الفصل الحادي عشر

التكاملات الخطية

Line Integrals

(١١,١) التكاملات الخطية

Line Integrals

نقدم في هذا الفصل موضوع التكاملات الخطية. لتوضيح ماهيتها نعتبر المثال البسيط التالي لقانون من مادة فيزياء المرحلة الثانوية

الشغل المبذول = القوة×المسافة

كما بينا في الفصل الثامن فإن القوة والمسافة المقطوعة كميات متجهة وعليه فإن الزمن هو ضرب قياسي. الآن ، إذا كانت القوة متغيرة أو كانت الحركة غير مستقيمة فإننا نحصل على القوة كمجموع للعديد من الاسهامات الأساسية الصغيرة.

$$W = \int_{\text{مسار}} \vec{F}.d\vec{l} \qquad (١١,١)$$

حيث W هو الشغل المبذول و $\vec{F}$ هو مجال القوة الاتجاهي و $d\vec{l}$ قطعة صغيرة من خط مستقيم مع اعتبار أن الحركة الكلية يحددها مسار معين.

إذا كانت الحركة في مستوى ثنائي البعد وكانت $\vec{F} = (F_x, F_y)$ و $\vec{d}l = (d_x, d_y)$ فالشغل المبذول هو

$$W = \int_{\text{المسار}} F_x dx + F_y dy \qquad (١١,٢)$$

ويمكن كتابة التكامل كمجموع تكاملين أحدهما بالنسبة للمتغير x والآخر بالنسبة للمتغير y مع ملاحظة إمكانية أن تكون كل من احداثيات القوة F_x و F_y دالة في المتغيرين x و y.

أما المسار فعادة ما يكون من نقطة A احداثياتها (x_A, y_A) إلى نقطة B احداثياتها (x_B, y_B) بمحاذاة الاسقاط المعرف بالمنحنى $y = f(x)$. وحساب التكامل في المعادلة (١١,٢) يتم عادة بكتابة المتغير y بدلالة x ثم إجراء عملية التكامل بالنسبة إلى المتغير x

$$\int_{\text{المسار}} F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy = \int_{x_A}^{x_B} [F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) f'(x)] dx$$

حيث استخدمنا $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ للتعويض عن dy بالمقدار $f'(x)dx$. وبالتأكيد (إذا كان ذلك مناسباً) فإننا نستطيع إجراء التكامل بالنسبة إلى y عوضاً عن x.

وكمثال توضيحي ، دعنا نحسب تكامل $y^3 dx + x dy$ من $(0,0)$ إلى $(1,1)$ لمسارين مختلفين

(١) $y = x^2$

(٢) المستقيمان من $(0,0)$ إلى $(1,0)$ و من $(1,0)$ إلى $(1,1)$.

للمسار (١) ، لدينا $y = x^2$ و $dy = 2xdx$. وعليه يكون

$$\int_{(i)\text{مسار}} y^3dx + xdy = \int_0^1 (x^6 + 2x^2)\,dx = \left[\frac{1}{7}x^7 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{17}{21}$$

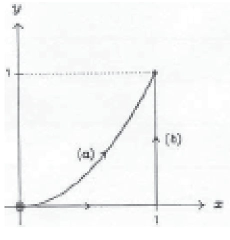
وللمسار (٢) ، لدينا $y = 0$ ، $dy = 0$ من $(0,0)$ إلى $(1,0)$ و $x = 1$ ، $dx = 0$ من $(1,0)$ إلى $(1,1)$. وبهذا يكون

$$\int_{(ii)\text{مسار}} y^3dx + xdy = \int_0^1 dy = [y]_0^1 = 1 \neq \frac{17}{21}$$

ونستنتج من ذلك أن التكامل الخطي يعتمد على المسار المُعطى[1] ، والاستثناء الوحيد هو أن تكون الدالة المُكاملة تفاضلاً تاماً (وهو ما سنناقشه في البند (٢ , ١١)) وفي هذه الحالة نستطيع تبسيط الحسابات باستبدال مسار معقد بمسار بسيط.

توجد صيغة أُخرى للتكامل الخطي تُستخدم عادة عندما تكون الكميات المعطاه هي كميات قياسية

(١)



$$\mathrm{I} = \int_{\text{مسار}} F(x,y)dl \qquad (١١,٣)$$

حيث التكامل يكون بالنسبة إلى طول القوس dl على المُنحنى $y = f(x)$. من الممكن أن يكون المسار أيضاً بدلالة معادلات وسيطية مثل $x = g(t)$ و $y = h(t)$. وحساب التكامل الخطي (٣ , ١١) يتم بصورة مشابهة لحساب التكامل الخطي (٢ , ١١) مع الأخذ بعين الاعتبار أن العلاقة بين dl و dx أو dt تكون على الصورة

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{أو} \quad dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (١١,٤)$$

وهذا مُبَرَر باستخدام مبرهنة فيثاغورس حيث $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. على سبيل المثال ، إذا كان $y = x^2$ فإن $dl = \sqrt{1+4x^2}dx$. وواضح أيضاً أن $F(x,y)$ يُعبر عنها بالصيغة $F(x,f(x))$ أو $F(g(t),h(t))$ ويعتمد ذلك على الصيغة المستخدمة لحساب التكامل الخطي.

(٢ , ١١) التفاضلات التامة

Exact Differentials

في بعض الأحيان نحتاج للتعامل مع العبارة $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ حيث كل من P و Q دالة في متغيرين x و y والسؤال هنا ، هل هذه العبارة هي صيغة للزيادة df لدالة $f(x,y)$ ؟ إذا كانت الإجابة بنعم فنقول إن $Pdx + Qdy$ هو

تفاضل تام. لإيجاد $f(x,y)$ (في حالة كون العبارة تفاضل تام) نقوم بمقارنة الصيغة مع المعادلة (٦ , ١٠) لنجد أن

$$P(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \quad \text{و} \quad Q(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \qquad (١١ , ٥)$$

ومع أن هذه الصيغة صحيحة، إلا أننا لا نستطيع استخدامها لمعرفة $f(x,y)$ وعوضاً عن ذلك نستطيع الحصول على اختبار للتفاضل التام باستخدام المعادلتين (٥ , ١٠) و (٥ , ١١) فنخلص إلى أن العبارة $Pdx + Qdy$ تفاضل تام[٢] إذا وفقط إذا كان

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_y \qquad (١١ , ٦)$$

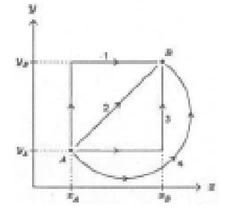
فعلى سبيل المثال، $3xy^2dx + 3x^2ydy$ تفاضل تام ولكن $cosydx + sinxdy$ ليس تفاضلاً تاماً.

لماذا هذا الاهتمام بالتفاضلات التامة ؟ للاجابة على هذا السؤال دعنا نجد تكامل $Pdx + Qdy$ من النقطة A التي احداثياتها (x_A, y_A) إلى النقطة B التي احداثياتها (x_B, y_B). فإذا كانت $df = Pdx + Qdy$ فنجد[٣]

---

(٢) $$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

(٣)



$$\int_{A}^{B} Pdx + Qdy = \int_{A}^{B} df = f(x,y)\Big|_{B}^{A} = f(x_B, y_B) - f(x_A, y_A)$$

وبهذا فإن التكامل يعتمد فقط على بداية المسار ونهايته ولا يعتمد على المسار نفسه. أما إذا لم تكن العبارة تفاضلاً تاماً فإننا بحاجة إلى معرفة مسار التكامل وهذا بدوره يؤدي إلى تقييد عملية التكامل.

أما من الناحية التطبيقية فإن التفاضل التام يرتبط مع القُوى ودوال الحالة. فمثلاً، تعتمد طاقة الجاذبية الكامنة على الفرق في ارتفاعها فقط ولا تعتمد على أي خاصية أُخرى لحركتها. وبالمثل، في ديناميكا الحرارة، تعتمد قيمة دالة الحالة على حالة النظام فقط (درجة الحرارة أو الضغط أو الحجم...إلخ) وليس على طريقة الوصول إلى تلك الحالة.

تمارين

(١١, ١) أثبت أن تكامل $y^3dx + 3xy^3dy$ لا يعتمد على المسار وذلك بحسابه للمسارين (١) و (٢) المستخدمين في مثال البند (١١, ١).

(١١, ٢) احسب تكامل $xydl$ للمسارين (١) و (٢) المستخدمين في مثال البند (١١, ١).

(١١, ٣) إذا كان C_V لا يعتمد على الحجم V فأثبت أن $\delta q = C_V dT + \left(\frac{RT}{V}\right) dV$ ليس تفاضلاً تاماً (حيث R ثابت). وإذا قسمنا طرفي المعادلة على T أصبح تفاضلاً تاماً. علق على أهمية ذلك في ديناميكا الحرارة.