الفصل الثاني عشر

التكاملات المتعددة
Multiple Integrals

(١٢ , ١) أمثلة فيزيائية
Physical Examples

في الفصل الخامس من هذا الكتاب استخدمنا التكامل لحساب مساحة منطقة تحت منحنى الدالة $y = f(x)$. ومن دراستنا للمشتقات الجزئية لاحظنا أن العديد من الدوال المهمة في الحياة العملية هي دوال بعدة متغيرات. ولذا فالتكامل المتعدد هو امتداد طبيعي للأفكار السابقة ويستخدم للتعامل مع المسائل التي تحتوي على عدة متغيرات.

دعنا نقدم بعض الأمثلة لتوضيح فكرة التكاملات المتعددة. لنفرض أننا نريد حساب القوة المؤثرة على حائط؛ نتيجة لهبوب عاصفة هوائية. إذا كان الضغط P ثابتاً على المساحة A لأحد وجوه الحائط فتكون القوة المؤثرة تساوي $A \times P$. أما إذا كان الضغط $P(x, y)$ متغيراً فحساب القوة المؤثرة ليس بهذه البساطة ولكن نستطيع حسابها بتقسيم الحائط إلى قطع من المربعات الصغيرة ، مساحة كل منها $\delta x \delta y \delta x \delta y$ ومن ثم تكون القوة الكلية تساوي مجموع جميع الإسهامات $P(x, y)\delta x \delta y$. وعندما $\delta x \to 0$ و $\delta y \to 0$ فإن القوة F تساوي

$$F = \iint_{\text{الحائط}} P(x, y)\delta x \delta y \qquad \text{(القوة)} \qquad (١٢ , ١)$$

حيث التكامل الثنائي يبين مجموع مقادير صغيرة جداً على سطح ثنائي البعد (في اتجاه x و y). وعلاوة على ذلك إذا لم يكن الحائط مستطيلاً (كما هو الحال عادة) فمن الممكن حساب مساحته بصورة مشابهة

$$A = \iint_{\text{الحائط}} dxdy \qquad \text{(مساحة الحائط)} \qquad (١٢,٢)$$

وهذا التكامل الثنائي يُسمى أيضاً تكامل سطحي.

وكمثال آخر من ميكانيكا الكم، حيث مربع القيمة المطلقة للدالة الموجية $|\Psi(x,y,z)|^2$ لإلكترون هي الكثافة الاحتمالية محسوبة عند نقطة معينة في الفضاء. إن احتمال أن يكون الإلكترون في منطقة حجم صغيرة $\delta x\delta y\delta z$ هو $|\Psi(x,y,z)|^2\delta x\delta y\delta z$. وعليه فإن احتمال أن يكون الإلكترون موجوداً في مجال منته V هو

$$P = \iiint_{V} |\Psi(x,y,z)|^2 dxdydz \qquad (١٢,٣)$$

وهذا يُدعى تكامل ثلاثي أو تكامل حجومي.

(١٢,٢) ترتيب التكامل

The Order of Integration

دعنا نوضح كيفية حساب التكاملات المتعددة بمثال بسيط وهو إيجاد قاعدة لحساب مساحة مثلث قائم الزاوية. لتبسيط الحسابات، نفرض أن أحد رؤوس المثلث

هي نقطة الأصل وأن القاعدة تنطبق على محور x وطولها L وأن ارتفاعه يساوي H محدد بالنقطتين $(L,0)$ و (L,H). إذا كانت x نقطة على محور x $(0 \leq x \leq L)$ وأخذنا مجموعة من الشرائح الصغيرة المستطيلة الشكل مساحة كل منها $\delta x \delta y$ ورسمناها بحيث نحصل على شريحة عمودية موازية لمحور y من $y = 0$ إلى $y = \frac{Hx}{L}$ كما هو مبين في الشكل أدناه[1]، ثم حسبنا النهاية عندما $\delta x \to 0$ و $\delta y \to 0$ فتكون مساحة الشريحة العمودية تساوي

$$\int_{y=0}^{y=4x/L} dxdy = dx \int_{y=0}^{y=4x/L} dy$$

حيث أخرجنا dx من التكامل؛ لأنه لايعتمد على y. وعليه تكون مساحة المثلث هي مجموع جميع مساحات الشرائح من $x = 0$ إلى $x = L$. أي أن

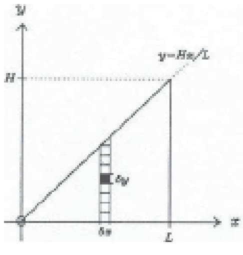
$$A = \int_{x=0}^{x=L} dx \int_{y=0}^{Hx/L} dy \qquad \text{(مساحة المثلث)} \qquad (١٢,٤)$$

حيث يُحسب التكامل الذي على أقصى اليمين أولاً (هذا اتفاق عام). وبذلك نخلص إلى أن

$$A = \int_0^L [y]_0^{Hx/L} dx = \frac{H}{L}\int_0^L xdx = \frac{H}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{1}{2}HL$$

---

(١)



من الممكن أن يعتقد القارئ أننا بذلنا جهداً كبيراً لإيجاد صيغة لمساحة المثلث المعروفة ، ولكن هذه الطريقة تكون مفيدة جداً في الأشكال الأكثر تعقيداً أو للتكاملات من نمط المعادلة (١ , ١٢) التي تكون فيها الدالة $P(x,y)$ غير منتظمة.[٢]

لاحظ أنه كان بامكاننا ايجاد المساحة بجعل الشريحة أفقية (موازية لمحور x) من $x = \frac{Ly}{H}$ إلى $x = L$ كما هو مبين بالشكل أدناه.[٣] وبعد ايجاد مجموع جميع الشرائح الأفقية من $y = 0$ إلى $y = H$ نحصل على

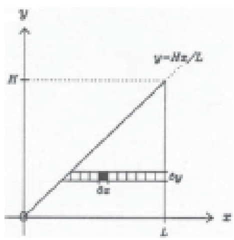
$$A = \int_{y=0}^{y=H} dy \int_{x=\frac{Ly}{H}}^{x=L} dx$$ (مساحة المثلث) (١٢ , ٥)

وباجراء التكامل بالنسبة إلى x أولاً ومن ثم بالنسبة إلى y نحصل مرة أخرى على النتيجة المتوقعة

$$A = \int_0^H [x]_{\frac{Ly}{H}}^{L} dy = L \int_0^H \left(1 - \frac{y}{H}\right) dy = L \left[y - \frac{y^2}{2H}\right]_0^H = \frac{1}{2}HL$$

---

(٢)
$$\int_{y=0}^{y=\pi/2} cos(xy)\, dy = \left[\frac{1}{x} sin(xy)\right]_{y=0}^{y=\pi/2} = \frac{1}{2} sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

(٣)


يتضح مما سبق أن الترتيب ليس مهماً لحساب التكاملات ، ولذا من الممكن إجراء التكامل بالنسبة إلى y أولاً ثم إلى x أو العكس مع الحرص على تغيير حدود التكامل لتتناسب مع ذلك. فمثلاً ، حدود تكامل x في المعادلة (١٢,٤) هو من $x = 0$ إلى $x = L$ وهذه الحدود تغيرت من $x = Ly/H$ إلى $x = L$ في المعادلة (١٢,٥). إن أفضل طريقة للتأكد من حصولنا على الحدود المناسبة تكون برسم المنطقة تحت الدراسة.

على الرغم من أن الترتيب الذي يجري به التكامل ليس مهماً ، إلاّ أنه ينصح عادة بحساب التكامل السهل أولاً وحساب التكامل الأصعب بعد ذلك.

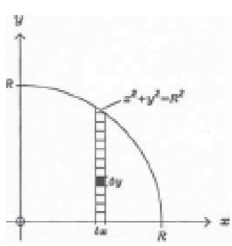
(١٢,٣) اختيار الإحداثيات

Choice of Coordinates

بعد حسابنا لمساحة المثلث في البند (١٢,٢) ، دعنا نقوم بحساب مساحة الدائرة في هذا البند. من خاصية التماثل ، يكفي أن نحسب مساحة المنطقة $x^2 + y^2 \leq R$ في الربع الأول والتي تمثل ربع مساحة الدائرة. وبحساب التكامل بالنسبة إلى y أولاً ومن ثم بالنسبة إلى x[٤] نجد أن مساحة الدائرة هي

$$A = 4 \int_{x=0}^{x=R} dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} dy \qquad \text{(مساحة الدائرة)} \qquad (١٢,٦)$$

(٤)



التكامل بالنسبة إلى y سهل وقيمته $\sqrt{R^2 - x^2}$ ولكن التكامل الآخر بالنسبة إلى x ليس بهذه السهولة حيث نحتاج لحسابه التعويض $x = R \sin\theta$. إذا عكسنا ترتيب التكامل فإننا سنواجه الصعوبة نفسها. ولكن لو انتقلنا من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية فإننا سنحصل على تكامل في متغيرين θ و r أسهل من السابق. بملاحظة أننا نحسب المساحة بجمع مساحات صغيرة فإننا نجد أن مساحة المستطيل الصغير في الإحداثيات القطبية يساوي $\delta r(r\delta\theta)$ حيث θ مقاسة بالراديان.(٥) ولذا فإن مساحة الشريحة هي

$$dxdy = rdrd\theta \qquad (١٢,٧)$$

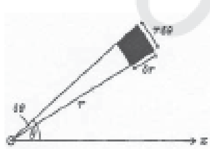
وعليه فالمعادلة القطبية المقابلة للمعادلة (٦ ,١٢) هي

$$A = 4\int_{r=0}^{r=R} rdr \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} d\theta \qquad \text{(مساحة الدائرة)} \qquad (١٢,٨)$$

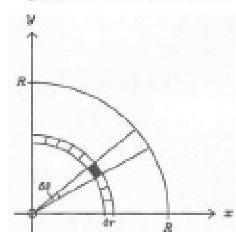
حيث حدود θ من 0 إلى $\frac{\pi}{2}$ وحدود r من 0 إلى R (للمنطقة الواقعة في الربع الأول). حصلنا على مساحة المنطقة في المعادلة (١٢,٨) بتقسيم الدائرة إلى شرائح بنصف قطر ثابت ثم قمنا بجمعها من مركز الدائرة إلى محيطها.(٦) الآن نستطيع

---

(٥)



(٦)



حساب التكامل في المعادلة (١٢,٨) بسهولة لنحصل على الصيغة المألوفة لمساحة الدائرة وهي πR^2.

يوضح لنا المثال السابق أن تحويل التكامل الثنائي إلى نظام إحداثيات يلائم الشكل الهندسي للمسألة يُسّهل من حسابه (وفي الحقيقة إن هذا ينطبق على المسائل الرياضية الأخرى).

على الرغم من أننا اقتصرنا نقاشنا على التكامل الثنائي إلا أن التعميم إلى تكاملات ثلاثية أو أكثر مسألة مباشرة حيث نستطيع حساب التكامل بأي ترتيب نشاء واستخدام أي نظام إحداثي مناسب ، فالنظام الديكارتي ملائماً للمسائل التي لها صفات مستطيلة والنظام الأسطواني يصلح لمسائل أسطوانية والنظام الكروي يصلح لمسائل كروية.عند تحويل تكامل متعدد من نظام إلى آخر يكون من المهم التأكد من حصولنا على حدود صحيحة للتكاملات وكذلك مساحات (أو حجوم) صحيحة لشرائح المناطق الصغيرة وأبسط طريقة لإنجاز ذلك هو رسم المنطقة كما فعلنا للإحداثيات القطبية ، ومن الممكن أيضاً حساب ذلك باستخدام مايسمى محدد جاكوبي

$$d^M Vol = dx_1 dx_2 \cdots dx_M = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial X_M} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial X_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_M}{\partial X_1} & \frac{\partial x_M}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial x_M}{\partial X_M} \end{vmatrix} dX_1 dX_2 \cdots dX_M \qquad (١٢,٩)$$

حيث M هو بعد الحجم ($M = 2$ للمساحة) والمتغيرات المكتوبة بالحروف الصغيرة x تمثل الإحداثيات الديكارتية ($x_1 = x$ ، $x_2 = y$ ، $x_3 = z$ وهكذا)

والمتغيرات المكتوبة بالحروف الكبيرة X تمثل الإحداثيات في النظام الجديد ($X_1 = r$ ، $X_2 = \theta$ وهكذا).[٧]

على سبيل المثال، بتحويل النظام الثنائي البعد الديكارتي إلى النظام القطبي يكون $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ ، ومن ثم فإن المعادلة (٩ , ١٢) تعطينا محدد جاكوبي للمتغير r ومن ثم نحصل على المعادلة (٧ , ١٢).

نستطيع الآن استخدام التكاملات المتعددة لحساب تكامل دالة جاوس الذي تعذر علينا حسابه في الفصل الخامس

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \qquad (١٢ , ١٠)$$

الخطوة الأولى هي تربيع التكامل I لنحصل على

$$I^2 = \int_{x=0}^{x=\infty}\int_{y=0}^{y=\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \qquad (١٢ , ١١)$$

حيث قمنا بضرب المعادلة (١٠ , ١٢) بنفسها مع استخدام متغير y عوضاً عن x . وبالتحويل إلى الإحداثيات القطبية تصبح المعادلة (١١ , ١٢)

$$I^2 = \int_{r=0}^{r=\infty} re^{-r^2}\,dr \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} d\theta$$

---

(٧) $d^3\,Vol = dxdydz$ للإحداثيات الديكارتية

$= rdrd\theta dz$ للإحداثيات الأسطوانية

$= r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi$ للإحداثيات الكروية

حيث الحدود هي حدود الربع الأول. الآن ، بحساب التكامل نجد أن $I^2 = \frac{\pi}{4}$.
وبهذا يكون $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. وبالأسلوب نفسه يمكن إثبات أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2}\, dx = \sigma\sqrt{2\pi}$$

تمارين

(١٢,١) أثبت أن مساحة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ تساوي πab.

(١٢,٢) برسم بيان مناسب ، أثبت أن حجم شريحة في النظام القطبي الكروي هو $r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi$ ثم استنتج صيغة لحجم الكرة.

(١٢,٣) أثبت باستخدام النظام القطبي الأسطواني أن حجم الجسم الناتج عن دوران المنحنى $y = f(x)$ من $x = a$ إلى $x = b$ حول محور السينات دورة كاملة يساوي

$$\pi \int_a^b y^2 dx$$

(١٢,٤) احسب التكامل الثنائي $\iint x^2(1-x^2-y^2)\, dxdy$

على دائرة نصف قطرها 1 ومركزها نقطة الأصل (دائرة الوحدة) مستخدماً

(١) النظام الديكارتي (٢) النظام القطبي