الفصل الرابع عشر

المعادلات التفاضلية الجزئية
Partial Differential Equations

(١٤ , ١) حالات بدائية
Elementary Cases

الدوال المستخدمة في المعادلات التفاضلية العادية التي درسناها في الفصل السابق هي دوال بمتغير واحد فقط. في هذا الفصل سنتعامل مع دوال بعدة متغيرات وبهذا نحتاج كما تعلمنا في الفصل العاشر بتبديل المشتقة العادية $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ إلى مشتقة جزئية $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$. ومن هنا تُسمى المعادلات التفاضلية بالجزئية (PDE) لتفريقها عن المعادلات التفاضلية العادية. ولتبسيط تناول الموضوع ستكون أمثلتنا مقتصرة على دوال في متغيرين فقط.

نبدأ بأبسط معادلة تفاضلية جزئية وهي

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 0 \qquad (١٤ , ١)$$

بما أن المشتقة تساوي صفراً فإن التكامل يجب أن يكون ثابتاً ، وبما أن المتغير y ثابتاً في المعادلة (١٤أ١) فإن أي دالة $g(y)$ في المتغير y هي دالة ثابتة. ونستنتج أن الحل العام للمعادلة هو $z(x, y) = g(y)$. يبين لنا هذا المثال البسيط أن ثابت التكامل الناشئ

Obeikandl.com

عن المعادلات التفاضلية الجزئية يجب أن يكون دالة وليس مقداراً ثابتاً كما هو الحال في المعادلات التفاضلية العادية.

نقدم الآن مثالاً على حالة أكثر أهمية من الحالة السابقة. إذا كان لدينا التفاضل التام

$$df = \left[\frac{x-y}{x^2}\right]dx + \frac{1}{x}dy$$

فما هي $f(x,y)$؟ باستخدام المعادلة (١١, ٥) نجد أن

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \frac{x-y}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} \quad \text{و} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \frac{1}{x} \qquad (١٤,٢)$$

دعنا نبدأ بالاشتقاق الأسهل $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \frac{1}{x}$ والذي يعني أن مشتقة $f(x,y)$ بالنسبة للمتغير y مع بقاء x ثابتاً هي $\frac{1}{x}$. إذن ، نستنتج أن

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + g(x) \qquad (١٤,٣)$$

إن أفضل طريقة لإيجاد $g(x)$ هي باشتقاق المعادلة (١٤,٣) بالنسبة إلى x مع إبقاء y ثابتاً ثم مقارنة الناتج مع الجزء الأول من المعادلة (١٤,٢)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \frac{dg}{dx} - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}$$

حيث $\frac{dg}{dx}$ هنا تعني $\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y$؛ لأن $g(x)$ دالة في x فقط. وبالمقارنة نجد أن $\frac{dg}{dx} = \frac{1}{x}$ وينتج عن ذلك أن $g(x) = \ln x + C$ حيث C مقدار ثابت (لايحتوي متغيرات). وبهذا نجد أن الحل للتفاضل التام هو

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + \ln x + C$$

حيث من السهولة الآن التحقق من صحته وذلك باشتقاقه للحصول على المعادلة (١٤,٢).

وكمثال أخير في هذا البند، نأخذ معادلة سهلة من الرتبة الثانية وهي $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$. نستطيع حل هذه المعادلة بملاحظة أن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x_y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 0 \qquad (١٤,٤)$$

بمكاملة المعادلة (١٤,٤) بالنسبة إلى x مع إبقاء y ثابتاً نجد

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = g(y)$$

الآن بمكاملة أخرى بالنسبة إلى y مع إبقاء x ثابتاً يعطينا الحل العام

$$z(x,y) = G(y) + h(x) \qquad (١٤,٥)$$

حيث

$$G(y) = \int g(y)dy$$

obeikandl.com

دالة في y فقط.

وعلى الرغم أن المعادلة (٥ , ١٤) لا تزودنا بقاعدة تعريف مريحة للدالتين $G(y)$ و $h(x)$ دون وضع شروط حدية ، ولكنها على الأقل تُمكننا من معرفة أن $z(x, y)$ هي مجموع دالتين إحداهما دالة في y فقط والأخرى دالة في x فقط.

جميع أمثلة المعادلات التفاضلية الجزئية المقدمة في هذا البند هي أمثلة بدائية يمكن حلها بإجراء تكاملات مباشرة مع معرفتنا لما تعنيه المشتقات الجزئية. ننتقل الآن إلى أمثلة أكثر واقعية.

(٢ , ١٤) فصل المتغيرات

Separation of Variables

معظم المعادلات التفاضلية الجزئية ذات الإهتمامات الفيزيائية مثل معادلة الموج هي معادلات من الرتبة الثانية

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (١٤ , ٦)$$

حيث من الممكن أن يمثل y الإزاحة الرأسية لوتر و x الموقع و t الزمن و c سرعة الموجة. توجد العديد من الطرق لحل مثل هذه المعادلة التفاضلية وجُل هذه الطرق يخرجنا عن نطاق هذا الكتاب. سيكون اهتمامنا هنا منصباً على حالة خاصة واحدة فقط تدعى فصل المتغيرات ، ومع أن الاسم يوحي بوجود علاقة بين هذا المفهوم ومفهوم فصل المتغيرات الذي قدمناه في البند (٢ , ١٣) ، إلاّ أنهما مفهومان مختلفان تماماً.

قبل الشروع في مناقشة الجزء الرئيسي في هذا البند ، نقدم بعض الملاحظات على المعادلة (٦ , ١٤). إذا عوّضنا $u = x + ct$ و $v = x - ct$ فيكون بمقدورنا تحويل معادلة الموج إلى معادلة تشبه المعادلة (٤ , ١٤) وهي $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$ وهذا هو فحوى التمرين (٦ , ١٠). وبهذا يكون الحل العام للمعادلة (٦ , ١٤) على الصورة

$$y(x,t) = G(x + ct) + h(x - ct)$$

حيث يمكن إيجاد الدالتين G و h بوضع شروط حدية مناسبة.

إن أفضل وسيلة لفهم طريقة فصل المتغيرات هي من خلال دراسة مثال محدد ، ومثالنا هو:

لتكـن $f(x,y)$ دالـة معرفة على الشريحة $x \geq 0$ و $0 \leq y \leq a$ وتحقق معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad (١٤ , ٧)$$

إذا فرضنا أن $f(x,y) \to 0$ عندما $x \to \infty$ وأنها تحقق الشروط الحدية

$$f(x,0) = f(x,a) = 0$$
$$f(0,y) = sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) + 2\, sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \qquad (١٤ , ٨)$$

فجد حلاً مناسباً لمعادلة لابلاس.

أفضل وسيلة لمحاولة حل هذه المسألة هو رسم المنطقة تحت الدراسة وتعيين الشروط الحدية.[١] الخطوة الأولى في فصل المتغيرات هي محاولة إيجاد حل على الصورة

$$f(x, y) = X(x)Y(y) \qquad (١٤ , ٩)$$

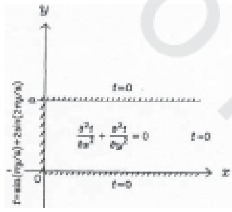
(ومن هنا جاءت التسمية). الملاحظة المهمة هنا أن المعادلة (٩ , ١٤) تخمن لنا أن حل المعادلة (٧ , ١٤) هو حاصل ضرب دالتين مستقلتين $X(x)$ و $Y(y)$ ولكن ليس من المؤكد أن يكون هذا التخمين صائب. (ولذا بدأنا بقولنا: محاولة إيجاد حل وليس افرض أن الحل).

ولرؤية ماإذا كانت الدالة $f(x, y)$ المبينة في المعادلة (٩ , ١٤) هي حل أم لا ، نقوم بالتعويض في المعادلة (٧ , ١٤)[٢] لنحصل على

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

حيث استبدلنا المشتقات الجزئية بمشتقات كلية؛ لأنه من تعريف (٩ , ١٤) نعلم أن X دالة في المتغير x فقط وأن Y دالة في المتغير y فقط. بقسمة طرفي المعادلة أعلاه على XY نحصل على

---

(١)


(٢)
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = Y(y)\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y = Y\frac{dX}{dx}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = X(x)\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_x = Y\frac{dY}{dy}$$

obeikandl.com

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \qquad (١٤,١٠)$$

هنا نلاحظ أن الطرف الأيسر للمعادلة (١٤,١٠) هو دالة في x فقط والطرف الأيمن هو دالة في y فقط ومن ثم فإنهما يتساويان فقط في حالة أنهما مقدار ثابت وليكن ω^2 (سيتوضح سبب هذه التسمية لاحقاً). من ذلك نجد أن المعادلة التفاضلية الجزئية (١٤,٧) تنقسم إلى معادلتين تفاضلتين عاديتين هما

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \omega^2 X \quad \text{و} \quad \frac{d^2Y}{dy^2} = -\omega^2 Y \qquad (١٤,١١)$$

ويمكن حل كل من المعادلتين بالطريقة المقدمة في البند (١٣,٥). أي بوضع $X = Ae^{px}$ و $Y = Be^{qy}$ وهكذا. أو بملاحظة العلاقة بين المعادلتين (١٤,١١) والحركة التوافقية البسيطة. أياً كانت الطريقة المستخدمة فإن المعادلتين (١٤,٩) و (١٤,١١) يؤديان إلى الحل التالي للمعادلة (١٤,٧).

$$f(x,y) = [Ae^{\omega x} + Be^{\omega y}][C\cos(\omega y) + D\sin(\omega y)] \qquad (١٤,١٢)$$

حيث A و B و C و D ثوابت تكاملات.

بعد أن وجدنا الحل للمعادلة التفاضلية الجزئية يبقى علينا استخدام الشروط الحدية لحساب الثوابت. بداية ، لكي يتحقق الشرط $f(x,y) = 0$ عندما $x \to \infty$ فيجب أن يكون $A = 0$ ؛ (لأنه إذا كان $A \neq 0$ فإن f تزداد مع ازدياد x). وبالمثل الشرط $f(x,0) = 0$ يؤدي إلى أن $C = 0$ ؛ (لأنه لو كان $B = 0$ فإننا سنحصل على التناقض $f(x,y) = 0$). الآن ، $f(x,a) = 0$ يعني أن $\sin(\omega a) = 0$ ويكون

$\omega a = n\pi$ حيث n عدد صحيح (القيم المختلفة للعدد n ومن ثم للقيمة ω يعني أن عدد الحلول التي على الصورة (١٢ , ١٤) كبير جداً). من هذا نجد أن الحل العام للمعادلة (٧ , ١٤) يجب أن يكون على الصورة

$$f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) e^{-n\pi x/a} \qquad (١٤ , ١٣)$$

حيث استبدلنا حاصل الضرب $(BD)_n$ بالمعامل E_n وافترضنا ضمنياً أن $A_n = C_n = 0$. إن وجود المجموع في الحل (١٣ , ١٤) يرجع إلى أن حلول المعادلات التفاضلية الجزئية التي نتعامل معها تتمتع بالخاصية التالية: أي تركيب خطي لمجموعة من الحلول هو حل أيضاً.

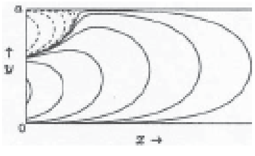
وبمقارنة $f(0,y)$ حداً حداً مع الشرط الحدي في المعادلة (٨ , ١٤) نجد أن $E_1 = 1$ و $E_2 = 2$ و $E_n = 0$ لكل $n \geq 3$ وبهذا يكون الحل العام هو[٣]

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-\pi x/a} + 2\sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) e^{-2\pi x/a} \qquad (١٤ , ١٤)$$

والخطوة الأخيرة تكون بالتحقق من أن الحل (١٤ , ١٤) يحقق المعادلة التفاضلية الجزئية (٧ , ١٤) والشروط الحدية (٨ , ١٤).

يمكن تعميم الطريقة التي قدمناها في المثال أعلاه لحل المعادلة التفاضلية الجزئية القابلة للفصل وذلك بتحويلها إلى معادلات تفاضلية عادية مكافئة. كما أن اختيار

(٣)



obeikandl.com

الثوابت في المعادلتين (١٠ , ١٤) و (١١ , ١٤) والترتيب الذي استخدمنا فيه الشروط الحدية يساعد كثيراً في الحصول على الحل. ولذا فإن رسم المنطقة المبدئي قد ساعد كثيراً في اعطاء فكرة عن سلوك الحل ، إذ بين لنا أن حل المعادلة التفاضلية الجزئية هو دالة خامدة في اتجاه x ومتذبذبة في اتجاه y. أما إذا استخدمنا ثابتاً آخر غير ω^2 فسنحتاج لمعالجات جبرية معقدة تحتوي على جذور تربيعية والعدد التخيلي i. من الأفضل أيضاً استخدام الشرط الحدي الأبسط أولاً ، وعلى الأخص إذا كانت نتيجة هذا الإستخدام حذف بعض الحدود من المعادلة (١٢ , ١٤) ، وترك الشروط الحدية الأكثر صعوبة إلى الآخر.

(٣ , ١٤) أمثلة فيزيائية شائعة

Common Physical Examples

قدمنا في البند (٢ , ١٤) معادلتان تفاضليتان جزئيتان لمسائل فيزيائية ، الأول منهما هي معادلة الموج المقدمة في المعادلة (٦ , ١٤) وهذه لا تحتاج إلى تعليق. أما المعادلة الثانية فهي معادلة لابلاس المقدمة في المعادلة (٧ , ١٤) ، لهذه المعادلة ومعادلة بواسون وهي تعميم لمعادلة لابلاس حيث الطرف الأيمن ليس بالضرورة صفراً ، أهمية خاصة في دراسة الإلكترونات وديناميكا الموائع ومواضيع أخرى. ومعادلة ثالثة شائعة هي معادلة الانتشار التي تصف انتشار الحرارة في المعادن وكيفية توزيع المادة المذابة في محلول الذوبان وما شابه ذلك.

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (١٤ , ١٥)$$

من الممكن تعميم معادلة الموج ذات البعد الواحد (١٤ , ٦) إلى معادلة في الفضاء ثلاثي البعد باستبدال مؤثر التفاضل $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ بالمتجه ∇^2

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad (١٤ , ١٦)$$

حيث

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

وبالمثل، معادلة الانتشار (١٤ , ١٥) تصبح $K\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}$ ومعادلة لابلاس (١٤ , ٧) تُختزل إلى $\nabla^2 f = 0$. فمثلاً ، لحل المعادلة (١٤ , ١٦) باستخدام فصل المتغيرات نحاول إيجاد حل على الصورة $\Psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$ [٤]. إذا كان للمسألة تحت الدراسة تماثل كروي مثل ذرة الهيدروجين كما هو مبين في البند (١٢ , ٣) فيكون من الأفضل استخدام النظام القطبي الكروي عوضاً عن النظام الديكارتي بكتابة $\nabla^2\Psi$ بدلالة r ، θ ، φ (وهذا أكثر صعوبة من النظير الديكارتي بدلالة x ، y ، z) ، أي أننا نحاول إيجاد حل على الصورة $\Psi(r,\theta,\varphi,t) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)T(t)$. لوحظ وجود ارتباط بين هذا الحل ودوال بيسل ، كما لوحظ أيضاً وجود علاقة بينه وبين الحركة التوافقية الكروية. باختيار حدود شرطية مناسبة نستطيع استخلاص العديد من الحالات الخاصة المهمة

(٤) $\nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ (النظام الديكارتي)

$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}$ (النظام القطبي الكروي)

للمعادلة (١٣ , ١٤). كما لوحظ أيضاً أن الترقيم الذي يدل على الحلول المختلفة له علاقة ببعض الأعداد الكمية المستخدمة في فيزياء الذرة.

وأخيراً نلفت انتباه القارئ إلى أن معادلة شرودنغر (لاتعتمد على الزمن) والتي تعتبر معادلة موج وهي أيضاً عبارة عن معادلة قيم مميزة

$$H\Psi = E\Psi \qquad (١٤ , ١٧)$$

حيث مؤثر هاملتون H هو مجموع الطاقات الحركية $-h^2\nabla^2/(8\pi^2 m)$ والكامنة V والثابتة E. أما دوال الموج Ψ التي تحقق المعادلة (١٧ , ١٤) فتدعى الدوال المميزة وتمثل حالات النظام الثابتة والقيم المميزة المقابلة E تبين مستويات الطاقة. في الحقيقة المعادلة (١٧ , ١٤) هي الشكل المتصل للمصفوفة المعرفة في المعادلة (١٧ , ٩).

تمارين

(١ , ١٤) جد $f(x,y)$ للتفاضل التام

$$df = y\cos(xy)\,dx + [x\cos(xy) + 2y]dy$$

(٢ , ١٤) أثبت أن $u(x,t) = exp\,(-x^2/4kt)/\sqrt{4kt}$

حل لمعادلة الانتشار $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

obeikandl.com

(١٤,٣) لنفرض أن

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}+\frac{8\pi^2 mE\Psi}{h^2}=0$$

هي معادلة شرودنغر للإلكترونات الحرة في نظام البعد الثنائي. احسب دوال الموج Ψ ومستوى الطاقة المسموح به E إذا علمت أن $\Psi=0$ عندما $x=0$، $x=a$، $y=0$، $y=b$.

(١٤,٤) معادلة لابلاس في الاحداثيات القطبية (r,θ) هي

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}=0$$

أثبت مستخدماً طريقة فصل المتغيرات وجود حلول على الصورتين

$$\Phi(r,\theta)=(A_o\theta+B_o)(C_o\ln r+D_o)$$

و

$$\Phi(r,\theta)=\left[A_p\cos(p\theta)+B_p\sin(p\theta)\right]\left(C_p r^p+D_p r^{-p}\right)$$

حيث القيم A، B، C، D، p ثابتة. إذا كانت Φ دالة بمتغير واحد فقط θ فبين تأثير ذلك على p. حل المعادلة عندما $0\le r\le a$ في الحالتين

(١) $\Phi(a,\theta)=T\cos\theta$

(٢) $\Phi(a,\theta)=T\cos^3\theta$