = 1,2,\cdots$ وحيث إننا استخدمنا حقيقة تعامد دالتي الجيب وجيب التمام للحصول على الصيغة (١٥,٢) لمعاملات متسلسلة فورييه. أي أن تكامل $sin(m\omega x) sin(n\omega x)$ أو تكامل $cos(m\omega x) cos(n\omega x)$ على الفترة من $x = 0$ إلى $x = {}^{2\pi}/_{\omega}$ يساوي صفراً لكل $m \neq n$. يرجع سبب وجود الحد $\frac{1}{2}a_o$ في المعادلة (١٥,١) إلى أن (١٥,٢) صحيحة عندما $n = 0$ وهذا يؤدي إلى أن $b_o = 0$.

في التطبيقات العملية، من الممكن استخدام متسلسلة فورييه لتقريب دالة حتى لو لم تكن دورية. ويرجع السبب في ذلك إلى أن الاهتمام يكون عادة منصباً على تقريب $f(x)$ على فترة محدودة $0 \leq x \leq L$. وبذلك يمكن إيجاد الدورة

(٢)



بتعريف $f(x) = (x + jL)$ حيث j عدد صحيح أو بوضع $f(x) = f(-x)$ و $f(x) = f(x + 2jL)$ أو بوضع $f(x) = -f(-x)$ و $f(x) = f(x + 2jL)$ وهكذا.

فإذا كانت الدورة هي L فإن $\omega = {}^{2\pi}/_{L}$ ، وإذا كانت الدورة هي $2L$ فإن $\omega = {}^{\pi}/_{L}$.

لاحظ أن كل من الخيارات السابقة يؤدي إلى متسلسلة فوريه مختلفة ، فمثلاً إذا كان $f(x) = -f(x)$ فالمتسلسلة لا تحتوي على حدود دالة الجيب وإذا كان $f(x) = -f(-x)$ فالمتسلسلة لا تحتوي على حدود دالة جيب التمام ، ومع ذلك فإننا لا زلنا نحصل على تقريب جيد في الفترة $0 \leq x \leq L$.

(٢ , ١٥) متسلسلة تايلور مقابل متسلسلة فوريه
Taylor Series vs. Fourier Series

تقدم لنا متسلسلة تايلور تقريب جيد للدالة $y = f(x)$ بجوار نقطة $x = x_o$ ولكن هذا التقريب يصبح غير دقيق إذا كان $|x - x_0|$ كبيراً. في المقابل لا تعتمد متسلسلة فوريه على جوار معين ولكنها تحاكي شكل مُنحنى الدالة بشكل جيّد. الميزة العامة لمتسلسلة فوريه هي أن حساب التكامل حداً حداً أفضل من حساب المشتقة حداً حداً وعلى الأخص عندما يكون التردد التذبذبي عالياً. ومن الناحية التقنية ، يجب أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق العديد من المرات في متسلسلة تايلور، بينما بالمقابل في متسلسلة فوريه نحتاج فقط أن تكون الدالة $f(x)$ ومشتقتها $f'(x)$ متصلتان.

(١٥,٣) تكامل فورييه
The Fourier Integral

من الممكن الحصول على صيغة أقصر للمعادلة (١٥,١) باستخدام معادلة الأعداد المركبة (١١,٧) التي تربط بين دالتي الجيب وجيب التمام مع الدالة الأسية التخيلية

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} \qquad (١٥,٣)$$

حيث المعاملات c_n أعداد مركبة والعلاقة بينها وبين معاملات المعادلة (١٥,١) هي $a_n = (c_n + c_{-n})$ و $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

الفائدة التي نجنيها من استخدام الأعداد المركبة هي سهولة التعميم وخاصة عند نهاية المتصل ، أي في الحالة التي تكون فيها الفترة طويلة جداً ومن ثم نخسر خاصية الدورية للدالة $f(x)$ وعندها نستطيع استبدال المعادلة (١٥,٣) بالتكامل

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega \qquad (١٥,٤)$$

حيث دالة المعامل $F(\omega)$ هي

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx \qquad (١٥,٥)$$

ومن ثم يمكن اعتبار ذلك على انه رديف المعادلة (١٥,٢) في الأعداد المركبة. يُسمى $F(\omega)$ في المعادلتين (١٥,٤) و (١٥,٥) ، تحويل فورييه للدالة $f(x)$. كما تُسمى $f(x)$،

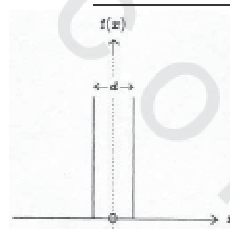
معكوس تحويل فورييه $F(\omega)$. في الحقيقة، إن تسمية $F(\omega)$ بتحويل فورييه وتسمية $f(x)$ معكوس التحويل هو مجرد عُرف فقط. المهم أنهما مرتبطان باشارة مختلفة للدالة الأسية. توجد أيضاً صيغ أخرى للمعادلتين (١٥,٤) و (١٥,٥)، في بعضها تُستبدل $\frac{1}{2\pi}$ بـ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ لكي يكونا أكثر تماثلاً، أو يُستخدم $i2\pi\omega x$ بدل الأس.

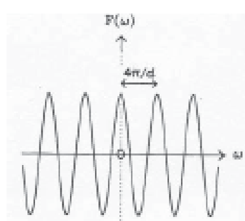
من الممكن رسم تحويل فورييه $F(\omega)$ للدالة $f(x)$ كدالة في ω. ومن ثم فإن سعته تدل على المقدار الذي يساهم فيه منحنى الجيب الذي تردده ω في انشاء $f(x)$. بتعويض $f(x) = \delta\left(x - \frac{d}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{d}{2}\right)$ في المعادلة (١٥,٥) حيث $\delta(x - x_o)$ دالة دلتا وتمثل جزء صغير من مساحة عند $x = x_o$ بحيث يكون

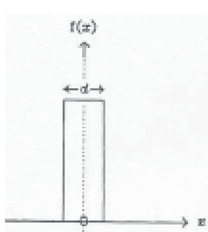
$$\int \delta(x - x_o) e^{-i\omega x}\, dx = exp(-i\omega x_o)$$

نجد أن تحويل فورييه لشريحتين المسافة بينهما δ يتناسب مع $cos(\omega d/2)$.[٢] وبالمثل، بأخذ $f(x) = 1$ في الفترة $-\frac{d}{2} \le x \le \frac{d}{2}$ و $f(x) = 0$ ما عدا ذلك، نجد أن تحويل فورييه يتناسب مع دالة الجيب $\frac{sin\theta}{\theta}$ حيث $\theta = \frac{\omega d}{2}$. بصورة عامة، نستطيع القول إن عرض $F(\omega)$ يتناسب عكسياً مع صفة الإنبساط (التمديد) في تركيب $f(x)$، فكلما كانت الدالة ضيقة (دقيقة) يكون تحويل فورييه واسعاً والعكس صحيح.[٣]

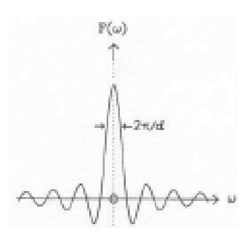
(٢)







(٣)



(١٥,٤) بعض الخصائص الشكلية

Some Formal Properties

في البنود السابقة، افترضنا ضمنياً أن الدالة $f(x)$ حقيقية، أي $f(x) = f(x)^*$ ومن ثم يمكن رسم بيانها في المستوى ولكن هذا لايمنع من أن تكون الدالة مركبة وخاصة فيما يتعلق بالمعادلتين (١٥,٤) و (١٥,٥). في الحقيقة $F(\omega)$ تكون في الغالب دالة مركبة. فإذا كانت حقيقية (وهي في العادة كذلك) فإن تحويل فورييه لها يكون متماثل ترافقياً، بمعنى، $F(\omega) = F(-\omega)^*$. وعندما تتمتع $f(x)$ بخصائص تماثلية نستطيع إثبات خصائص أخرى للتحويل $F(\omega)$. فمثلاً إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن $F(\omega) = F(-\omega)$ وإذا كانت $f(x)$ دالة فردية فإن $F(\omega) = -F(-\omega)$. أي أن $F(\omega)$ تكون حقيقية ومتماثلة إذا كانت $f(x)$ كذلك وتكون حقيقية وفردية إذا كانت $f(x)$ كذلك.

احدى أهم نتائج تحليل فورييه هي ما يُعرف بمبرهنة التلاف والتي تنص على

$$f(x) = g(x) \otimes h(x) \Leftrightarrow F(\omega) = 2\pi G(\omega) \times H(\omega) \qquad (١٥,٦)$$

حيث $\otimes$ هي عملية التلاف و $F(\omega)$، $G(\omega)$، $H(\omega)$ هي تحويلات فورييه للدوال $f(x)$، $g(x)$، $h(x)$ على التوالي. ويُعَّرف التلاف بين دالتين على أنه التكامل

$$g(x) \otimes h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)h(x-y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)h(y)\,dy \qquad (١٥,٧)$$

ويمثل عدم الوضوح بين $g(x)$ و $h(x)$. فإذا كان بيان $g(x)$ يحتوي على أجزاء حادة وبيان $h(x)$ يأخذ شكل جرس دالة جاوس فإن بيان $g(x) \otimes h(x)$ يكون نسخة

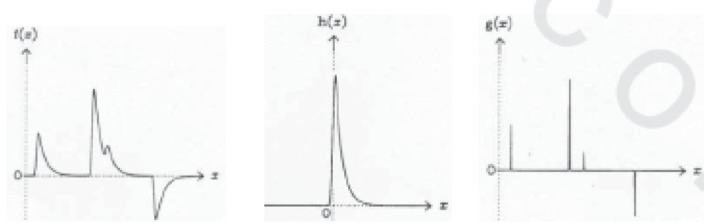
مفلطحة لبيان $g(x)$. وتكمن أهمية المعادلة (٦ , ١٥) بقدرتها على تحويل تكامل صعب بالنسبة إلى x إلى تكامل حاصل ضرب مباشر بالنسبة إلى ω (فضاء فورييه).[٤]

والخاصية الأخيرة لتحويل فورييه تتعلق بدلالة الارتباط الذاتي (ACF) والتي تزودنا بمعلومات عن توزيع المسافات للتركيبات المختلفة للدالة $f(x)$. أي ، إذا وُجد نتوئين في بيان الدالة $f(x)$ ، المسافة بينهما تساوي L وسعتاهما A_1 و A_2 فإنهما يساهمان بزوج من المركبات الحادة المتماثلة عند $x = \pm L$ ومعيار A_1A_2 لدالة الارتباط الذاتي للدالة $f(x)$. أيضاً ، يمكن إثبات أن لدالة الارتباط الذاتي للدالة $f(x)$ علاقة مع تحويل فورييه للدالة $|F(\omega)|^2 = F(\omega)^*F(\omega)$ وهذه العلاقة معرفة بالتكامل

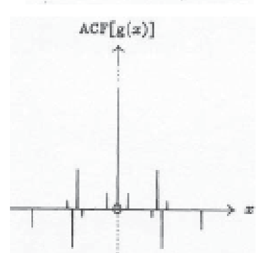
$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)^* f(x+y) dy \qquad (١٥,٨)$$

حيث تكامل الطرف الأيمن هو تعريف دالة الارتباط الذاتي للدالة $f(x)$. لاحظ وجود نتوء عن نقطة الأصل لدالة الارتباط الذاتي لأنه لا يوجد أي ارتباط عند تلك النقطة.[٥] بوضع $x = 0$ في المعادلة (١٥,٨) نحصل على حالة خاصة من مبرهنة بارسفال

(٤)



(٥)



$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx \qquad (١٥ , ٩)$$

وتساعدنا على حساب تكاملات يكون أحد طرفيها أسهل من الآخر.

(١٥ , ٥) أمثلة فيزيائية ونظرة فاحصة
Physical Examples & Insight

بدأنا بدراسة متسلسلة فورييه على أنها رديف متسلسلة تايلور للدوال الدورية ، فلتحويل فورييه وجود طبيعي في العديد من فروع المعرفة المختلفة سواء النظرية منها كميكانيكا الكم أو العملية كالتجارب المتعلقة بانحراف الضوء في ظواهر التداخل الضوئي. ومع أننا اقتصرنا نقاشنا على البعد الأحادي إلاّ أنه من الممكن تعميم تحليل فورييه وبسهولة إلى عدة متغيرات باستخدام مفهوم المتجهات وبهذا يكون تعميم المعادلة (٤ , ١٥) على النحو التالي

$$f(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(\vec{\omega}) exp(i\vec{\omega}.\vec{x}) d\vec{\omega} \qquad (١٥ , ١٠)$$

وهكذا ، حيث المعادلة (١٠ , ١٥) تمثل تكامل سطحي إذا كان كل من $\vec{x}$ و $\vec{\omega}$ ثنائي البعد وتكامل حجمي إذا كان كل منهما ثلاثي البعد.

ولزيادة فهمنا لتحويل فورييه ، دعنا نأخذ بعض الأمثلة الضوئية من مادة فيزياء المرحلة الثانوية. نبدأ بظاهرة تُدعى إنحراف الضوء لفرونهوفر ويمكن وصفها على النحو التالي:

لنفرض أن حزمة من الموجات الضوئية طول كل منها λ ترتطم بحامل يسمح بنفاذ بعضها لتسقط بعد ذلك على جدار يبعد مسافة معينة عن الحامل. إذا كان x يمثل مسافة على الحامل و q تمثل المسافة على الجدار فإن محصلة سعة جميع الموجات التي انحرفت باتجاه معين تُعطى بالتكامل

$$\psi(q) = \psi_o \int_{-\infty}^{\infty} A(x) e^{iqx}\, dx \qquad (١٥,١١$$

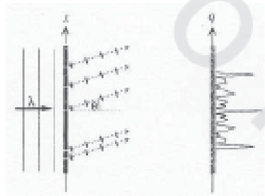
حيث ψ_o ثابت و $A(x)$ دالة نفاذ تُستخدم لتحديد كمية الضوء النافذة إلى الحامل و q يرتبط مع λ وزاوية الانحراف بالقاعدة $q = 2\pi sin\theta/\lambda$ و $exp\ (iqx)$ جزء من الموجات التي تمثل الاختلاف في أطوار المسارات من عدة نقاط على الحامل إلى موقع على الجدار.[٦] عدد الفوتونات المُكتشفة يساوي الشدة $I(q)$[٧] وهي

$$I(q) = |\psi(q)|^2 = \psi(q)^* \psi(q) \qquad (١٥,١٢)$$

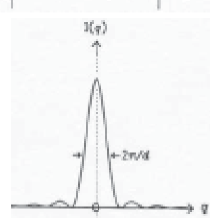
ومن ثم فإن الحزم الضوئية والحزم المظلمة على الجدار تتناسب مع مربع القيمة المطلقة لتحويل فورييه لدالة النفاذ. وعليه فالضوء الخافت المنتظم الذي نحصل عليه من تجربة يونغ

---

(٦)



(٧)



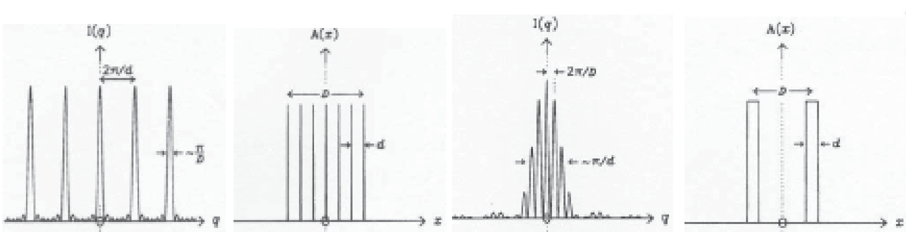
(يستخدم حامل بفتحتين طويلتين) يُعطي بالعلاقة $I(q) \propto \cos(qd) + 1$ وبالمثل، نمط الانحراف نتيجة فتحة واحدة كبيرة يحقق العلاقة $I(q) \propto [sin(qd/2)/(qd)^2]$ أو $I(q) \propto [1 - cos(qd)]/(qd)^2$.

أما بالنسبة إلى أنماط الانحراف الأكثر تعقيداً فتكون معالجتها بتحليلها إلى أنماط بسيطة ومن ثم ربطها بعضها مع بعض باستخدام مبرهنة التلاف (٦ , ١٥)؛ وذلك لأنه يمكن النظر إلى حالة وجود فتحتين عريضتين على أنهما تلاف لفتحة مضاعفة (في تجربة يونغ) مع فتحة عريضة واحدة. على سبيل المثال ، الحزم المضيئة والمظلمة هي نتيجة حاصل ضرب مجموع من الضوء الباهت المنتظم (جيب تمام) ودالة جيب (مربعة). وبالمثل ، يمكن إنشاء الشعاعات القصيرة الناتجة عن فتحات ضيقة الموزعة على الحائط بمسافات متساوية كحاصل ضرب دالة طويلة جداً (تشبه عرف الديك) مع فتحة عريضة واحدة ومن ثم فإن نمط الانحراف هو تلاف لمجموعة منتظمة من الرزات (المسامير) ودالة جيب (مربعة).

أخيراً ، لاحظ أن دالة الكثافة $I(q)$ في المعادلة (١٢ , ١٥) تعني عدم وجود معلومات على الإزاحة الزاوية لإحداثي فوريه المركب $\psi(q)$ في المعادلة (١١ , ١٥) ، لاحظ أيضاً أن $I(q)$ تقدم لنا معلومات عن دالة الارتباط الذاتي للدالة $A(x)$ بصورة مباشرة كما هو مبين في المعادلة (٨ , ١٥) ولكن ليس عن $A(x)$ نفسها. وهذا يوضح الصعوبات التي يمكن مواجهتها في بعض الدراسات كالصعوبة التي تواجه المختصين في علم البلوريات عند محاولة معرفة تركيب البروتين بدلالة معرفة سابقة لكثافة بقع براج.[٨]

---

(٨)



تمارين

(١ , ١٥) بين بدايةً أن دالتي الجيب وجيب التمام متعامدتان ثم استخدم المعادلة (١ , ١٥) لإثبات صحة المعادلة (٢ , ١٥).

(٢ , ١٥) أثبت متطابقة بارسفال باستخدام معادلة نشر فورييه (١ , ١٥)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx = \frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

(٣ , ١٥) لنفرض أن الدالة التالية تمثل موجة مثلثية

$$f(x)\begin{cases} x & ,0 < x < \pi \\ -x & ,-\pi < x < 0 \end{cases}$$

وأن $f(x) = f(x + 2m\pi)$ لكل عدد صحيح m. أثبت أن تمثيلها بواسطة متسلسلة فورييه هو

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{cos[(2n+1)x]}{(2n+1)^2}$$

(٤ , ١٥) جد صيغة لكثافة أنماط الانحراف لتجربة يونغ ذات الفتحتين حيث d هو البعد بينهما وفتحة واحدة عرضها ω.

(١٥ , ٥) احسب تحويل فورييه لرزات ضيقة ممثلة بوحدة مساحة أو دوال من النوع δ عند

(١) $x = 0$

(٢) $x = d$

ماهو الاختلاف في الحالتين ؟ وماذا يمكن أن نستنتج من قياس الكثافة فقط ؟