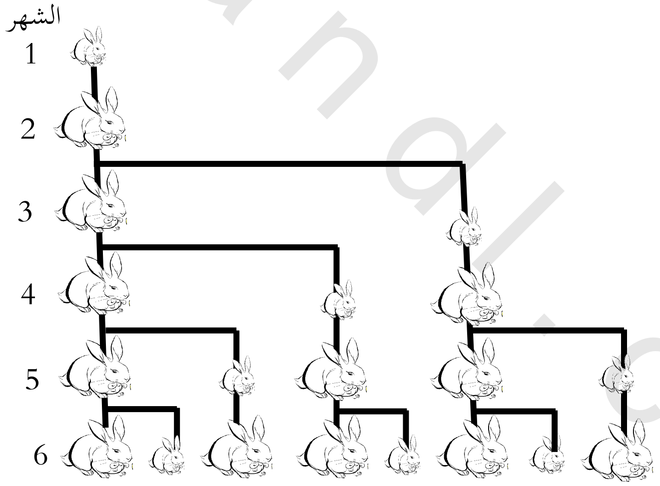
أرانب فيبوناتشي والمتتاليات الخطية الإرجاعية
Fibonacci's Rabbits and Linear Recurrence Sequences

في عام 1202 قام "Leonardo of Pisa" (ويعرف أيضاً ليوناردو فيبوناتشي " Leonardo Fibonacci") بنشر كتاب كان له الأثر الكبير في الرياضيات التطبيقية. قدم ليوناردو في هذا الكتاب النظام العددي العربي / الهندي الرائع (الأرقام $1,2,\ldots,9$ ورمزاً ينوب عن الصفر) للأوروبيين الذين ما زالوا يرزحون تحت النظام العددي الروماني المتخلف. كذلك فقد ضم كتاب ليوناردو المسألة الغريبة التالية :

> بدأنا الشهر الأول بزوج من الأرانب الصغيرة. بعد شهر كبر هذان الأرنبان. في الشهر التالي أنجب هذان الأرنبان زوجاً من الأرانب ، لذلك عندنا الآن زوج من الأرانب الكبيرة وزوج من الأرانب الصغيرة. في كل شهر ينجب كل زوج من الأرانب الكبيرة زوجاً من الأرانب الصغيرة ، وكل زوج من الأرانب الصغيرة ينمو ليصبح زوجاً من الأرانب الكبيرة. كم زوجاً من الأرانب سيصبح لدينا بعد سنة؟

إنجاب الأرانب في الأشهر القليلة الأولى موضحة في الشكل 37.1 ، حيث إن صورة كل أرنب في هذا الشكل تمثل زوجاً من الأرانب. إذا افترضنا أن $F_n =$ عدد أزواج الأرانب بعد n شهر، وإذا تذكرنا أن كل شهر ينمو زوج الأرانب الصغيرة وكل شهر ينجب زوج الأرانب الكبيرة زوجاً من الأرانب الصغيرة، فإنه يمكننا أن نحسب عدد أزواج الأرانب (الصغيرة والكبيرة) في كل شهر لاحق. لذلك فإن $F_1 = 1$ (زوج واحد من الأرانب الصغيرة) و $F_2 = 1$ (زوج واحد من الأرانب الكبيرة) و $F_3 = 2$ (زوج واحد من الأرانب الكبيرة بالإضافة لزوج جديد واحد من الأرانب الصغيرة) و $F_4 = 3$ (زوجان من الأرانب الكبيرة بالإضافة لزوج جديد من الأرانب الصغيرة). بالاستمرار بالعد بهذه الطريقة نجد أن :



الشكل رقم (٣٧,١). أرانب فيبوناتشي (كل أرنب يمثل زوجاً).

$F_1 = 0$ زوج كبير $+ 1$ زوج صغير $= 1$ زوج.

$F_2 = 1$ زوج كبير $+ 0$ زوج صغير $= 1$ زوج.

$F_3 = 1$ زوج كبير + 1 زوج صغير = 2 زوج.

$F_4 = 2$ زوج كبير + 1 زوج صغير = 3 زوج.

$F_5 = 3$ زوج كبير + 2 زوج صغير = 5 زوج.

$F_6 = 5$ زوج كبير + 3 زوج صغير = 8 زوج.

$F_7 = 8$ زوج كبير + 5 زوج صغير = 13 زوج.

$F_8 = 13$ زوج كبير + 8 زوج صغير = 21 زوج.

$F_9 = 21$ زوج كبير + 13 زوج صغير = 34 زوج.

$F_{10} = 34$ زوج كبير + 21 زوج صغير = 55 زوج.

$F_{11} = 55$ زوج كبير + 34 زوج صغير = 89 زوج.

$F_{12} = 89$ زوج كبير + 55 زوج صغير = 144 زوج.

$F_{13} = 144$ زوج كبير + 89 زوج صغير = 233 زوج.

هذه هي إجابات سؤال فيبوناتشي . في نهاية السنة (بعد 12 شهر تماماً) هناك 233 زوج من الأرانب.

المتتالية العددية لفيبوناتشي

$$1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , \ldots$$

الناتجة من مسألة أرنب فيبوناتشي بهرت الناس من القرن الثالث عشر وحتى يومنا هذا[١].

لنعتبر أننا نريد توسيع قائمتنا لأعداد فيبوناتشي F_n إلى ما بعد 12 شهراً. بالنظر

(١) حتى أن هناك مجلة تسمى "فصلية فيبوناتشي" أنشأت عام 1962 تهتم بمتتالية فيبوناتشي وتعميماتها.

للقائمة نلاحظ أن كل عدد فيبوناتشي هو مجموع عددي فيبوناتشي السابقين. بالرموز نحصل على الصيغة :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

لاحظ أن هذه الصيغة ليست صيغة حقيقية لإيجاد F_n ؛ لأنها لا تعطي مباشرة قيمة F_n . بدلاً من ذلك فهي تعطينا قاعدة تخبرنا كيف نحسب عدد فيبوناتشي n^{th} من الأعداد السابقة. الكلمة الرياضية التي تطلق على هذا النوع من القوانين هي الصيغة الارجاعية *recursion formula*.

يمكننا استخدام الصيغة الإرجاعية على F_n لعمل جدول لقيمها.

n	F_n
1	1
2	1
3	2
4	4
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55

n	F_n
11	89
12	144
13	233
14	377
15	610
16	987
17	1,597
18	2,584
19	4,181
20	6,765

n	F_n
21	10,946
22	17,711
23	28,657
24	46,368
25	75,025
26	121,393
27	196,418
28	317,811
29	514,229
30	832,040

أعداد فيبوناتشي F_n

نلاحظ أن أعداد فيبوناتشي تتزايد بسرعة كبيرة. في الحقيقة، فإن عدد فيبوناتشي 31^{st} أكبر من 1 مليون.

$$F_{31} = 1,346,269$$

وفي 45 شهراً (أقل من 4 سنوات)،

$$F_{45} = 1,134,903,170$$

وبذلك يكون لدينا أكثر من بليون (مليار) زوج من الأرانب ! الآن انظر إلى حجم الأعداد قبل أن نصل حتى إلى عدد فيبوناتشي الـ 200^{th} :

$$F_{60} = 1,548,008,755,920$$
$$F_{74} = 1,304,969,544,928,657$$
$$F_{88} = 1,100,087,778,366,101,931$$
$$F_{103} = 1,500,520,536,206,896,083,277$$
$$F_{117} = 1,264,937,032,042,997,393,488,322$$
$$F_{131} = 1,066,340,417,491,710,595,814,572,169$$
$$F_{146} = 1,454,489,111,232,772,683,678,306,641,953$$
$$F_{160} = 1,226,132,595,394,188,293,000,174,702,095,995$$
$$F_{174} = 1,033,628,323,428,189,498,226,463,595,560,281,832$$
$$F_{189} = 1,409,869,790,947,669,143,312,035,591,975,596,518,914$$

نظرية الأعداد تدور حول الأنماط، لكن كيف نستطيع إيجاد نمط لأعداد تتزايد بسرعة كبيرة ؟ أحد الأشياء التي نستطيع عملها هو محاولة اكتشاف كيف تتسارع أعداد فيبوناتشي. على سبيل المثال، بكم يكبر عدد فيبوناتشي اللاحق عن السابق؟ هذا يقاس من خلال النسبة F_n/F_{n-1} ، لذلك سنحسب القيم القليلة الأولى.

$$F_3/F_2 = 2.00000 \qquad F_{11}/F_{10} = 1.61818$$
$$F_4/F_3 = 1.50000 \qquad F_{12}/F_{11} = 1.61797$$
$$F_5/F_4 = 1.66666 \qquad F_{13}/F_{12} = 1.61805$$
$$F_6/F_5 = 1.60000 \qquad F_{14}/F_{13} = 1.61802$$
$$F_7/F_6 = 1.62500 \qquad F_{15}/F_{14} = 1.61803$$
$$F_8/F_7 = 1.61538 \qquad F_{16}/F_{15} = 1.61803$$
$$F_9/F_8 = 1.61904 \qquad F_{17}/F_{16} = 1.61803$$
$$F_{10}/F_9 = 1.61764 \qquad F_{18}/F_{17} = 1.61803$$

يظهر أن النسبة F_n/F_{n-1} تقترب شيئاً فشيئاً لعدد قريب من 1.61803 . من الصعب أن نعرف بالضبط ما هو هذا العدد ؛ لذلك دعنا نرى كيف يمكننا اكتشافه.

القائمة الأخيرة توضح أن F_n يساوي تقريباً αF_{n-1} ، حيث α عدد ثابت لا نعرف قيمته. إذن :

$$F_n \approx \alpha F_{n-1}$$

لنفس السبب فإن :

$$F_{n-1} \approx \alpha F_{n-2}$$

وإذا عوضنا هذه في $F_n \approx \alpha F_{n-1}$ نحصل على :

$$F_n \approx \alpha F_{n-1} \approx \alpha^2 F_{n-2}$$

لذلك فنحن نتوقع أن $F_n \approx \alpha^2 F_{n-2}$ و $F_{n-1} \approx \alpha F_{n-2}$ نعلم كذلك معادلة فيبوناتشي الإرجاعية $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ، إذن نجد أن :

$$\alpha^2 F_{n-2} \approx \alpha F_{n-2} + F_{n-2}$$

بالقسمة على F_{n-2} وبنقل جميع الحدود لطرف واحد نحصل على المعادلة :

$$\alpha^2 - \alpha - 1 \approx 0$$

باستخدام الصيغة التربيعية ينتج :

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{أو} \qquad \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

كنا نبحث عن قيمة α ، لكننا وجدنا قيمتين كلتا هاتين القيمتين تحققان المعادلة $\alpha^2 = \alpha + 1$ ، إذن لأي عدد n ، فإن هاتين القيمتين تحققان المعادلة :

$$\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}$$

هـذه المعادلـة تشـبه كـثيراً معادلـة فيبوناتشـي الإرجاعيـة $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. بكلمات أخرى ، إذا جعلنا $G_n = \alpha^n$ لإحدى قيمتي α ، فإن $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$.

في الحقيقة ، من الأفضل أن نستخدم كلتا القيمتين :

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad , \qquad \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ونضع :

$$H_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n$$

عندئذ فإن :

$$\begin{aligned} H_{n-1} + H_{n-2} &= \left(c_1\alpha_1^{n-1} + c_2\alpha_2^{n-1}\right) + \left(c_1\alpha_1^{n-2} + c_2\alpha_2^{n-2}\right) \\ &= c_1\left(\alpha_1^{n-1} + \alpha_1^{n-2}\right) + c_2\left(\alpha_2^{n-1} + \alpha_2^{n-2}\right) \\ &= c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n \\ &= H_n \end{aligned}$$

إذن H_n تحقق نفس الصيغة الإرجاعية مثل متتالية فيبوناتشي ، وبذلك نكون أحراراً في اختيار العددين c_1 , c_2 لنحصل على أي قيمتين نريدهما.

الفكرة الآن هي في اختيار c_1 , c_2 بحيث تبدأ متتالية H_n ومتتالية فيبوناتشي بنفس القيمتين. بكلمات أخرى ، نريد أن نختار c_1 , c_2 بحيث :

$$H_1 = F_1 = 1 \quad , \quad H_2 = F_2 = 1$$

هذا يعني أننا نحتاج لحل

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 1 \quad , \quad c_1\alpha_1^2 + c_2\alpha_2^2 = 1$$

(تذكر أن α_1 , α_2 هما عددان محددان). من السهل حل هاتين المعادلتين . مثلاً ، بضرب المعادلة الأولى بـ α_2 ثم طرحها من المعادلة الثانية ينتج :

$$c_1\alpha_1^2 - c_1\alpha_1\alpha_2 = 1 - \alpha_2$$

إذن :

$$c_1 = \frac{1-\alpha_2}{\alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2}$$

يمكن أن نحسب قيمة c_1 بتعويض القيمتين $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ، ولكن من الأسهل أن نستخدم الصيغتين $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 - \alpha_2 = \sqrt{5}$. إذن :

$$1 - \alpha_2 = \alpha_1 \quad , \quad \alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2 = \alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2) = \alpha_1\sqrt{5}$$

إذن :

$$c_1 = \frac{1-\alpha_2}{\alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

بنفس الطريقة يمكن إيجاد قيمة c_2 لتكون :

$$c_2 = \frac{1-\alpha_1}{\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

ينتج من حساباتنا هذه الصيغة الجميلة التالية للحد n^{th} في متتالية فيبوناتشي . وتسمى بصيغة Binet الذي نشرها عام 1843 ، على الرغم من أنها معروفة من قِبَل أويلر (Euler) وبيرنولي (Deniel Bernoulli) قبل هذا التاريخ بحوالي 100 عام على الأقل.

نظرية (١ ,٣٧) (صيغة Binet)

متتالية فيبوناتشي F_n تعطى بالصيغة الإرجاعية :

$$F_1 = F_2 = 1 \quad , \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad , \qquad n = 3, 4, 5, \ldots$$

عندئذ ، فإن الحد n^{th} في متتالية فيبوناتشي يُعطى بالصيغة :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

البرهان

لكل عدد $n = 1, 2, 3, \ldots$ ، ليكن H_n العدد :

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

سنبرهن بالاستقراء على n أن $H_n = F_n$ لكل عدد n . أولاً نجد أن :

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$$

و

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{4} = 1$$

هذا يبين أن $H_1 = F_1$, $H_2 = F_2$.

الآن افرض أن $n \geq 3$, $H_i = F_i$ لكل i بين 1 و $n-1$. بشكل خاص $H_{n-1} = F_{n-1}$ و $H_{n-2} = F_{n-2}$. نحن نحتاج لإثبات أن $H_n = F_n$. لكننا رأينا أن :

$$H_n = H_{n-1} + H_{n-2}$$

ونعلم من متباينة فيبوناتشي أن :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

إذن نرى أن $H_n = F_n$.

فاصل تاريخي

العدد :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\cdots$$

يسمى النسبة الذهبية Golden Ratio (أو النسبة المقدسة) وفي الأغلب تعود إلى اليونان القديمة. العديد من الباحثين ينسبون جمالية هذه النسبة إلى تراكيب فنية بنيت

على النسبة المقدسة. على سبيل المثال، البناء المعروف باسم Parthenon (بارثينون) (الشكل رقم ٣٧,٢) صُمم بحيث تكون أبعاده الخارجية مُصَممة على النسبة الذهبية. هنا مستطيل صغير€ أبعاده تُشكل نسبة ذهبية. وهنا مستطيل أكبر أبعاده تشكل هذه النسبة € . هل تجد النسبة لهذين المستطيلين محببة للعين؟

الشكل رقم (٣٧,٢).

متتالية فيبوناتشي هي مثال على متتالية إرجاعية خطية *Linear Recurrence Sequence*. كلمة خطية هنا تعني أن الحد n^{th} في المتتالية هو تركيبة خطية من بعض الحدود السابقة. هنا بعض الأمثلة على بعض متتاليات إرجاعية خطية أخرى:

$$A_n = 3A_{n-1} + 10A_{n-2} \qquad A_1 = 1 \qquad A_2 = 3$$

$$B_n = 2B_{n-1} - 4B_{n-2} \qquad B_1 = 0 \qquad B_2 = -2$$

$$C_n = 4C_{n-1} - C_{n-2} - 6C_{n-3} \qquad C_1 = 0 \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = 1$$

الطريقة التي استخدمناها لاشتقاق صيغة Binet لإيجاد عدد فيبوناتشي n^{th} ، يمكن استخدامها لإيجاد صيغة للحد n^{th} في أي متتالية إرجاعية خطية.

بالطبع، ليست كل المتتاليات الإرجاعية متتاليات خطية. هنا بعض الأمثلة على متتاليات إرجاعية ليست خطية:

$$D_n = D_{n-1} + D_{n-2}^2 \qquad D_1 = 1 \quad D_2 = 1$$
$$E_n = E_{n-1}E_{n-2} + E_{n-3} \qquad E_1 = 1 \quad E_2 = 2 \quad E_3 = 1$$

بشكل عام، لا يوجد تعبير بسيط عن الحد n^{th} للمتتالية الإرجاعية غير الخطية. وهذا لا يعني عدم أهمية المتتاليات غير الخطية (بل على العكس تماماً) ، بل هذا يعني أن تحليلها أصعب بكثير من المتتاليات الإرجاعية الخطية.

" متتالية فيبوناتشي قياس m "

ماذا يحدث لأعداد متتالية فيبوناتشي إذا اختزلناها قياس m ؟ إن هناك فقط عدداً محدوداً من الأعداد المختلفة التي يمكن اختزالها قياس m ؛ لذلك فإن القيم لا تصبح أكبر فأكبر .كما العادة ، سوف نبدأ بحساب بعض الأمثلة.

سنعرض هنا كيف تبدو متتالية فيبوناتشي قياس m للقيم القليلة الأولى لـ m .

$F_n \pmod 2$ $\underline{1,1,0},1,1,0,1,1,0,1,1,0\ldots$

$F_n \pmod 3$ $\underline{1,1,2,0,2,2,1,0},1,1,2,0,2,2,1\ldots$

$F_n \pmod 4$ $\underline{1,1,2,3,1,0},1,1,2,3,1,0,1,1,2\ldots$

$F_n \pmod 5$ $\underline{1,1,2,3,0,3,3,1,4,0,4,4,3,2,0,2,2,4,1,0},1,1,2\ldots$

$F_n \pmod 6$ $\underline{1,1,2,3,5,2,1,3,4,1,5,0,5,5,4,3,1,4,5,3,2,5,1,0},1,1,2,3\ldots$

لاحظ أنه في كل حالة عندما نحسب متتالية فيبوناتشي قياس m فإننا نحصل على العدد 1 مرتين متتاليتين، ثم تبدأ المتتالية مباشرة بالتكرار. (سنترك لك كتمرين إثبات أن هذا يحدث دائماً). إذن يوجد عدد صحيح $N \geq 1$ بحيث:

$$F_{n+N} \equiv F_n \pmod m \qquad \forall\, n = 1,2,\ldots$$

أصغر عدد صحيح N يسمى "دورة متتالية فيبوناتشي قياس m " .

period of the Fibonacci sequence modulo . ونرمز له بالرمز $N(m)$. الأمثلة السابقة تعطينا الجدول الصغير التالي :

m	2	3	4	5	6
$N(m)$	3	8	6	20	24

دورة متتالية فيبوناتشي قياس m تُظهر العديد من الأنماط المهمة ، ولكن جدولنا المختصر صغير جدًّا لنعتمد عليه في عمل تخمينات. الدورات $N(m)$ لكل $m \le 100$ وُضِعَت في قائمة في الجدول 37.1. التمارين 37.14 – 37.11 تطلب منك استخدام هذه القائمة لتبحث عن أنماط ، لتعمل تخمينات ، ولإثبات أن (بعض) تخميناتك صحيحة. صيد سعيد!

تمارين

(٣٧,١) (a) انظر إلى جدول أعداد فيبوناتشي. وقارن القيمتين F_m , F_{mn} لخيارات مختلفة لكل من m, n . حاول إيجاد نمط. (مساعدة : ابحث عن نمط قسمة).

(b) برهن أن النمط الذي أوجدته في (a) صحيح.

(c) إذا كان $\gcd(m,n)=1$ ، حاول إيجاد نمط أقوى يتضمن القيم F_m , F_n , F_{mn} .

(d) هل النمط الذي أوجدته في (c) يبقى صحيحاً إذا كان $\gcd(m,n) \neq 1$ ؟

(e) برهن أن النمط الذي أوجدته في (c) صحيح.

(٣٧,٢) (a) أوجد بقدر ما تستطيع أعداد فيبوناتشي المربعة. هل تعتقد أن هناك عدداً محدوداً منها أم عدداً لانهائيًّا؟

(b) أوجد بقدر ما تستطيع أعداد فيبوناتشي المثلثية. هل تعتقد أن هناك عدداً محدوداً منها أم عدداً لا نهائيًّا؟

(٣٧,٣) (a) إعمل قائمة بأعداد فيبوناتشي F_n الأولية.

(b) إعتمد على بياناتك لملأ الفراغ لتحصل على تخمين مهم:

إذا كان F_n أوليًّا، فإن n.........

(مساعدة: في الواقع، تخمينك سيكون جملة صحيحة لها استثناء).

(c) هل تخمينك في (b) يعمل باتجاه آخر؟ بمعنى، هل الجملة التالية صحيحة، بحيث نملأ الفراغ تماماً. بما ملأنا به الفراغ في (b)؟

إذا كان n.........، فإن F_n أولي.

(d) برهن أن تخمينك في (b) صحيح.

(٣٧,٤) "متتالية Lucas" هي متتالية من الأعداد L_n تُعطى بالقانون $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ و $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$.

(a) اكتب أول عشرة حدود من هذه المتتالية.

(b) أوجد صيغة بسيطة لـ L_n، تماماً كصيغة Binet لأعداد فيبوناتشي F_n.

(c) احسب القيمة $L_n^2 - 5F_n^2$ لكل $1 \le n \le 10$. أوجد حدسية عن هذه القيمة. برهن أن تخمينك صحيح.

(d) بين أن L_{3n} , F_{3n} زوجيان لأي قيمة لـ n.

وفق بين هذه الحقيقة والصيغة التي اكتشفتها في (c)، أوجد معادلة مهمة يُحقِقْها زوج الأعداد $\left(\frac{1}{2}L_{3n}, \frac{1}{2}F_{3n}\right)$. اربط إجابتك مع مادة الفصلين الثلاثون والثاني والثلاثون.

(٣٧,٥) اكتب الحدود القليلة الأولى للمتتاليات الإرجاعية الخطية التالية، ثم أوجد صيغة للحد n^{th} تماماً كصيغة Binet للحد n^{th} في أعداد فيبوناتشي. كن متأكداً من أن صيغتك صحيحة للقيم القليلة الأولى.

$(a)\ A_n = 3A_{n-1} + 10A_{n-2} \qquad A_1 = 1 \qquad A_2 = 3$

$(b)\ B_n = 2B_{n-1} - 4B_{n-2} \qquad B_1 = 0 \qquad B_2 = -2$

$(c)\ C_n = 4C_{n-1} - C_{n-2} - 6C_{n-3} \qquad C_1 = 0 \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = 1$

[مساعدة: بالنسبة إلى (b) فأنت تحتاج لاستخدام الأعداد المركبة. بالنسبة إلى (c) ، كثير الحدود التكعيبي له جذور صحيحة صغيرة].

(٣٧,٦) لتكن P_n متتالية إرجاعية خطية معرفة كما يلي:

$$P_n = P_{n-1} + 4P_{n-2} - 4P_{n-3} \quad , \quad P_1 = 1\ ,\ P_2 = 9\ ,\ P_3 = 1$$

(a) اكتب أول عشرة حدود من المتتالية P_n .

(b) هل سلوك هذه المتتالية غريب؟

(c) أوجد صيغة للمتتالية P_n كصيغة Binet. هل صيغتك للمتتالية تشرح السلوك الغريب الذي لاحظته في (b)؟

(٣٧,٧) • هذا السؤال يتطلب بعض المعرفة في التفاضل والتكامل)

(a) احسب قيمة النهاية

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\log(F_n)}{n}$$

حيث F_n عدد فيبوناتشي n^{th} .

(b) احسب $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left(\log(A_n)\right)/n$ ، حيث A_n هي المتتالية الواردة في التمرين 37.5 (a).

(c) احسب $\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\log\left(\left|B_n\right|\right)\right)/n$ ، حيث B_n هي المتتالية الواردة في التمرين 37.5 (b).

(d) احسب $\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\log\left(\left|C_n\right|\right)\right)/n$ ، حيث C_n هي المتتالية الواردة في التمرين 37. (c).

(٣٧,٨) اكتب الحدود القليلة الأولى لكل من المتتاليات الإرجاعية غير الخطية التالية. هل تستطيع إيجاد صيغة بسيطة للحد n^{th} ؟ هل يمكنك إيجاد أي أنماط في قائمة الحدود؟

$$(a)\quad D_n = D_{n-1} + D_{n-2}^2 \qquad D_1 = 1 \qquad D_2 = 1$$
$$(b)\quad E_n = E_{n-1}E_{n-2} + E_{n-3} \qquad E_1 = 1 \qquad E_2 = 2 \qquad E_3 = 1$$

(٣٧,٩) قلنا إن متتالية فيبوناتشي قياس m دائماً تكرر نفسها بحيث تبدأ بالعدد 1 مكرر مرتين متتاليتين، لكننا لم نثبت أن هذا صحيح.
هل تعتقد أن هذا واضح؟ إذا نعم، لماذا؟ وإذا لا ، إما أن تثبت أن هذا صحيح وإما أن تأتي بمثال مناقض.

(٣٧,١٠) ليكن $N = N(m)$ دورة متتالية فيبوناتشي قياس m .
(a) ما قيمة F_n قياس m ؟ ما قيمة F_{n-1} قياس m ؟
(b) اكتب متتالية فيبوناتشي قياس m بالاتجاه العكسي:

$$F_{N-1}, F_{N-2}, F_{N-3}, \ldots, F_3, F_2, F_1 \pmod{m}$$

اعمل ذلك لعدة قيم لـ m ، وحاول إيجاد نمط.
(مساعدة: سوف يصبح النمط أوضح إذا أخذت بعض القيم قياس m واقعة بين $-1, -m$ ، بدلاً من أن تكون بين $1, m$).

(c) برهن أن النمط الذي أوجدته في (b) صحيح.

(٣٧,١١) يبين الجدول 37.1 أنه إذا كان $m \geq 3$ فإن الدورة $N(m)$ لمتتالية فيبوناتشي قياس m دائماً عدد زوجي. برهن أن هذا صحيح، أو أوجد مثالاً مناقضاً.

(٣٧,١٢) ليكن $N(m)$ الدورة لمتتالية فيبوناتشي قياس m.

(a) استخدم الجدول 37.1 لتقارن قيم $N(m_1m_2)$, $N(m_2)$, $N(m_1)$ لعدة قيم لـ m_1 , m_2 ، خصوصاً عندما يكون $\gcd(m_1, m_2) = 1$.

(b) اعمل تخميناً يربط بين $N(m_1m_2)$, $N(m_2)$, $N(m_1)$ عندما $\gcd(m_1, m_2) = 1$.

(c) استخدم تخمينك في (b) لتخمن القيم $N(5184)$, $N(6887)$.

(مساعدة: $6887 = 71 \cdot 97$)

(d) برهن أن تخمينك في (b) صحيح.

(٣٧,١٣) لتكن $N(m)$ دورة متتالية فيبوناتشي قياس m .

الجدول رقم (٣٧,١). الدورة $N(m)$ لمتتالية فيبوناتشي قياس m .

m	$N(m)$	m	$N(m)$	m	$N(m)$	m	$N(m)$	m	$N(m)$
1	—	21	16	41	40	61	60	81	216
2	3	22	30	42	48	62	30	82	120
3	8	23	48	43	88	63	48	83	168
4	6	24	24	44	30	64	96	84	48
5	20	25	100	45	120	65	140	85	180
6	24	26	84	46	48	66	120	86	264
7	16	27	72	47	32	67	136	87	56
8	12	28	48	48	24	68	36	88	60
9	24	29	14	49	112	69	148	89	44
10	60	30	120	50	300	70	240	90	120
11	10	31	30	51	72	71	70	91	112
12	24	32	48	52	84	72	24	92	48
13	28	33	40	53	108	73	148	93	120
14	48	34	36	54	72	74	228	94	96
15	40	35	80	55	20	75	200	95	180
16	24	36	24	56	48	76	18	96	48
17	36	37	76	57	72	77	80	97	196
18	24	38	18	58	42	78	168	98	336
19	18	39	56	59	58	79	78	99	120
20	60	40	40	60	120	80	120	100	300

(a) استخدم الجدول 37.1 لتقارن القيم $N(p)$, $N(p^2)$ لعدة أعداد أولية p .

(b) اعمل تخميناً يربط بين $N(p)$, $N(p^2)$ عندما يكون p أوليًّا.

(c) بشكل عام، اعمل تخمين يربط بين القيمة $N(p)$ وجميع قيم القوى العليا $N(p^2), N(p^3), N(p^4), \ldots$

(d) استخدم تخمينك في (b) و (c) لتخمن القيم $N(729), N(1024), N(2209)$.

(مساعدة: $47^2 = 2209$. يمكنك تحليل 729,1024 بنفسك!)

(e) حاول إثبات تخمينك في (b) و(c).

(٣٧,١٤) لتكن $N(m)$ دورة متتالية فيبوناتشي قياس m .

(a) استخدم جدول 37.1 لعمل قائمة للدورات $N(p)$ لمتتالية فيبوناتشي قياس p ، حيث p عدد أولي.

(b) هناك عددان أوليان يجعلان $N(p)$ استثناءاً إلى حد ما. أحد هذين العددين الأوليين هو (كالعادة) $p = 2$.

أوجد العدد الأولي الاستثنائي الآخر، واشرح لماذا تعتقد أنه استثنائي.

(c) لا توجد صيغة معروفة تماماً تعطي قيمة $N(p)$. لكن يوجد عدد لأنماط القسمة. مثلاً، من القيم الخمسة:

$$N(71) = 70 \ , \ N(61) = 60 \ , \ N(41) = 40 \ , N(31) = 30 \ , N(11) = 10$$

المبينة في الجدول، قد نخمن أن $N(p) = p - 1$ عندما $p \equiv 1 \pmod{10}$ (بمعنى، عندما يكون آخر خانة للعدد p هي 1). لسوء الحظ هذا التخمين غير صحيح؛ لأننا إذا كبرنا الجدول لأعداد أولية أكبر، نجد أن:

$$N(101)=50, N(131)=130, N(151)=50, N(181)=90$$
$$N(191)=190, N(211)=42, N(241)=240, N(251)=250$$
$$N(271)=270, N(281)=56, N(311)=310, N(331)=110$$
$$N(401)=200, N(421)=84, N(431)=430$$

لكننا نلاحظ أن $N(p)$ دائماً ما يبدو قاسماً لـ $p-1$. حاول إيجاد أنماط قسمة مشابهة لنوع آخر من الأعداد الأولية (بمعنى، لأعداد أولية آخر خانة فيها ليست 1). قد يكون من المفيد تكبير جدولك في (a) ، خصوصاً إذا كنت قادراً على برمجة جهاز الحاسب ليساعدك.

(d) برهن النمط المُلاحظ في (c): إذا كان $p \equiv 1 \pmod{10}$ فإن $N(p)$ يقسم $p-1$.

(مساعدة: هذه مسألة صعبة. إحدى طرق حلها هي استخدام صيغة Binet لعدد فيبوناتشي n^{th} ، لكنك تحتاج أولاً لإيجاد عدد قياس p ليلعب دور العدد $\sqrt{5}$. كذلك سوف تحتاج لاستخدام نظرية فيرما الصغرى).

(٣٧,١٥) أعداد فيبوناتشي تحقق العديد من المتطابقات المدهشة.

(a) احسب المقدار $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ للأعداد الصحيحة القليلة الأولى $n = 2, 3, 4, \ldots$ وحاول أن تخمن قيمته.

(مساعدة: إنه يساوي عدد فيبوناتشي) برهن أن تخمينك صحيح.

(b) نفس السؤال (ونفس المساعدة!) للمقدار $F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$.

(c) نفس السؤال (لكن ليس نفس المساعدة!) للمقدار $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$.

(d) نفس السؤال للمقدار $4F_nF_{n-1} + F_{n-2}^2$.(مساعدة: قارن القيمة مع تربيع عدد فيبوناتشي).

(e) نفس السؤال للمقدار $F_{n+4}^4 - 4F_{n+3}^4 - 19F_{n+2}^4 - 4F_{n+1}^4 + F_n^4$.