معاملات ذي الحدين ومثلث باسكال

Binomial Coefficients and Pascal's Triangle

سنبدأ هذا الفصل بقائمة قصيرة من قوى $A+B$.

$$(A+B)^0 = 1$$
$$(A+B)^1 = A+B$$
$$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$$
$$(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$
$$(A+B)^4 = A^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3+B^4$$

إن هناك الكثير من الأنماط الجميلة كامنة في هذه القائمة، بعضها واضح جدًّا وبعضها الآخر غامض. قبل أن تكمل القراءة يجب عليك أن تقوم بالبحث بنفسك عن هذه الأنماط.

نحن نبحث في هذا الفصل عن مفكوك المقدار $(A+B)^n$. من الواضح من الأمثلة السابقة أننا نحصل على مفكوك يشبه:

$$(A+B)^n = \square A^n + \square A^{n-1}B + \square A^{n-2}B^2 + \square A^{n-3}B^3 + \cdots + \square A^2B^{n-2} + \square AB^{n-1} + \square B^n$$

حيث نحتاج لملأ هذه المربعات الفارغة بأعداد صحيحة.

واضح أن المربع الأول والأخير سيملآن بالعدد 1 ، ويتضح من الأمثلة أن المربع الثاني والمربع ما قبل الأخير سيحويان العدد n. لسوء الحظ ، ليس واضحاً ما يجب أن تحويه المربعات الفارغة الأخرى ، لكن نقص المعرفة هذا لا يمنعنا من إعطاء هذه الأعداد اسماً ما. الأعداد الظاهرة في مفكوك $(A+B)^n$ تسمى معاملات ذي الحدين *binomial coefficient*، لأن المقدار $A+B$ ذو حدين (بمعنى ، مقدار يحوي حدين)، والأعداد التي نقوم بدراستها تظهر كمعاملات عندما يُرفع ذي الحدين $A+B$ إلى قوة ما. إن هناك العديد من الرموز المختلفة التي تستخدم للتعبير عن معاملات ذو الحدين[١]. سنستخدم الرمز :

$$\binom{n}{k} = \text{معامل } A^{n-k}B^k \text{ في } (A+B)^n.$$

إذن باستخدام رموز معامل ذي الحدين ، فإن مفكوك $(A+B)^n$ يظهر كما يلي :

$$\binom{n}{0}A^n+\binom{n}{1}A^{n-1}B+\binom{n}{2}A^{n-2}B^2+\cdots+\binom{n}{k}A^{n-k}B^k+\cdots+\binom{n}{n}B^n$$

لدراسة معاملات ذي الحدين ، من المناسب أن نرتبها على شكل مثلث ، حيث يحوي الصف n^{th} من المثلث معاملات ذي الحدين الظاهرة في مفكوك $(A+B)^n$. هذا الترتيب يسمى مثلث باسكال (Pascal) نسبة إلى الرياضي والفيلسوف الفرنسي Blasie Pascal الذي عاش في القرن السابع عشر.

(١) معامل ذي الحدين $\binom{n}{k}$ يسمى أيضاً العدد المدمج ويرمز له بالرمز ${}_nC_k$.

$$
\begin{array}{ll}
(A+B)^0 = & \binom{0}{0} \\
(A+B)^1 = & \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
(A+B)^2 = & \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
(A+B)^3 = & \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
(A+B)^4 = & \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}
\end{array}
$$

أول خمسة صفوف من مثلث باسكال

يمكننا استخدام القائمة الواردة في بداية هذا الفصل للتعويض عن رموز مثلث باسكال بالقيم:

$$
\begin{array}{ll}
(A+B)^0 = & 1 \\
(A+B)^1 = & 1 \quad 1 \\
(A+B)^2 = & 1 \quad 2 \quad 1 \\
(A+B)^3 = & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
(A+B)^4 = & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1
\end{array}
$$

كيف يمكننا إيجاد الصف التالي في مثلث باسكال؟

إحدى الطرق هي إيجاد مفكوك المقدار $(A+B)^5$ ومن ثم تسجيل المعاملات. الطريقة الأسهل هي بأخذ المفكوك المعروف مسبقاً للمقدار $(A+B)^4$ وضربه بالمقدار $A+B$ لنحصل على $(A+B)^5$.

$$\begin{array}{r} (A+B)^4 \\ \times \quad A+B \\ \hline (A+B)^5 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrr} & A^4 & +\ 4A^3B & +\ 6A^2B^2 & +\ 4AB^3 & +\ B^4 \\ \times & & & & A & +\ B \\ \hline & & A^4B & +\ 4A^3B^2 & +\ 6A^2B^3 & +\ 4AB^4 \quad +\ B^5 \\ A^5 & +\ 4A^4B & +\ 6A^3B^2 & +\ 4A^2B^3 & +\ AB^4 & \\ \hline A^5 & +\ 5A^4B & +\ 10A^3B^2 & +\ 10A^2B^3 & +\ 5AB^4 & +\ B^5 \end{array}$$

إذن الصف التالي في مثلث باسكال هو :

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

يمكننا استخدام هذه الفكرة البسيطة :

$$(A+B)^{n+1} = (A+B)\cdot(A+B)^n$$

لاشــتقاق العلاقــة الأساســية لمعــاملات ذي الحــدين . إذا ضــربنا $(A+B)^n$ بالمقدار $A+B$ كما فعلنا سابقاً فسنجد أن :

$$\begin{array}{l} \qquad \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \cdots + \binom{n}{n-1}AB^{n-1} + \binom{n}{n}B^n \\ \times \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A \quad + \quad B \\ \hline \qquad \binom{n}{0}A^nB + \binom{n}{1}A^{n-1}B^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}AB^n + \binom{n}{n}B^{n+1} \\ \binom{n}{0}A^{n+1} + \binom{n}{1}A^nB + \binom{n}{2}A^{n-1}B^2 + \cdots + \binom{n}{n}AB^n \\ \hline \binom{n+1}{0}A^{n+1} + \binom{n+1}{1}A^nB + \binom{n+1}{2}A^{n-1}B^2 + \cdots + \binom{n+1}{n}AB^n + \binom{n+1}{n+1}B^{n+1} \end{array}$$

إذن ، وعلى سبيل المثال :

$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{1}$, $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2}$ وهكذا.

نظرية (١,٣٦) (صيغة الجمع لمعاملات ذو الحدين)

لتكن $0 \le k \le n$ أعداداً صحيحة ، فإن :

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$$

صيغة الجمع هذه تصف خاصية عجيبة لمثلث باسكال : كل عدد في المثلث يساوي مجموع العددين اللذين فوقه ، فمثلاً ، وجدنا سابقاً أن الصف $n=5$ في مثلث باسكال هو :

1	5	10	10	5	1

إذن الصف $n=6$ يمكن حسابه بجمع زوج متجاور في الصف $n=5$ ، كما يتضح هنا :

الصف $n=5$ 1   5   10   10   5   1

+   +   +   +   +

الصف $n=6$ 1   6   15   20   15   6   1

إذن :

$$(A+B)^6=A^6+6A^5B+15A^4B^2+20A^3B^3+15A^2B^4+6AB^5+B^6$$

هنا صورة لمثلث باسكال توضح صيغة جمع معاملات ذي الحدين.

$[n=0]$	1
$[n=1]$	1 1
$[n=2]$	1 2 1
$[n=3]$	1 3 3 1
$[n=4]$	1 4 6 4 1
$[n=5]$	1 5 10 10 5 1
$[n=6]$	1 6 15 20 15 6 1

مثلث باسكال يوضح القانون $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

هـدفنا التـالي هـو اشـتقاق الصـيغة الكاملـة لمعـاملات ذو الحـدين. إن هـذا يوضح طريقة بسيطة ولكنها فعَّالة جدًّا، وتستخدم كثيراً في تطوير الرياضيات الحديثة. يمكنك في أي وقت حساب

مقـدار مـا بطـريقتين مختلفـتين، ومقارنـة الصـيغ الناتجـة يـؤدي إلى معلومـة مهمـة ومفيدة.

لإيجاد صيغة جديدة لمعامل ذي الحدين، فسوف نبحث فيما يحدث عندما نجد مفكوك المقدار:

$$(A+B)^n = (A+B)(A+B)\cdots(A+B)(A+B)$$

دعنا نبدأ بالحالة الخاصة :

$$(A+B)^3=(A+B)(A+B)(A+B)$$

من طرق العد نجد أن هناك ثمانية حدود. كم حد من هذه الحدود يساوي A^3 ؟ الطريقة الوحيدة للحصول على A^3 هي باختيار A من كل عامل ؛ لذلك فهناك طريقة واحدة فقط للحصول على A^3.

الآن ، كم عدد الطرق للحصول على A^2B ؟ يمكننا الحصول على A^2B بالطرق التالية :

- A من العامل الأول والثاني و B من العامل الثالث ،

$$(\underset{\uparrow}{A}+B)(\underset{\uparrow}{A}+B)(A+\underset{\uparrow}{B})$$

- A من العامل الأول والثالث و B من العامل الثاني ،

$$(\underset{\uparrow}{A}+B)(A+\underset{\uparrow}{B})(\underset{\uparrow}{A}+B)$$

- A من العامل الثاني والثالث و B من العامل الأول ،

$$(A+\underset{\uparrow}{B})(\underset{\uparrow}{A}+B)(A+\underset{\uparrow}{B})$$

إذن هناك ثلاثة احتمالات للحصول على الحد A^2B. هذا يبين أن معامل A^2B في مفكوك $(A+B)^3$ هو 3 ، إذن معامل ذي الحدين $\binom{3}{1}$ يساوي 3.

الآن يمكننا أن نعمم هذه الطريقة لحساب عدد الطرق المختلفة للحصول على الحد A^kB^{n-k} في المضروب.

$$\overbrace{(A+B)(A+B)(A+B)\cdots(A+B)(A+B)}^{n\text{حد}}$$

يمكننا أن نحصل على الحد A^kB^{n-k} باختيار A من أي k من العوامل ثم اختيار B من العوامل المتبقية $n-k$ ، لذلك نحتاج لحساب عدد طرق اختيار k من العوامل.

إن هناك n طريقة لاختيار العامل الأول. بعد هذا الاختيار يبقى هناك $n-1$ عامل لعمل الاختيار الثاني. بعد هذين الاختيارين يبقى هناك $n-2$ عامل لعمل اختيارنا الثالث.

وهكذا، إذن هناك :

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

طريقة لاختيار k من العوامل من بين n من العوامل.

لسوء الحظ، نحن حسبنا عدد طرق أكثر من الصحيح للحصول على الحد A^kB^{n-k} ، لأننا حسبنا اختياراتنا على ترتيب معين، لتوضيح هذه المسألة، سنرجع إلى مثالنا $n=3$. في هذه الحالة كانت إحدى طرق الحصول على A^2B هو بأخذ A من العاملين الأول والثالث، ولكننا حسبنا هذا الاختيار مرتين ؛ لأننا حسبناه مرة على أنه :

"الاختيار الأول العامل الأول، ثم اختيار العامل الثالث" وحسبناه مرة أخرى على أنه :

"الاختيار الأول العامل الثالث، ثم اختيار العامل الأول" لذلك فإن العدد الفعلي للحدود A^kB^{n-k} في $(A+B)^n$ هو :

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

مقسوماً على عدد الترتيبات المختلفة التي يمكن أن نعمل منها خياراتنا. تذكر أننا عملنا k من الخيارات؛ لذلك فإن عدد الترتيبات المختلفة لهذه الخيارات هو $k!$. وحيث إنه يمكننا وضع أي k من الخيارات أولاً، فإن أي من الخيارات $k-1$ الباقية تكون ثانياً، وهكذا. لذلك فإن عدد طرق الحصول على الحد $A^k B^{n-k}$ في مفكوك $(A+B)^n$ يساوي:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

طبعاً، هذا بالضبط هو عامل ذو الحدين $\binom{n}{k}$، وبذلك نكون قد أثبتنا نظرية ذو الحدين الشهيرة.

نظرية (٢, ٣٦) (نظرية ذي الحدين)

معاملات ذو الحدين في المفكوك:

$$(A+B)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \binom{n}{2}A^{n-2}B^2 + \cdots + \binom{n}{n}B^n$$

تعطى بالصيغة:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

البرهان

لقد أثبتنا الجزء الصعب من هذه النظرية وهو المعادلة الأولى. للحصول على الصيغة الثانية، سنضرب بسط ومقام الكسر الأول بالمقدار $(n-k)!$ لنحصل على:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

على سبيل المثال، عامل A^4B^3 في $(A+B)^7$ يساوي :

$$\binom{7}{3}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3!}=\frac{210}{6}=35$$

مثال آخر، عامل A^8B^{11} في $(A+B)^{19}$ هو :

$$\begin{aligned}\binom{19}{11}&=\frac{19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{11!}\\&=\frac{3016991577600}{39916800}\\&=75582\end{aligned}$$

بالطبع، إذا كان k أكبر من $n/2$ ، كما في المثال الأخير، فإنه من الأسهل أن نستخدم أولاً الصيغة المتناظرة لمعامل ذو الحدين :

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

إن الصيغة المتناظرة تقول ببساطة إن الحدين A^kB^{n-k} و $A^{n-k}B^k$ في مفكوك $(A+B)^n$ لهما نفس العامل. من الواضح أن هذا صحيح لأنه لا يوجد ما يميز A , B أحدهما عن الآخر. باستخدام الصيغة المتناظرة يمكننا أن نحسب :

$$\begin{aligned}\binom{19}{11}=\binom{19}{8}&=\frac{19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12}{8!}\\&=\frac{3047466240}{40320}=75582\end{aligned}$$

" معاملات ذي الحدين قياس p "

ماذا يحدث إذا اختزلنا معامل ذي الحدين $\binom{n}{k}$ قياس p ، حيث p عدد أولي؟ هنا سنعرض كيف يبدو أولى صفوف مثلث باسكال قياس 5 وقياس 7.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 3 3 5 1
1 6 1 6 1 6 1
1 0 0 0 0 0 0 1

مثلث باسكال قياس 7

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 1 4 1
1 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 1 1
1 2 1 0 0 1 2 1

مثلث باسكال قياس 5

لاحظ أن السطر $n=5$ لمثلث باسكال قياس 5 هو 1 0 0 0 0 1 ، كذلك السطر $n=7$ لمثلث باسكال قياس 7 هو 1 0 0 0 0 0 0 1 . معنى هذا أن $\binom{p}{k}$ يجب أن يساوي صفراً قياس p إذا كان $1 \le k \le p-1$. هذه الملاحظة تساعدنا على إعطاء صيغة بسيطة ورائعة لنظرية ذي الحدين قياس p وتسهل علينا الإثبات.

نظرية (٣,٣٦) (نظرية ذي الحدين قياس p)

ليكن p عدداً أوليًّا.

(a) معامل ذي الحدين $\binom{p}{k}$ يطابق:

$$\binom{p}{k} \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p} & \text{if} \quad 1 \le k \le p-1 \\ 1 \pmod{p} & \text{if} \quad k = 0 \text{ or } k = p \end{cases}$$

(b) لأي عددين A , B فإن:

$$(A+B)^k \equiv A^p + B^p \pmod{p}$$

البرهان

(a) إذا كـان $k=0$ أو $k=p$ فـإن $\binom{p}{k}=1$. إذن المسـألة المهمـة هـي أن نجـد ماذا يحدث عندما تكون k بين 1 , $p-1$. دعنا نأخذ حالة خاصة مثل $\binom{7}{5}$ ، وحاول أن تفهم ماذا يحدث. صيغتنا لمعامل ذي الحدين هذا هي :

$$\binom{7}{5}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

لاحظ أن العدد 7 ظاهر في البسط ولا يوجد العدد 7 في المقام لإلغـاء العـدد 7 الذي في البسط. إذن $\binom{7}{5}$ يقبل القسمة على 7 ، وهذا معناه أن $\binom{7}{5}$ يطـابق 0 قيـاس 7.

هذه الفكرة يمكن تعميمها . معامل ذي الحدين $\binom{p}{k}$ يساوي :

$$\binom{p}{k}=\frac{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdots(p-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots 2\cdot 1}$$

إذن $\binom{p}{k}$ لـه p في البسـط (حيث $k\geq 1$)، ولا يوجـد أي p في المقـام لإلغـاء p الموجودة في البسط (حيث $k\leq p-1$). لذلك ؛ فإن $\binom{p}{k}$ يقبل القسمة علـى p ، إذن فهو يطابق 0 قياس p .

هل ترى أين استخدمنا حقيقة أن p أولي؟

إذا لم يكـن p أوليًّـا ، فإنـه قـد يحـدث أن بعـض الأعـداد الصـغيرة الموجـودة في المقام ستلغي p أو جزءاً منه. لذلك فإن برهاننا لا يكون صحيحاً للأعداد غير الأوليـة. بمعنى آخر ، نحن لم نثبت أن $\binom{n}{k}\equiv 0 \pmod{n}$ لأعـداد غـير أوليـة n . هـل تعتقـد أن هذه العبارة الأكثر عمومية صحيحة؟

(b) باستخدام نظرية ذي الحدين والفرع (a) من السهل حساب :

$$\begin{aligned}(A+B)^p &= \binom{p}{0}A^p + \binom{p}{1}A^{p-1}B + \binom{p}{2}A^{p-2}B^2 \\ &\quad + \cdots + \binom{p}{p-2}A^2B^{p-2} + \binom{p}{p-1}AB^{p-1} + \binom{p}{p}B^p \\ &\equiv 1\cdot A^p + 0\cdot A^{p-1}B + 0\cdot A^{p-2}B^2 \\ &\quad + \cdots + 0\cdot A^2B^{p-2} + 0\cdot AB^{p-1} + 1\cdot B^p \pmod p \\ &\equiv A^p + B^p \pmod p\end{aligned}$$

الصيغة :

$$(A+B)^p \equiv A^p + B^p \pmod p$$

هي إحدى أهم الصيغ في كل نظرية الأعداد. إنها تقول إن القوة p^{th} للمجموع تطابق المجموع للقوى p^{th} . يمكننا استخدام هذه الصيغة لإعطاء برهان جديد لنظرية فيرما الصغرى. يجب عليك أن تقارن هذا البرهان مع البرهان الذي عرضناه في الفصل 9. كل برهان يناقش الصيغة من وجهة نظر مختلفة. أي البرهانين أفضل بالنسبة لك؟

نظرية (٤, ٣٦) (نظرية فيرما الصغرى)

ليكن p عدداً أوليًا ، وليكن a أي عدد ، حيث $a \not\equiv 0 \pmod p$. فإن:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

البرهان بالاستقراء

سنبدأ باستخدام الاستقراء لإثبات أن الصيغة :

$$a^p \equiv a \pmod p$$

صحيحة لأي عدد a. واضح أن هذه الصيغة صحيحة عندما $a=0$ ، والتي تعطي نقطة البداية لاستقرائنا. الآن لنفرض أن هذه الصيغة صحيحة لبعض قيم a. عندئذ فإن:

$(a+1)^p \equiv a^p + 1^p \pmod p$ (باستخدام نظرية ذي الحدين قياس p حيث $A=a$ و $B=1$). $\equiv a+1 \pmod p$ (لأن $a^p \equiv a \pmod p$ من فرض الاستقراء)

هذا يكمل البرهان من خلال استقراء الصيغة:

$$a^p \equiv a \pmod p$$

هذا يعني أن p يقسم $a^p - a$ ، إذن:

p يقسم $a\left(a^{p-1}-1\right)$.

وحيث إن p لا يقسم a من الفرض، فإننا نستنتج أن:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

وبذلك نكون قد برهنا نظرية فيرما الصغرى.

تمارين

(٣٦,١) احسب كل من معاملات ذي الحدين التالية:

$$(a)\ \binom{10}{5} \qquad (b)\ \binom{20}{10} \qquad (c)\ \binom{15}{11} \qquad (d)\ \binom{300}{297}$$

(٣٦,٢) استخدم الصيغة $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ لإثبات صيغة الجمع:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

(٣٦,٣) ما هي القيمة التي نحصل عليها إذا جمعنا الصف:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

في مثلث باسكال؟ احسب بعض القيم، صغ تخميناً، وبرهن أن تخمينك صحيح.

(٣٦,٤) إذا استخدمنا الصيغة :

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

لتعريف معامل ذي الحدين $\binom{n}{k}$ ، عندئذ فإن معامل ذي الحدين يعطي قيمة لأي قيمة للعدد n طالما k عدد صحيح غير سالب.

(a) أوجد صيغة بسيطة لحساب $\binom{-1}{k}$ وأثبت أن صيغتك صحيحة.

(b) أوجد صيغة بسيطة لحساب $\binom{-1/2}{k}$ وأثبت أن صيغتك صحيحة.

(٣٦,٥) هذا التمرين يحتاج لبعض المعرفة في التفاضل والتكامل. إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، عندئذ بوضع $A=1$, $B=x$ في صيغة $(A+B)^n$ ينتج :

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n$$

في التمرين السابق لاحظنا أن معامل ذي الحدين $\binom{n}{k}$ يعطي قيمة حتى إذا كان n عدداً صحيحاً غير موجب. افرض أن n عدد صحيح غير موجب، برهن أن المتسلسلة اللانهائية :

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots$$

متقاربة للقيمة $(1+x)^n$ بشرط أن $|x|<1$.

(٣٦,٦) أثبتنا أنه إذا كان p أوليًّا وإذا كان $1 \le k \le p-1$ ، فإن معامل ذي الحدين $\binom{n}{k}$ يقبل القسمة على p.

(a) أوجد مثالاً على عددين صحيحين n , k ؛ حيث $1 \le k \le n-1$ و $\binom{n}{k}$ لا يقبل القسمة على n.

(b) لكل عدد غير أولي $n = 4،6،8،10،12،14$ ، احسب $\binom{n}{k}$ قياس n لكل $1 \le k \le n-1$ وأيها يطابق 0 قياس n.

(c) استخدم البيانات التي حصلت عليها من (b) لتخمن متى يكون معامل ذي الحدين $\binom{n}{k}$ يقبل القسمة على n.

(d) برهن أن تخمينك في (c) صحيح.

(٣٦,٧) (a) احسب قيمة المقدار :

$$\binom{p-1}{k} \pmod p$$

لقيم مختارة لأعداد أولية وأعداد صحيحة $1 \le k \le p-1$ ، وأعط تخميناً عن قيمتها. برهن أن تخمينك صحيح.

(b) أوجد صيغة مشابهة للقيمة :

$$\binom{p-2}{k} \pmod p$$

(٣٦,٨) أثبتنا أن $(A+B)^p \equiv A^p + B^p \pmod p$.

(a) عمم هذه النتيجة لمجموع n من الأعداد. أي برهن أن :

$$(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n)^p \equiv A_1^p + A_2^p + A_3^p + \cdots + A_n^p \pmod p$$

(b) هل صيغة الضرب المناظرة صحيحة ،

؟ $(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \cdots \cdot A_n)^p \equiv A_1^p \cdot A_2^p \cdot A_3^p \cdot \cdots \cdot A_n^p \pmod p$

إما أن تبرهن أنها صحيحة ، وإما أن تعطي مثالاً تبين فيه أنها خطأ.