الفصل العاشر

التفاضل الجزئي
Partial Differentiation

(١٠ , ١) تعريف ومتجه الميل
Definition & the gradient Vector

قدمنا في الفصل الرابع معدل تغير كمية واحدة بالنسبة إلى كمية أخرى ، ولكن في العديد من الظواهر الطبيعية نجد أن معظم المسائل تعتمد على عدة متغيرات ، على سبيل المثال، تعتمد الطاقة الداخلية للغاز في ديناميكيا الحرارة على درجة الحرارة والضغط والحجم. ولدراسة مثل هذه الظواهر نحتاج إلى تعميم الاشتقاق الاعتيادي إلى مايسمى بالاشتقاق الجزئي.

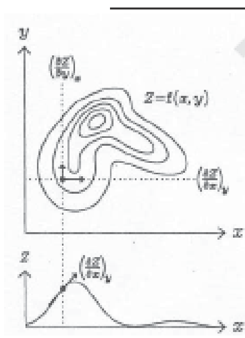
لفهم هذا التعميم بوضوح ولتجنب العمليات الجبرية العديدة نركز اهتمامنا على الحالة التي يعتمد فيها متغير z على متغيرين فقط هما x و y .أي أن $z = f(x,y)$. من الممكن تفسير هذا الوضع باعتبار أن z يمثل ارتفاع وأن x و y هما احداثيا نقطة في الفضاء ثنائي البعد. إن التوضيح الطوبوغرافي لهذا الوضع يتطلب قدرة فنية عالية وعوضاً عن ذلك سنوضح الفكرة باستخدام خرائط كانتورية كما هو الحال في أطالس الجغرافيا حيث يتم تمثيل الهضاب والأودية بواسطة سلسلة من الخطوط تربط بين المناطق المتساوية الارتفاع.

والسؤال المهم هنا هو كيفية تعريف الميل عند نقطة (x,y) ؟ إحدى الطرق المستخدمة هي القيام بتقسيم المسألة إلى قسمين بحيث نستطيع تطبيق التحليل المستخدم في الفصل الرابع على هذين القسمين كل على حدة. إن هذا يعني قيامنا بتقسيم السطح z إلى شريحتين إحداهما باتجاه محور x والأخرى باتجاه محور y وبهذا نحصل على مقطعين ، الأول هو z بدلالة x (مع تثبيت y) والآخر هو z بدلالة y (مع تثبيت x) ومن ثم نستطيع توضيح ذلك برسم اعتيادي. يُسمى الميلان اللذان نحصل عليهما بهذه الطريقة ، الإشتقاق الجزئي؛ لأن كل منهما يزودنا بجزء من المعلومات عن الميل. يرمز للمشتقات الجزئية بالرمز $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$ و $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ حيث دليل الرمز هو المتغير الذي قمنا بتثبيته.(١)

التعريف الرياضي للمشتقات الجزئية هو

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\delta x,y)-f(x,y)}{\delta x}\right]$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = \lim_{\delta y \to 0}\left[\frac{f(x,y+\delta y)-f(x,y)}{\delta y}\right] \qquad (١٠,١)$$

(١)



هذه الصيغة هي تعميم مناسب للمعادلة (١ , ٤). ومع أن المعادلة (١ , ١٠) توحي باستخدام المبادئ الأساسية لإيجاد المشتقات الجزئية ، إلاّ أننا لسنا بحاجة إلى ذلك حيث نستطيع إيجاد المشتقات الجزئية للدالة $z = f(x,y)$ باستخدام قواعد اشتقاق الفصل الرابع مع اعتبار أن المتغير y ثابت عند حساب $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ وأن x ثابت عند حساب $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$. على سبيل المثال ، إذا كان $z = 3x^2 + y^3$ فإن $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 6x$ وأن $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 3y^2$ وهذا يتفق تماماً مع النتيجة التي نحصل عليها باستخدام المعادلة (١ , ١٠)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{3(x+\delta x)^2 + y^3 - (3x^2 + y^3)}{\delta x}\right] = \lim_{\delta x \to 0}[6x + 3\delta x] = 6x$$

وبالمثل للمشتقة الأخرى.

في الحياة العملية ، إذا فرضنا وقوفنا على طرف هضبة ، ففي هذه الحالة لايكون اهتمامنا منصباً على الميل المحلي ولكن على الإتجاه الأكثر انحداراً. يمكن التعبير عن ذلك بما يُسمى متجه الميل ∇z المعرف على النحو التالي

$$\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad (١٠ , ٢)$$

حيث تجاهلنا الدليل على اعتبار أنه مفهوم من السياق. ولذا فإن الكميتين في المعادلة (١ , ١٠) هما الإحداثيان x و y للمتجه ∇z الذي يدل اتجاهه على المسار الأكثر انحداراً (أو أكبر تغير في z) والذي يكون ميله هو طول هذا المتجه. وبما أن معادلة متجه الميل في المعادلة (٢ , ١٠) ثنائية البعد فأفضل طريقة لتوضيحها

هو اعتبارها قوس على الخريطة الكنتورية حيث نعتبر جميع نقاط هذا القوس لها الإرتفاع نفسه (أي أن البعد z ثابتاً) وهذا يعني أن ∇z عمودياً على خطوط الكانتور.(٢)

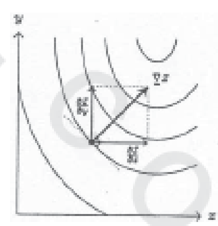
من الممكن تعميم الاشتقاق الجزئي إلى أي عدد من المتغيرات. على سبيل المثال، إذا كان لدينا دالة $\Phi = f(x,y,z)$ بثلاثة متغيرات فنجد أن متجه الميل هو

$$\nabla\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) \qquad (١٠,٣)$$

حيث تجاهلنا الدليل في المشتقات الجزئية على اعتبار وضوحه من السياق. ولذا فإن $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ هو المشتقة الجزئية $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{yz}$ بالنسبة للمتغير x على اعتبار أن y و z ثابتان وأن $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ هي $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{xz}$ وهكذا.(٣) لاحظ أن الخطوط الكنتورية يتم استبدالها في هذه الحالة بسطوح ثلاثية البعد وذلك باعتبار أن Φ ثابت. ويكون متجه الميل عند النقطة

---

(٢)



(٣) إذا كانت $\Phi = 3x^2 + y^3 \sin x + \ln z$ فإن

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{yz} = 6x + y^3 \cos x$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{xz} = 3y^2 \sin x$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{xy} = \frac{1}{z}$$

(x,y,z) هو العمود على السطح الكنتوري المحلي واتجاهه يمثل مسار أسرع تغير في Φ ويكون طول $\nabla\Phi$ هو معدل أكبر تغير.

(٢ , ١٠) المشتقات الثانية والعليا

Second & Higher Derivatives

كما هو الحال في المشتقات الاعتيادية التي درسناها في البند (٢ , ٤) نستطيع حساب المشتقات الثانية والعليا الجزئية للدوال بمتغيرين فأكثر. وعليه، في الحالة $z = f(x,y)$ نجد أن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \qquad (١٠ , ٤)$$

حيث $\frac{\partial}{\partial x}$ مؤثر التفاضل "للتغير بالنسبة إلى x مع بقاء y ثابت". وبالمثل $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$. وتوجد أيضاً مشتقتان جزئيتان أخريتان وهما متساويتان (بتجاهل بعض التقنيات)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \qquad (١٠ , ٥)$$

ونرمز لكل منهما بالرمز $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. العلاقة (٥ , ١٠) من أهم العلاقات وهي أساس لإثبات العديد من النتائج المهمة.(٤)

(٣ , ١٠) الزيادات وقاعدة السلسلة

Increments & Chain Rule

إذا كانت $z = f(x,y)$ فما هو مقدار التغير في الدالة f الذي ينتج عن تغير صغير بالمتغيرين x و y ؟ للإجابة عن هذا السؤال لاحظ أن طول متجه الميل هو مقدار التغير في z باتجاه أكثر انحداراً وأن التغير الصغير δz في المتغير z ينتج عن تغير صغير في المستوى xy ، ومن ثم نستطيع ايجاده بالضرب القياسي للمتجه ∇z مع متجه المسار $(\delta x, \delta y)$. أي أن

$$\delta z \approx \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \delta y \qquad (١٠ , ٦)$$

ونحصل على المساواة عندما $\delta x \to 0$ و $\delta y \to 0$. من السهل تعميم المعادلة (٦ , ١٠) إلى ثلاثة متغيرات أو أكثر ، فإذا كانت $\Phi = f(x,y,z)$ فإن

$$\delta \Phi \approx \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{yz} \delta x + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{xz} \delta y + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{xy} \delta z \qquad (١٠ , ٧)$$

(٤) إذا كانت $\Phi = 3x^2 + y^3 \sin x + \ln z$ فإن

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 6 - y^3 \sin x$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 6y \sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3y^2 \cos x$$

وهكذا.

تُعَد صيغ الزيادات كالمعادلتين (٦ , ١٠) و (٧ , ١٠) من الصيغ المهمة لأنها تؤدي إلى معرفة العلاقات بين التفاضلات المختلفة. فعلى سبيل المثال، إذا قسمنا طرفي المعادلة (٦ , ١٠) على المقدار δu حيث u هي x أو y أو z أو أي مقدار آخر فنحصل على

$$\frac{\delta z}{\delta u} \approx \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \frac{\delta x}{\delta u} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \frac{\delta y}{\delta u}$$

وبأخذ النهاية عندما $\delta u \to 0$ نحصل على

$$\frac{dz}{du} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \frac{dx}{du} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \frac{dy}{du} \qquad (١٠ , ٨)$$

ومن الممكن محاكاة ذلك بتثبيت v لنحصل على

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v \qquad (١٠ , ٩)$$

وإذا وضعنا $u = z$ و $v = y$ فنحصل من المعادلة (٩ , ١٠) بعد معالجة جبرية بسيطة على

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{(\partial x/\partial z)_y} \qquad (١٠ , ١٠)$$

لأن $\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)_y = 1$ وأن $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_y = 0$. وبصورة مشابهة ، إذا وضعنا $u = x$ و $v = x$ فنحصل على

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = -1 \qquad (١٠ , ١١)$$

على الرغم من أننا حصلنا على المعادلتين (١٠ , ١٠) و (١٠ , ١١) من المعادلة (١٠ , ٩) فإن ذلك لايقلل من أهمية المعادلة (١٠ , ٨). فهذه المعادلة تبين لنا العلاقة بين المشتقات الكلية والمشتقات الجزئية ، فإذا كانت $z = f(x,y)$ وكان كل من x و y دالة في t (ليكن الزمن) فإننا نستطيع استخدام المعادلة (١٠ , ٨) لحساب $\frac{dz}{dt}$ (بوضع $u = t$) وخاصة عندما يصعب علينا إيجاد $z = f(t)$ بالتعويض المباشر عن x و y.

ومن الاستخدامات الأخرى لقاعدة السلسلة المقدمة بالمعادلة (١٠ , ٩) هو تغيير المتغيرات في الصيغ التي تحتوي على مشتقات جزئية. فعند الإنتقال من الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية باستخدام التحويل $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ وبوضع $u = r$ و $v = \theta$ في المعادلة (١٠ , ٩) نحصل على العلاقة

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_\theta = \cos\theta \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \sin\theta \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \qquad (١٠ , ١٢)$$

وتعويض $u = \theta$ و $v = r$ يعطينا المشتقة $\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_r$ بدلالة $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ و $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$.[٥]

---

(٥) $$\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_r = -r\sin\theta \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + r\cos\theta \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

يجب علينا توخي الحذر عند قيامنا بحساب المشتقات العليا والتذكر دائماً كيفية تعريفها

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r_\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_\theta = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r_\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \sin\theta \frac{\partial}{\partial r_\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

حيث استخدمنا ضمنياً قاعدة الضرب للاشتقاق مرتان بالطرف الأيمن. لاحظ أن تبرير وجود الحدين $\frac{\partial}{\partial r_\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ و $\frac{\partial}{\partial r_\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$ يكون بكتابة مؤثر الاشتقاق $\frac{\partial}{\partial r_\theta}$ باستخدام المعادلة (١٢ , ١٠) على الصورة

$$\frac{\partial}{\partial r_\theta} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x_y} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y_x}$$

مع ملاحظة السماح لنا باستخدام قواعد الجبر الإعتيادية ومن ثم نجعله يؤثر على الكمية التي على يمينه.(٦)

أخيراً ، ننبه القارئ أنه يمكن استخدام الإشتقاق الضمني عوضاً عن قواعد السلسلة المبينة أعلاه. فمثلاً ، إن أسهل طريقة لإيجاد الإشتقاق الجزئي $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$ للدالة $z^2 = x^2 y + ln(y)$ يكون بتطبيق المؤثر $\frac{\partial}{\partial x_z}$ على طرفي المعادلة لنحصل على

$$2z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_z = x^3\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z + 3x^2 y\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)_z + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$$

---

(٦) $\frac{\partial}{\partial r_\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \cos\theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sin\theta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

وبملاحظة أن $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_z = 0$ و $\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)_z = 1$ نجد بعد إجراء بعض العمليات الجبرية أن $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = \frac{-3x^2y^2}{x^3y+1}$. ومن الممكن الحصول على النتيجة نفسها من $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ و $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$ واستخدام المعادلتين (١٠ , ١٠) و (١١ , ١٠).

(٤ , ١٠) متسلسلة تايلور

Taylor Series

ناقشنا في الفصل السادس متسلسلة تايلور لتقريب بيان منحنى $y = f(x)$ محلياً بواسطة كثيرة حدود درجتها صغيرة، من الممكن تعميم ذلك إلى دوال في متغيرين فأكثر. في الحقيقة، تمثل المعادلة (٦ , ١٠) النشر من الدرجة الأولى للدالة $z = f(x,y)$ وهو

$$f(x,y) = f(x_o,y_o) + (x - x_o)\frac{\partial f}{\partial x}\bigg]_{x_o,y_o} + (y - y_o)\frac{\partial f}{\partial y}\bigg]_{x_o,y_o} + \cdots$$

حيث المشتقات الجزئية محسوبة عند النقطة (x_o,y_o). إن ذلك يقابل تقريب مسطح ثنائي البعد بسطح مستوى مائل حول نقطة معطاة. وتقريب أفضل للدالة يكون بإضافة الحدود المحتوية على المشتقة الثانية الجزئية وهي

$$\frac{1}{2}\left[(x - x_o)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{x_o y_o} + 2(x - x_o)(y - y_o)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\bigg|_{x_o y_o} + (y - y_o)^2\frac{\partial^2{}_2 f}{\partial y^2}\bigg|_{x_o y_o}\right]$$

وهذه تساهم بمجسم قطع مكافئ إلى التقريب. عادة يكتفي بهذا المقدار من التقريب، لأن الحدود التي تحتوي على مشتقات جزئية بدرجات عليا نادرة الاستخدام وذلك لتعقد حسابها.

أفضل طريقة لتعميم متسلسلة تايلور للدوال التي تحتوي على أكثر من متغيرين، هي الطريقة التي يستخدم فيها الترميز المصفوفي المتجهي

$$f(x) = f(x_o) + (x - x_o)^T \nabla f(x_o) + \frac{1}{2}(x - x_o)^T \nabla\nabla f(x_o)(x - x_o) + \cdots$$

حيث إحداثيات مصفوفة العمود x هي $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ و $\nabla f(x_o)$ هو متجه الميل ذو البعد N محسوباً عند النقطة x_o و $\nabla\nabla f(x_o)$ المصفوفة من الدرجة $N \times N$ التي يكون عنصرها في الموقع ij هو المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_i}$ محسوبة عند النقطة x_o.

(١٠ , ٥) القيم العظمى والصغرى

Maxima & Minima

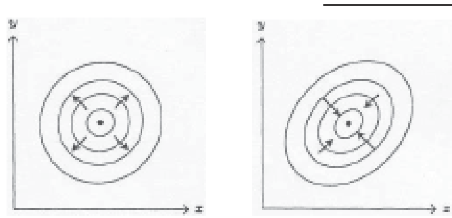
ناقشنا في البند (٦ , ٤) مفهومي القيم العظمى والقيم الصغرى لمنحنى الدالة $y = f(x)$. نعمم هنا هذان المفهومان للدوال في عدة متغيرات. كانت الفكرة الأساسية للمعادلة (١٤ , ٤) هي عدم وجود ميل للمنحنى عند النقاط الحرجة ويمكن تعميم ذلك بسهولة على النحو التالي

$$\nabla f = 0 \qquad (١٠ , ١٣)$$

والفرق بين التعريفين هو أن التعميم يحتاج للتعامل مع متجه الميل عوضاً عن مشتقة واحدة. الآن $\nabla f = 0$ إذا وفقط إذا كان $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ لكل $i = 1, 2, \cdots, N$.[٧]

---

(٧)



وفي الحالة التي تكون فيها $z = f(x,y)$ نجد أن

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 0 \quad و \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 0 \qquad (١٠,١٤)$$

وأفضل طريقة لضمان حصولنا على جميع الحلول (x,y) للمعادلة (١٠,١٤) تكون بتحليل المشتقات تحليلاً كاملاً (إن أمكن ذلك).

لتوضيح استخدام المعادلة (١٠,١٤) دعنا نأخذ الدالة $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$. تحدث النقاط الحرجة عندما يكون $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 2x(y^2-1) = 0$ و $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 2y(x^2-1) = 0$.

ولكن $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 0$ عندما $x = 0$ أو $y = \pm 1$ و $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 0$ عندما $y = 0$ أو $x \pm 1$. وبهذا تكون النقاط الحرجة هي $(0,0)$، $(1,1)$، $(1,-1)$، $(-1,1)$، $(-1,-1)$.

بعد أن وجدنا النقاط الحرجة للدالة بتوظيف المعادلة (١٣ , ١٠) ، تكون الخطوة التالية هي تحديد ماهيتها. قمنا بإنجاز ذلك في البند (٦ , ٤) بدراسة إشارة $\frac{d^2y}{dx^2}$. إن الوضع أكثر تعقيداً للدوال في عدة متغيرات، وذلك لوجود عدد كبير من المشتقات الجزئية الثانية. ولكن النقاش المقدم عند دراستنا لمتسلسلة تايلور في البند (٤ , ١٠) يقترح علينا البحث عن خصائص المصفوفة $\nabla\nabla f$ حيث اسهام مجسم القطع المكافئ والذي يكافئ حدود الدرجة الثانية في المتسلسلة يؤدي إلى قيمة عظمى عندما تكون جميع القيم المميزة للمصفوفة $\nabla\nabla f$ (محسوبة عند نقطة حرجة) سالبة وإذا كانت إشارات جميع القيم المميزة موجبة فالنقطة الحرجة تكون صغرى ، وأخيراً إذا كانت إشارات القيم المميزة مخلوطة (بعضها سالب وبعضها موجب) فالنقطة الحرجة هي نقطة سرجية حيث تكون الدالة تزايدية في اتجاهات معينة وتناقصية في اتجاهات أُخرى.

لاحظ أننا لانحتاج لحساب القيم المميزة للمصفوفة $\nabla\nabla z$[٨] من الدرجة 2×2 للدالة $z = f(x, y)$ ، لأننا عوضاً عن ذلك نستطيع الاستفادة من حقيقة كون حاصل ضرب القيمتين المميزتين $\lambda_1\lambda_2$ تساوي محدد المصفوفة الحقيقية المتماثلة $\nabla\nabla z$

$$det(\nabla\nabla z) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 \qquad (١٠, ١٥)$$

ولهذا ندرس الحالات التالية

(١) إذا كان $det(\nabla\nabla z) > 0$ فإن λ_1 و λ_2 سالبتان معاً أو موجبتان معاً ومن ثم فالنقطة الحرجة هي عظمى أو صغرى. ولتحديد ماهيتها في هذه الحالة ننظر إلى إشارة $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (أو $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$) ، فإذا كانت هذه الإشارة سالبة فالنقطة الحرجة صغرى.

(٢) إذا كان $det(\nabla\nabla z) < 0$ فالنقطة الحرجية سرجية.

(٣) إذا كان $det(\nabla\nabla z) = 0$ فالإختبار يفشل في تحديد ماهية النقطة الحرجة في هذه الحالة (هذه الحالة المشابهة للحالة $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ في البند (٦ , ٤)).

وبتطبيق ذلك على المثال المقدم أعلاه نجد أن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2(y^2 - 1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2(x^2 - 1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy$$

---

(٨)

$$\nabla\nabla z = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

وعليه نستنتج أن النقطة $(0,0)$ عظمى والنقاط الأربعة $(\pm 1, \pm 1)$ نقاط سرجية.[٩]

(٦ , ١٠) الأمثلية المقيدة (المشروطة)

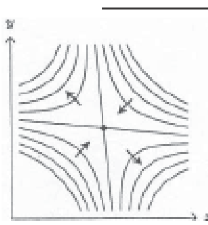
Constrained Optimization

في التطبيقات العملية غالباً مايكون اهتمامنا منصباً ليس فقط على إيجاد القيم العظمى والصغرى للدالة ، بل على إيجاد هذه القيم بوجود شروط إضافية. وكمثال على ذلك من الحياة اليومية هو محاولة شراء سلعة (حاسب آلي أو سيارة أو أي سلعة أخرى) بميزانية محددة. وفي ديناميكيا الحرارة من الممكن محاولة إيجاد مستويات الطاقة لعدد ثابت من الجزيئات وبمعرفة الطاقة الكلية للنظام.

لتفسير ذلك رياضياً، نفرض أننا بصدد إيجاد القيمة الأمثلية للدالة $z = f(x,y)$ بشرط إضافي وهو $g(x,y)$. وإذا كان بالإمكان حل المعادلة $g(x,y) = 0$ لإيجاد xx صراحة بدلالة y (أو y بدلالة x) وتعويض الناتج في الدالة $f(x,y)$ فإننا نحصل على دالة في متغير واحد فقط. فمثلاً، إيجاد النقاط الحرجة للدالة $z = x^2 - x + 2y^2$ بشرط $x^2 + y^2 - 1 = 0$ يكافئ حل المعادلة $\frac{dz}{dx}$ حيث $z = x^2 - x + 2(1 - x^2)$، وذلك بتعويض $y^2 = 1 - x^2$ ، وهذا بدوره يؤدي إلى وجود قيم عظمى مشروطة عندما $x = -\frac{1}{2}$ و $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

للطريقة المقدمة في المثال السابق عيوبها ولا نستطيع استخدامها بصورة عامة ويرجع ذلك لأسباب عديدة منها صعوبة إيجاد x بدلالة y (أو y بدلالة x) من الشرط

(٩)



$g(x,y) = 0$ ، كما أن هناك إمكانية عدم الحصول على جميع الحلول. وللتغلب على ذلك نستخدم طريقة أخرى للتعامل مع الأمثلية المقيدة تدعى ضوارب لاجرانج والفكرة الأساسية وراء هذه الطريقة هي تحويل مسألة الأمثلية المقيدة إلى مسألة أمثلية غير مقيدة لدالة $F(x,y)$ يمكن إنشاؤها من الدالتين $f(x,y)$ و $g(x,y)$ على النحو التالي

$$F(x,y\ ) = f(x,y) + \lambda g(x,y) \qquad (١٠,١٦)$$

حيث λ عدد ثابت يسمى ضارب لاجرانج وتحدد قيمته لاحقاً. إن التفسير الرياضي لصواب المعادلة (١٠,١٦) ليس بالأمر اليسير ولكن استخدامها مباشر ، حيث نستطيع إيجاد القيم x و y و λ بحل ثلاث معادلات آنياً وهي

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y = 0$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x = 0$$

$$g(x,y) = 0$$

في مثالنا السابق هذه المعادلات هي

$$2x(1+\lambda) - 1 = 0$$

$$2y(2+\lambda) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

على التوالي. بحل هذا النظام نجد أن $\lambda = -2$ أو $\lambda = 1 \pm \frac{1}{2}$. عندما تكون

$\lambda = -2$ فإن $x = -\frac{1}{2}$ و $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ وهي عظمى (كما وجدنا سابقاً) وعندما تكون $\lambda = 1 \pm \frac{1}{2}$ نجد نقاط صغرى عند $x = \pm 1$ و $y = 0$.(١٠)

من السهل جداً تعميم طريقة ضوارب لاجرانج للدوال التي تحتوي على أي عدد من المتغيرات ولأي عدد من الشروط ويتم ذلك على النحو التالي

لإيجاد النقاط الحرجة للدالة $f(\mathbf{x})$ حيث $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ والتي تحقق الشروط $g_1(\mathbf{x}) = 0, \cdots, g_M(\mathbf{x}) = 0$ نقوم بانشاء الدالة

$$F(x,y) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_M g_M(\mathbf{x})$$

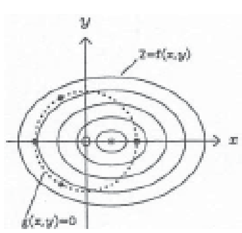
حيث $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_M$ هي ضوارب لاجرانج ، ومن ثم نحصل على الحلول $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_M$ ، $x_1, x_2, \cdots, x_N$ بحل نظام المعادلات (عدد المعادلات يساوي $N + M$) التالي

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_N} = 0 \ , g_1(\mathbf{x}) = 0, \cdots, g_M(\mathbf{x}) = 0$$

تمارين

(١٠ ، ١) استخدم المبادئ الأساسية لإيجاد $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ و $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$ للدالة $z(x,y) = \frac{x^3}{1-y}$.
جد (بأي طريقة) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. وتحقق من صواب المساواة $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

(١٠)



(١٠, ٢) إذا كانت $f(x,y,z) = cos(x,y,z)$ فاحسب $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z}$.

(١٠, ٣) أثبت أن الدالة الضمنية $x^2 = y^2 \sin(yz)$ تحقق المعادلة

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

(١٠, ٤) لتكن $f(x,y) = xy(1-y+x)$. احسب متجه الميل ∇f عند النقاط $\left(-\frac{1}{2},0\right)$، $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$، $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. عين النقاط الحرجة الواقعة داخل المثلث الذي رؤوسه $(-1,0)$، $(0,0)$، $(0,1)$. ارسم الدالة داخل هذا المثلث مع توضيح اتجاهات ∇f للنقاط المحسوب عندها.

(١٠, ٥) إذا كان $f(u,v) = 0$ حيث $u = x + y$ و $v = x^2 + xy + z^2$ فأثبت أن

$$x + y = 2z\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\right]$$

(١٠, ٦) استخدم التعويض $u = x + ct$ و $v = x - ct$ لاختزال معادلة الموجات $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ إلى الصورة $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$.

(١٠, ٧) عين جميع القيم الحرجة الحقيقية للدالة

$$f(x,y) = y^2(a^2 + x^2) - x^2(2a^2 - x^2)$$

حيث a ثابت. ثم حدد ماهيتها.

(١٠,٨) استخدم ضوارب لاجرانج لإيجاد القيم الحرجة للدالة e^{-xy} التي تحقق الشرط $x^2 + y^2 = 1$.