الفصل التاسع

المصفوفات
Matrices

(٩ , ١) التعريف والمصطلحات
Definition & Nomenclature

نناقش في هذا الفصل مفهوم المصفوفات وهو أحد مواضيع الجبر الخطي. مع أن تناول هذا المفهوم يأخذ المُنحى التجريدي ، إلاّ أنه أحد المواضيع المهمة.

إن أبسط تعريف للمصفوفة هو اعتبارها مستطيل من الأعداد تُكتب عادة داخل قوسين. وإذا كان عدد صفوفها يساوي M وعدد أعمدتها يساوي N فإننا نقول إنها مصفوفة من الدرجة $M \times N$. فمثلاً

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad (٩ , ١)$$

مصفوفة من الدرجة 2×3. إذا رمزنا للمصفوفة بالرمز $\mathbf{A}$ فإننا نرمز لعناصرها بالرموز A_{ij} حيث i يدل على الصف الواقع فيه A_{ij} و j يدل على العمود الواقع فيه A_{ij}.[١]

---

(١) $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{13} & \cdots & \mathrm{A}_{1N} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{23} & \cdots & \mathrm{A}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{A}_{M1} & \mathrm{A}_{M2} & \mathrm{A}_{M3} & \cdots & \mathrm{A}_{MN} \end{pmatrix}$$

ففي حالة المصفوفة المقدمة في المعادلة (٩,١) نجد أن $i = 1,2$ و $j = 1,2,3$ $j = 1,2,3$ وأن $A_{11} = 2$ ، $A_{12} = 5$ ، $A_{13} = 3$ ، $A_{21} = 1$ ، $A_{22} = 4$ ، $A_{23} = 7$.

تُدعى المصفوفة ، مصفوفة صفية إذا احتوت على صف واحد فقط $(M = 1)$ ، كما أنها تُسمى مصفوفة عمودية إذا احتوت على عمود واحد فقط $(N = 1)$. في واقع الحال يمكن اعتبار كل من المصفوفتين أعلاه متجهاً. المصفوفة المربعة هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة $(M = N)$ ، ولهذه المصفوفة أهمية خاصة وأن معظم مادة هذا الفصل مخصصة لدراسة المصفوفات المربعة.

عند استخدام المصفوفات في التطبيقات العملية ، غالباً مايواجهنا وصف المصفوفة بأنها حقيقية ، وهذا يعني أن عناصر المصفوفة أعداداً حقيقية (غير مركبة) ، والمصفوفة الأخرى المستخدمة كثيراً هي المصفوفة المتماثلة ونعني بذلك مصفوفة مربعة لا تتغير إذا بدلنا صفوفها بأعمدتها. تُدعى عملية تبديل صفوف مصفوفة $\mathbf{A}$ بأعمدتها بعملية أخذ المنقول ويُرمز لذلك بالرمز $\mathbf{A}^T$.[٢] أي أن عنصر $\mathbf{A}^T$ الذي موقعه ij يساوي عنصر $\mathbf{A}$ الذي موقعه ji.

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = \mathbf{A}_{ji} \qquad (٩,٢)$$

من الواضح أن منقول المصفوفة العمودية هي مصفوفة صف والعكس صحيح أيضاً. مما سبق نستطيع تعريف المصفوفتين الحقيقية والمتماثلة على النحو التالي

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} \quad \text{و} \quad \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \qquad (٩,٣)$$

---

(٢)

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{M1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{M2} \\ A_{13} & A_{23} & \cdots & A_{M3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1N} & A_{2N} & \cdots & A_{MN} \end{pmatrix}$$

حيث الدليل العلوي " * " يعني استبدال كل عدد بمرافقه المركب. إحدى المصفوفات التي تلعب دوراً مهماً في ميكانيكا الكم هي المصفوفة الهرميتية وهي المصفوفة التي تحقق الشرط:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^* \qquad (٩,٤)$$

وبمقارنة المعادلتين (٩,٣) و (٩,٤) نخلص إلى أن المصفوفة الحقيقية المتماثلة هي حالة خاصة من المصفوفة الهرميتية.

(٩,٢) حساب المصفوفات
Matrix Arithmetic

تتم عملية جمع أو طرح مصفوفتين $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بجمع أو طرح العناصر المتقابلة

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{C}_{ij} = \mathbf{A}_{ij} \pm \mathbf{B}_{ij} \qquad (٩,٥)$$

ولكي تكون عملية الجمع أو الطرح مُعَرَّفة يجب أن تكون المصفوفتان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ (ومن ثم $\mathbf{C}$) من الدرجة نفسها. أي إذا كانت $\mathbf{A}$ من الدرجة $M \times N$ فإن درجة $\mathbf{B}$ (ومن ثم درجة $\mathbf{C}$) هي $M \times N$.[٣]

أما عملية ضرب المصفوفات فليست بسهولة عمليتي الجمع والطرح وتُعَّرف على النحو التالي العنصر في الموقع ij من حاصل ضرب $\mathbf{A}$ مع $\mathbf{B}$ هو الضرب القياسي

(٣) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

obeikandi.com

(النقطي) للصف i من $\mathbf{A}$ مع العمود j من $\mathbf{B}$. أي أن

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \Leftrightarrow \mathbf{C}_{ij} = \sum_k \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj} \tag{٩,٦}$$

حيث لإتمام عملية الجمع على الدليل k يُشترط أن يكون عدد أعمدة $\mathbf{A}$ يساوي عدد صفوف $\mathbf{B}$.[٤] ستظهر فوائد الإصرار على تعريف عملية الضرب بهذه الصورة لاحقاً ، أما الآن فنلفت نظر القارئ أننا بهذا التعريف نخسر خاصية الإبدال لضرب المصفوفات. أي أن $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ ، ليس هذا فحسب ، بل من الممكن أن يكون $\mathbf{BA}$ غير مُعَّرف على الرغم من كون $\mathbf{AB}$ مُعَّرفاً ويرجع ذلك إلى الشرط المفروض على عدد الصفوف والأعمدة لإتمام عملية الضرب. إن عدم تحقق الإبدال في ضرب المصفوفات يفرض علينا توخي الحذر عند ضرب مصفوفة في طرفي معادلة مصفوفية حيث يتوجب علينا أن نذكر بوضوح فيما إذا كان الضرب من اليسار أو اليمين (الترتيب مهم!).

بالنسبة إلى المنقول ، نجد أن منقول حاصل الضرب يساوي حاصل ضرب منقولي المصفوفتين ولكن بترتيب معاكس. أي

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \tag{٩,٧}$$

ومن الممكن برهان ذلك باستخدام المعادلتين (٩,٢) و(٩,٦).

أما بالنسبة إلى عملية القسمة فهي غير مُعَّرفة للمصفوفات ولكننا سنرى لاحقاً كيفية التعويض عن هذا النقص. في الحالة الخاصة التي تكون فيها المصفوفة عدداً (من

---

(٤) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & -2 \\ 31 & -1 \\ 25 & -6 \end{pmatrix}$

الدرجة 1×1) فإننا نستطيع تعريف عملية الضرب بعدد (من ثم القسمة عليه إذا لم يكن صفراً) ويتم ذلك على النحو

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{C}_{ij} = \alpha \mathbf{B}_{ij} \qquad (٩,٨)$$

حيث كل عنصر من عناصر المصفوفة يضرب أو يقسم على الثابت α.[٥]

(٩,٣) المحددات
Determinants

قبل إكمال دراستنا للمصفوفات نتوقف قليلاً لمناقشة مفهوم المحددات الذي يلعب دوراً رئيساً في دراسة المصفوفات المربعة التي ستكون محور اهتمامنا فيما تبقى من هذا الفصل.

إذا كانت المصفوفة من الدرجة 1×1 فيُعرَّف محددها على أنه عدد المصفوفة نفسه. أي أن $det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}_{11}| = \mathbf{A}_{11}$. أما إذا كانت المصفوفة من الدرجة 2×2 فإن المحدد يُعرَّف على النحو التالي[٦]

$$det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \qquad (٩,٩)$$

---

(٥) $2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ 14 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

(٦) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times 5 = 3$

إن إيجاد صيغة صريحة لمحدد المصفوفات ذات الدرجات العليا يحتاج إلى بعض الجهد ولكننا نستطيع إيجاده باستخدام محدد مصفوفات من درجات أصغر بقاعدة سهلة ويتم ذلك على النحو التالي قيمة محدد مصفوفة يساوي حاصل الضرب القياسي لأي من صفوفها أو أعمدتها مع المترافقات المقابلة ، حيث مترافق العدد المصفوفي A_{ij} هو حاصل ضرب $(-1)^{i+j}$ مع محدد المصفوفة التي نحصل عليها من المصفوفة **AA** بحذف الصف i والعمود j ، يُدعى هذا المحدد بالمصغر وهو محدد مصفوفة درجتها تقل بواحد عن درجة المصفوفة الأصلية. أما العدد $(-1)^{i+j}$ فهو 1 أو 1−.[٧]

على سبيل المثال ، يمكن كتابة محدد مصفوفة من الدرجة 3×3 بدلالة محددات ثلاث مصفوفات من الدرجة 2×2 على النحو

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix}$$

حيث استخدمنا الصف الأول في هذه الحسابات.[٨] إن تقديمنا المعادلة (٩ , ٩) لحساب محدد مصفوفة من الدرجة $2 \times 22 \times 2$ لم يكن ضرورياً لأننا نستطيع إيجاد محدد مصفوفة من الدرجة $2 \times 22 \times 2$ بدلالة محددي مصفوفتين من الدرجة 1×1 1×1. كما أننا نستطيع إثبات أن قيمة المحدد لاتعتمد على الصف (أو العمود) الذي نختاره لتطبيق قاعدة المترافق.

---

(٧) $$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots & \cdots \\ - & + & - & \cdots & \cdots \\ + & - & + & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & + \end{pmatrix}$$

(٨) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -7 - 15 + 2(4 + 9) = 4$$

obeikandl.com

تتمتع المحددات بالعديد من الخواص يُستخدم بعضها في المساعدة على إيجاد قيمة المحدد. نقدم هذه الخواص دون برهان ولكن من الممكن اختبار صوابها على المصفوفات من الدرجة 2×2.

١- تبديل صفوف مصفوفة بأعمدتها (أي أخذ المنقول) لايغير من قيمة محددها.(٩)

٢- إذا ضربنا أحد صفوف أو أعمدة مصفوفة بعدد k فإن محدد المصفوفة الناتجة يساوي محدد المصفوفة الأصلية مضروباً بالعدد k.

٣- إذا احتوت المصفوفة على صف (أو عمود) صفري فإن محددها يساوي صفراً.

٤- إذا كان أحد الصفوف (أو الأعمدة) مضاعفاً لصف (أو عمود آخر) فإن قيمة المحدد يساوي صفراً.

٥- تبديل صفان (أو عمودان) في مصفوفة يغير إشارة المحدد.

٦- إذا ضربنا أحد صفوف (أو أعمدة) مصفوفة بعدد ثم أضفنا الناتج إلى صف (أو عمود)آخر فإن قيمة المحدد لا تتغير.

٧- محدد حاصل ضرب مصفوفتين يساوي حاصل ضرب محدداهما.(١٠)

تزودنا قاعدة المترافق لإيجاد المحددات بطريقة سهلة لتذكر صيغة الضرب المتجهي الذي قدمناه في البند (٤ , ٨)

---

(٩) $det(\mathbf{A})^T = det(\mathbf{A})$

(١٠) $det(\mathbf{AB}) = det(\mathbf{A})\, det(B)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (٩,١٠)$$

وأيضاً إذا استبدلنا الصف الأول باحداثيات متجه $\vec{c}$ فإننا نحصل على صيغة للضرب الثلاثي القياسي.[١١] ولذا بالرجوع إلى البند (٨,٥) نجد أن محدد مصفوفة من الدرجة 3×3 يمثل حجم متوازي سطوح. في الحقيقة ، إن هذا هو التفسير الطبيعي للمحدد "المحدد هو حجم الجسم المُولّد عندما تستخدم الصفوف أو الأعمدة كمتجهات حدِّية". وهذا بدوره يفسر محدد المصفوفة 1×1 على أنه طول ومحدد المصفوفة 2×2 على أنه مساحة متوازي أضلاع.

(٩,٤) معكوس المصفوفات

Inverse Matrices

لقد ذكرها في البند (٩,٢) أن قسمة المصفوفات غير معرفة ، ولكن من الممكن معالجة ذلك للمصفوفات المربعة بأن نُعِّرف عملية تشبه عملية القسمة وهي الضرب بمعكوس مصفوفة ويعرف على النحو التالي

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \qquad (٩,١١)$$

(١١)

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

obeikandl.com

حيث $\mathbf{I}$ المصفوفة المحايدة[١٢] وهي المصفوفة التي تحتوي على 1 في القطر الرئيسي وأصفار ما عدا ذلك.

لاحظ أن ضرب أي مصفوفة مربعة بالمصفوفة $\mathbf{I}$ (عندما يكون ذلك الضرب معرفاً) ينتج عنه المصفوفة نفسها. أي أن $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$.

من الممكن الحصول على معكوس مصفوفة باستخدام التعريف المقدم بالمعادلة (٩, ١١). كما أن هناك طرقاً أخرى لإيجاده منها الطريقة التالية

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{adj(\mathbf{A})}{det(\mathbf{A})} \qquad (٩, ١٢)$$

حيث $adj(\mathbf{A})$ المصفوفة المصاحبة للمصفوفة $\mathbf{A}$ وهي المصفوفة التي نحصل عليها باستبدال كل من عناصر $\mathbf{A}^T$ (منقول $\mathbf{A}$) بالمترافق لذلك العنصر.[١٣] لاحظ أن مقام المعادلة (٩, ١٢) يؤكد لنا عدم وجود معكوس $\mathbf{A}^{-1}$ للمصفوفة $\mathbf{A}$ في الحالة التي يكون فيها $det(\mathbf{A})$ يساوي صفراً. تُسمى المصفوفة التي ليس لها معكوس ، المصفوفة الشاذة.

(٩, ٥) المعادلات الخطية الآنية

Linear Simultaneous Equation

سبق وأن رأينا بعض المعادلات الآنية في البند (٤, ١) ولاحظنا أن أسهلها للحل هي المعادلات الخطية. وبعد أن تعرفنا على المصفوفات في هذا الفصل نستطيع كتابة

(١٢)

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(١٣)

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5-6}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Obeikandl.com

الحالة العامة للمعادلات الآنية الخطية على الصورة

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \qquad (٩,١٣)$$

حيث $\mathbf{A}$ مصفوفة وكل من $\mathbf{X}$ و $\mathbf{B}$ متجهاً (أو مصفوفة مكونة من عمود)، عناصر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ معلومة والمطلوب إيجاد عناصر $\mathbf{X}$ التي تحقق المعادلة (٩,١٣). على سبيل المثال، تأخذ معادلتا البند (٤,١) الصورة

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

حيث a، b، c، d، α، β ثوابت.

للحصول على حل للمعادلة (٩,١٢)، نقوم بضرب طرفي المعادلة من اليسار بمعكوس المصفوفة $\mathbf{A}^{-1}$ لنحصل على

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{IX} = \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \qquad (٩,١٤)$$

حيث استخدمنا خاصية المعادلة (٩,١١) وخاصية المصفوفة المحايدة. مع أن حساب معكوس مصفوفة يحتاج لبعض المجهود، إلاّ أن عملية استخدام المعادلة (٩,١٤) لإيجاد $\mathbf{XX}$ سهلة جداً.[١٤]

---

(١٤)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

حيث $\Delta = ad - bc \neq 0\Delta = ad - bc \neq 0$

لقد فرضنا ضمنياً استناداً إلى البند (٩ , ٤) أن

(١) المصفوفة $\mathbf{A}$ مربعة

(٢) $det(\mathbf{A}) \neq 0$

حيث (١) تعني أن عدد المعادلات يساوي دائماً عدد المجاهيل و (٢) يضمن لنا أن هذه المعادلات مستقلة خطياً. أي لا يمكن كتابة احداها كتركيب خطي لبقية المعادلات. وبهذا نستطيع أن نحصل على عدد أقل من المعادلات المراد حلها. إذا كانت المصفوفة $\mathbf{A}$ شاذة فإما أن الحل ليس وحيداً (في هذه الحالة عدد الحلول غير منته) وإما أنه لا يوجد حل لنظام للمعادلات. ويمكن تفسير الحل هندسياً في حالة المصفوفة من الدرجة 2×2 على أنه إيجاد نقطة تقاطع مستقيمين ، فإذا كانا متوازيان فإنهما لايتقاطعان وإذا كانا متطابقان فإنه يوجد عدد غير منته من الحلول.

(٩ , ٦) التحويلات

Transformations

إن ضرب مصفوفة (ليس بالضرورة مربعة) بمتجه يوَّلد متجه آخر (مصفوفة عمود)

$$\mathbf{AX} = \mathbf{Y} \qquad (٩ , ١٥)$$

تُدعى عملية تغيير $\mathbf{X}$ إلى $\mathbf{Y}$ تطبيقاً أو تحويلاً ، وفي هذه الحالة ، تُسمى المصفوفة$\mathbf{A}$ مؤثراً. على سبيل المثال ، عند ضرب متجه ثنائي البعد بالمصفوفة

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (٩ , ١٦)$$

فينتج عن ذلك دوران للمتجه باتجاه عكس دوران عقارب الساعة بزاوية .[١٥] من الممكن وصف طبيعة التحويل بدراسة تأثيره على نقاط زوايا مربع الوحدة (وهذا يصلح لأي مصفوفة من الدرجة 2×2). أي إيجاد صور النقاط $(0,0)$ ، $(0,1)$ ، $(1,0)$ ، $(1,1)$ تحت تأثير التحويل. إذا كانت $\mathbf{A}$ مربعة وقابلة للعكس فإننا نحصل على التحويل العكسي بضرب المتجه $\mathbf{Y}$ بالمعكوس $\mathbf{A}^{-1}$.

(٩ , ٧) القيم والمتجهات الذاتية (المميزة)

Eigenvalues & Eigenvectors

توجد حالة خاصة من المعادلة (٩ , ١٥) على قدر كبير من الأهمية وهي الحالة التي تكون فيها صورة $\mathbf{X}$ مضروباً بعدد قياسي λ. أي

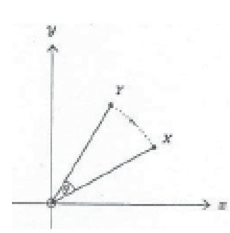
$$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X} \qquad (٩ , ١٧)$$

تُدعى قيم λ وقيم $\mathbf{X}$ التي تحقق المعادلة (٩ , ١٧) ، القيم المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة $\mathbf{A}$ على التوالي.

إن المصفوفة $\mathbf{A}$ في المعادلة (٩ , ١٧) مربعة ولذا يمكن كتابة المعادلة على الشكل

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{X} = 0 \qquad (٩ , ١٨)$$

(١٥)



openkandil.com

حيث استخدمنا الخاصية $\mathbf{IX} = \mathbf{X}$ وحيث درجة المصفوفة المحايدة هي نفس درجة المصفوفة $\mathbf{A}$. بضرب المعادلة (٩ , ١٨) بمعكوس المصفوفة $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ نحصل على $\mathbf{X} = 0$ ولتجنب هذا الوضع غير المرضي يجب أن يكون

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \qquad (٩ , ١٩)$$

ومن ثم فإن $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{-1}$ غير موجود وبهذا يكون $\mathbf{X} \neq 0$.

إن المعادلة (٩ , ١٩) هي الخطوة الأولى لإيجاد القيم المميزة وهي عبارة عن طرح λ من كل عنصر من عناصر قطر المصفوفة $\mathbf{A}$ ومن ثم مساواة محدد المصفوفة الناتجة بالصفر.[١٦] فإذا كانت المصفوفة من الدرجة $N \times N$ فيلزمنا إيجاد جذور كثيرة حدود من الدرجة N في المجهول λ لحل هذه المسألة (تُدعى معادلة كثيرة الحدود هذه بالمعادلة المميزة). وعليه، يوجد N من القيم المميزة $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N)$ ومن ثم يوجد N من المتجهات المميزة المقابلة $(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\cdots,\mathbf{X}_N)$.

الطريقة المثلى لإيجاد المتجهات المميزة تكون بتعويض قيم λ قيمة قيمة في المعادلة (٩ , ١٧) أو المعادلة (٩ , ١٨) ووضع قيمة وسيطية t لأحد إحداثيات $\mathbf{X}$ ثم إيجاد الإحداثي الآخر بدلالة t. وجود المتغير t يبين وجود عدد غير منته من المتجهات المميزة $\mathbf{X}$ التي تقابل القيمة المميزة λ. وعادة ما نختار قيمة t التي تُعيِّر لنا المتجه $\mathbf{X}$ أي التي تجعل طول المتجه $\mathbf{X}$ يساوي 1. وإذا واجهتنا صعوبة في ذلك فبإمكاننا أن نستبدال الإحداثي الذي عوضناه بالوسيط t بإحداثي آخر من إحداثيات $\mathbf{X}$.

---

(١٦)

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ عندما $\lambda = 2$ يكون $2x + y = 0$ ومن ثم $\mathbf{X} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$ وعندما $\lambda = 5$ يكون $-x + y = 0$ ومن ثم $\mathbf{X} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

في التطبيقات العملية ، عادة ما تكون المصفوفات المستخدمة حقيقية ومتماثلة أو هرميتية وهي المصفوفات التي عرفناها في المعادلتين (٩,٣) و (٩,٤) على التوالي ، وبهذا نحصل على خصائص جيدة للقيم والمتجهات المميزة. بالتحديد ، تكون جميع القيم المميزة حقيقية وتكون المتجهات المميزة متعامدة فيما بينها. أي أن

$$\lambda_i = \lambda_i^* \quad \text{لكل} \quad \mathbf{X}_i^T \mathbf{X}_j = \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_j = 0 \quad \text{و} \quad i \neq j \qquad (٩,٢٠)$$

حيث وجود الدليل يبين الحلول المختلفة للمعادلة (٩,١٧). وأخيراً ، نذكر أن حاصل ضرب القيم المميزة يساوي قيمة $det(\mathbf{A})$[١٧] وأن مجموعها يساوي أثر المصفوفة $\mathbf{A}$ (أي مجموع عناصر القطر)[١٨].

(٩,٨) الاستقطار

Diagonalization

من الممكن تقديم تفسير هندسي للقيم والمتجهات المميزة باستخدام كمية قياسية تُدعى الشكل التربيعي وهي

$$\mathbf{Q} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{X} \qquad (٩,٢١)$$

على سبيل المثال ، إذا كانت $\mathbf{A}$ مصفوفة من الدرجة 2×2 وللقيمتين المميزتين الإشارة نفسها وكان المتجه المميز $\mathbf{X}^T$ هو (x, y) فإن المعادلة (٩,٢١) تؤدي إلى معادلة قطع ناقص.

---

(١٧) $det(\mathbf{A}) = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$

(١٨) $trace(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N$

obeikandl.com

هذه المعادلة ليست بسهولة المعادلة (١٠ , ٢)؛ لأن القطع الناقص في حالتنا هذه يكون متخالفاً بالنسبة لمحوري x و y . في القطع الناقص المبين في هامش الصفحة[١٩]، تأخذ المتجهات المميزة اتجاه المحور الرئيسي للقطع وأما القيم المميزة فتتناسب عكسياً مع مربع العرض المقابل. إذا كانت درجة المصفوفة أعلى من ذلك فإنها تؤدي إلى مجسم قطع ناقص متعدد البعد مع بقاء العلاقة بين خصائص القيم والمتجهات المميزة صحيحة.

نستطيع ، بعد عملية حساب القيم والمتجهات المميزة تبسيط المسألة باستخدام نظام إحداثي جديد $\mathbf{Y}$ محاذي للمحور الرئيسي للقطع الناقص عوضاً عن النظام الإحداثي $\mathbf{X}$. هذا التحويل بين $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ تبينه المعادلة

$$\mathbf{X} = \mathbf{O}\mathbf{Y} \qquad (٩ , ٢٢)$$

حيث أعمدة المصفوفة $\mathbf{O}$ هي متجهات مميزة معيرة للمصفوفة $\mathbf{A}$[٢٠]. وبالاستعانة بالمعادلة (٢٠ , ٩) نجد أن مصفوفة التحويل $\mathbf{O}$ متعامدة . أي أن

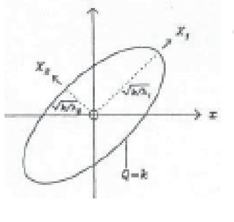
$$\mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbf{I} \qquad (٩ , ٢٣)$$

وباستخدام المعادلة (٢٢ , ٩) نجد أن الشكل التربيعي المقدم في المعادلة (٢١ , ٩) يصبح

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Y}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{Y} \qquad (٩ , ٢٤)$$

---

(١٩)



(٢٠) $\mathbf{O} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$

openkandil.com

حيث Λ مصفوفة قطرية (عناصرها جميعاً أصفار ماعدا عناصر القطر) ، عناصر قطرها هي القيم المميزة للمصفوفة $\mathbf{A}$[٢١].

باستخدام هذا التحليل للقيم والمتجهات المميزة يكون بمقدورنا تجزئة السلوك المعقد لبعض المسائل إلى أجزاء أساسية بسيطة. على سبيل المثال ، المتجهات المميزة المرتبطة مع تذبذب الجزيئات تقابل المنوال الطبيعي للنظام والقيم المميزة هي التكرارات الطبيعية. وبصورة مشابهة ، المتجهات والقيم المميزة في مسألة ميكانيكا الكم تبين العلاقة بين دوال موجات الحالات المستقرة ومستويات طاقتها.

في الحالة التي تتساوى فيها قيمتان مميزتان وليكن $\lambda_1 = \lambda_2$ ، يمثل الشكل التربيعي دائرة. وتُدْعى هذه الحالة ، الحالة المضمحلة. بما أن جميع المحاور الرئيسية متساوية فنجد أن أي اتجاه في المستوى هو متجه مميز ، وبما أن إنشاء أي متجه ثنائي البعد يحتاج إلى أساس مكون من متجهين فبإمكاننا اختيار أي اتجاهين مستقلين كمتجهين مميزين ، ولكن جرت العادة على اختيارهما متعامدين.

تمارين

(٩,١) احسب $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ و $\mathbf{AB}$ و $\mathbf{BA}$ للمصفوفتين $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ و $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

تحقق من صحة المساويتين $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ و $det(\mathbf{AB}) = det(\mathbf{A})det(\mathbf{B})$

---

(٢١) $\mathbf{O}^T\mathbf{A}\mathbf{O} = \Lambda$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix}$$

(٩,٢) تحقق من أن المعادلة (٩,١٠) تعطينا احداثيات الضرب المتجهي وأن محدد مصفوفة من الدرجة 3×3 يقابل الضرب الثلاثي القياسي.

(٩,٣) احسب معكوس المصفوفة

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ثم تحقق من صحة المساواة $\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I}$.

(٩,٤) جد القيم والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بيّن أن المتجهات المميزة متعامدة فيما بينها وأن مجموع القيم المميزة يساوي أثر المصفوفة $\mathbf{A}$ وحاصل ضربها يساوي $det(\mathbf{A})$. عين مصفوفة الاستقطار $\mathbf{O}$ من المتجهات المميزة العيارية للمصفوفة $\mathbf{A}$ ثم تحقق من صحة المساواة $\mathbf{O}\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbf{I}$. وأخيراً ، تحقق من أن تحويل التماثل $\mathbf{O}^T\mathbf{A}\mathbf{O} = \Lambda$ يؤدي إلى مصفوفة قطرية عناصر قطرها هي القيم المميزة للمصفوفة $\mathbf{A}$.

obeikandl.com