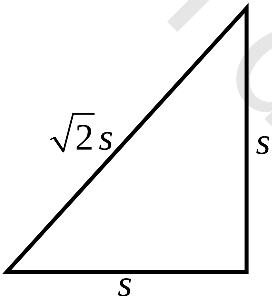
الأعداد غير النسبية والأعداد المتسامية

Irrational Numbers and Transcendental Numbers

في التطور التاريخي للأعداد والرياضيات ، فإن الكسور (وتسمى أيضاً الأعداد النسبية لأنها نسب) ظهرت مبكراً ، فقد استخدمت في مصر القديمة حوالي العام 1700 قبل الميلاد. لقد ظهرت الأعداد النسبية بشكل طبيعي عندما احتاج الناس لتقسيم الأرض أو القماش أو الذهب أو أي شيء آخر إلى أجزاء. كذلك ظهرت الكسور لمقارنة مقدارين. لنأخذ مثالاً واقعيًّا ، المسافة من القاهرة إلى الأقصر أكبر من ضعف المسافة من القاهرة إلى الإسكندرية ، لكنها أصغر من ثلاثة أضعافها. هذه جملة مفيدة ولكنها غير دقيقة. ولنكون أكثر دقة يكفي أن نقول إن المسافة الأولى تساوي $\frac{17}{6}$ ضعف المسافة الثانية. هذا يعني أن ستة أضعاف المسافة من القاهرة إلى الأقصر تساوي سبعة عشر ضعف المسافة من القاهرة إلى الإسكندرية. نقول أن كميتين متناسبتين إذا كان حاصل ضرب عدد صحيح غير صفري بالكمية الأولى يساوي حاصل ضرب عدد صحيح غير صفري بالكمية الثانية ؛ أو بشكل مكافئ ، إذا كانت نسبتهم عدداً نسبيًّا. لاحظ أن هذا يبين كيفية قياسنا للمسافات في هذا العصر. فعندما نقول إن مركز المدينة يبعد 3.7 ميلاً ، فالذي نعنيه أن 10 أضعاف بعد مركز المدينة يساوي 37 ضعف طول مسافة

قياسية تسمى "ميلاً". لقد اعتقد الناس ولوقت طويل أن كل عدد هو عدد نسبي. بالمصطلحات الهندسية، إفترض الناس أن أي مسافتين متناسبيتان. أول إشارة ظهرت تدل على أن هذا الاعتقاد قد يكون غير صحيح كانت في اليونان قبل 2500 سنة تقريباً. على الرغم من أن نظرية فيثاغورس عُرِفت قبل زمن فيثاغورس بوقت طويل، فقد لاحظ أحدهم (قد يكون فيثاغورس نفسه) – في اليونان القديمة – أن الوتر في المثلث المتطابق الضلعين القائم (انظر الشكل رقم (٣٥,١) لا يتناسب مع ساقيه.

على سبيل المثال، تخبرنا نظرية فيثاغورس أن المثلث المتطابق الضلعين القائم الذي طول كل من ساقيه 1 يكون طول وتره $\sqrt{2}$. من غير المعروف بالضبط كيف استنتج الفيثاغوريون أن الساقين والوتر في هذا المثلث هما مقداران غير متناسبين، لكن البرهان الأنيق التالي على عدم نسبية $\sqrt{2}$ ظهر في الكتاب العاشر في أصول إقليدس.



الشكل رقم (٣٥,١). عدم نسبية الوتر.

نظرية (٣٥,١). (نظرية عدم نسبية $\sqrt{2}$)

الجذر التربيعي للعدد 2 غير نسبي. أي لا يوجد عدد نسبي يحقق المعادلة $r^2 = 2$.

البرهان

لنفرض أنه يوجد عدد نسبي r يحقق المعادلة $r^2 = 2$ ، وسنستخدم فرض وجود العدد r لننهي البرهان بالتناقض ، وعليه فإن الفرض خاطئ. هذا التناقض يبين أن r غير موجود. كما لاحظنا في الفصل 34. فإن طريقة البرهان هذه تعد أداة فعَّالة في الترسانة الرياضية.

الآن ، لنفرض أن r عدد نسبي يحقق المعادلة $r^2 = 2$. بما أن r عدد نسبي فإنه بإمكاننا كتابته على شكل كسر $r = a/b$ ، وبما أنه يمكننا دائماً شطب العوامل المشتركة بين البسط والمقام ، فإنه بإمكاننا افتراض أن a , b أوليان نسبيًّا. بمعنى أننا نكتب r على شكل كسر في أبسط صورة.

افتراض أن $r^2 = 2$ يعني :

$$a^2 = 2b^2$$

أي أن a^2 زوجي ، إذاً a زوجي ، وليكن $a = 2A$. بالتعويض وحذف 2 من الطرفين فإن :

$$2A^2 = b^2$$

إذاً b يجب أن يكون أيضاً زوجيًّا. لكن a , b أوليان نسبيًّا ، لذلك لا يمكن أن يكون كلاهما زوجيًّا ، وبذلك نحصل على التناقض المطلوب ، بما أن وجود r يقودنا إلى تناقض ، فإننا نستنتج أن r لا يمكن أن يكون موجوداً. لذلك لا يوجد عدد نسبي تربيعه يساوي 2 .

هذا البرهان على عدم نسبية $\sqrt{2}$ يمكن تعميمه بعدة طرق. مثلاً ، دعنا نثبت أنه إذا كان p أي عدد أولي فإن $\sqrt{p}$ غير نسبي. كما فعلنا من قبل ، نفرض أنه يوجد عدد نسبي r يحقق المعادلة $r^2 = p$ ونحاول أن نحصل على تناقض. نكتب $r = a/b$

ككسر بأبسط صورة، إذاً:

$$a^2 = p \cdot b^2$$

إذاً p يقسم a^2.

في الفصل السابع بيَّنّا أنه إذا كان عدد أولي يقسم حاصل ضرب عددين فإنه يقسم أحدهما على الأقل. في هذه الحالة، العدد الأولي p يقسم الضرب $a \cdot a$ ، إذاً نستنتج أن p يقسم a ، إذاً ليكن $a = pA$. بالتعويض وشطب p ينتج:

$$p \cdot A^2 = b^2$$

إذاً لنفس السبب نستنتج أن p يقسم b . لذلك فإن p يقسم كل من a , b ، والذي يتناقض مع حقيقة أن a , b أوليان نسبيًّا. إذاً r لا يمكن أن تكون موجودة ، وهذا ما يثبت أن $\sqrt{p}$ غير نسبي.

فاصل فلسفي

طريقة البرهان بالتناقض تقوم على المبدأ القائل بأنه إذا أدت جملة معينة إلى استنتاج خاطئ فإن الجملة الأصلية نفسها خاطئة. على الرغم من أن الإحساس العام يقول بأن هذا المبدأ صحيح، فإنه في الحقيقة يعتمد على الفرض الضمني القائل بأن الجملة الأصلية يجب أن تكون إما صحيحة وإما خاطئة. الفرض القائل بأن كل جملة إما أن تكون صحيحة وإما خاطئة يسمى "قانون استبعاد الأوسط" *Law of the Excluded Middle*، وبغض النظر عن هذه التسمية المهيبة، فإن قانون استبعاد الأوسط هو فرض (بالمعنى الرياضي مسلمة) يستخدم رسميًّا في بناء الأنظمة الرياضية[١]. بعض

(١) في الحقيقة، إن الحياة أكثر تعقيداً حتى مما يشار إليه في الكتابات الفلسفية المختصرة. لقد أثبت كورت جودل (Kurt Godel) في عام 1930 أن أي نظام رياضي (مثال، نظرية الأعداد) يحوي جمل غير محسوسة، ما يعني أن هذه الجمل لا يمكن برهان صحتها ولا يمكن برهان خطأها من خلال النظام=

الرياضيين والمنطقيين لا يقبلون مبدأ استبعاد الأوسط ، ويبنون النظريات الرياضية دون الاعتماد على البرهان بالتناقض.

عندما نقول إن $\sqrt{2}$ غير نسبي ، فإننا نؤكد على أن كثير الحدود X^2-2 ليس له جذور نسبية ، نفس الشيء عن عدم نسبية $\sqrt{p}$ حيث p أي عدد أولي ، فنقول إن المعادلة X^2-P ليس لها جذور نسبية ، بشكل عام ، كثير الحدود :

$$C_0X^d+C_1X^{d-1}+C_2X^{d-2}+\cdots+C_{d-1}X+C_d$$

بمعاملات صحيحة يكون له على الأرجح العديد من الجذور غير النسبية ، وذلك على الرغم من صعوبة معرفة هذه الجذور. على سبيل المثال ، أحد جذور كثير الحدود :

$$X^{12}-66X^{10}-8X^9+1815X^8-26610X^6+5808X^5+218097X^4$$
$$-85160X^3-971388X^2+352176X+1742288$$

هو العدد الرهيب الشكل(١) :

$$\sqrt{11}+\sqrt[3]{2+\sqrt{7}}$$

من الواضح وجود العديد من كثيرات الحدود بمعاملات صحيحة لها جذور غير نسبية. نقول إن عدداً ما هو "عدد جبري" *(algebraic number)* إذا كان جذر لكثير حدود معاملاته أعداد صحيحة. على سبيل المثال ، الأعداد :

=الرياضي المُعْطى. إن هذا تحدٍّ لك لتحاول أن تتخيل كيف يمكن لشخص أن يثبت أن بعض الجمل لا يمكن إثبات صحتها؟ ماذا تعني كلمة "صحيحة"؟ إذا كنت تؤمن أن المعرفة الرياضية المطلقة موجودة أصلاً وأنها اكتشفت ولم تصنع من قبل الرياضيين (انظر تمرين 32.2 والهامش الثاني في ذلك الفصل) ، فإنه بشكل ما : هل كل عبارة إما أن تكون صحيحة وأما أن تكون خاطئة؟

(١) كيف تعتقد أنني استطعت إيجاد هذا الجذر المعقد لكثير الحدود هذا الضخم.

$\frac{2}{7}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sin(\pi/6)$ وحتـــى $\sqrt[3]{2+\sqrt{7}}+\sqrt{11}$ جميعهـــا أعـــداد جبريـة. لاحـظ أن كـل عـدد نسـبي a/b هـو عـدد جبري ؛ لأنـه جـذر لكـثير الحـدود $bX - a$ ، لكن، كما رأينا ، فالكثير من الأعداد الجبرية هي أعداد ليست نسبية.

نظراً لوفرة الأعداد الجبرية ، فإننا نأمل بأن يكون كـل عـدد غـير نسـبي هـو عـدد جبري ، بمعنى أننا نأمل بأن يكون كل عدد غير نسبي هو جـذر لكثير حـدود بمعـاملات صحيحة. لنأخذ مثـالاً محدداً ، هـل تعتقـد أن العـدد المشـهور $\pi = 3.1415926\cdots$ هـو عدد جبري؟

في منتصف القرن الثامن عشر ، قال "ليونارد أويلر" أن π لـيس عـدداً جبريًّـا[١] . العدد غير الجبري يسمى عـدداً "متسـامياً" *transcendental number* ، لأنـه سمـا علـى أن يكون جذر لكثير حدود معاملاته صحيحة.

أويلر ومعاصروه لم يتمكنوا من إثبات أن π عدد متسامٍ، وفي الحقيقة ، مضـى 100 عـام قبـل أن يثبـت "لاينـدمان" (F. Lindemann) في عـام 1882 أن π عـدد متسـامٍ. لسـوء الحـظ ، فـإن برهـان أن π عـدد متسـامٍ في غايـة الصـعوبة علينـا لعرضـه هنـا. وفي الواقـع ، فإنه لـيس مـن السـهل إثبـات أن أي عـدد غـير نسـبي هـو عـدد متسـامٍ. إن أول شخص عرض عدد متسامٍ كـان "جوزيـف ليوفيـل" (Joseph Liouville) وذلـك في سـنة 1840.

---

(١) كتب أويلر عام 1755 "لقد ظهر بما لا يدع مجالاً للشك أن محيط الدائرة يولد نوعاً غريباً من المقادير المتسامية التي لا يمكن مقارنتها مع مقادير أخرى سواء أكانت جذوراً أم أعداد متسامية أخرى". أثبت "لجندر" عام 1794 أن π^2 هو عدد غير نسبي ، وكتب أن "من المحتمل أن العدد π ليس حتى من بين الأعداد الجبرية غير النسبية .... لكن يبدو أن ذلك صعب إثباته".

سنتبع الآن أسلوب ليوفيل وذلك بأخذ عدد معين ونثبت أنه عـدد متسـامٍ. عـدد ليوفيل أعُطي على أنه عدد عشري ذو خانات عشرية غير مكررة :

$$\beta = 0.\overset{\overset{1}{\downarrow}}{1}\overset{\overset{2}{\downarrow}}{1}000\overset{\overset{6}{\downarrow}}{1}00000000000000000\overset{\overset{24}{\downarrow}}{1}00\cdots00\overset{\overset{120}{\downarrow}}{1}00\cdots00\overset{\overset{720}{\downarrow}}{1}00\cdots$$

بشـكل دقيـق "الواحـد" النـوني $\left(n^{th}\right)$ في المفكـوك العشـري للعـدد β يظهـر في الخانـة $n!^{th}$ (أي في الخانـة العشـرية $n!$)، وجميـع الخانـات العشـرية الباقيـة تكـون أصفاراً. طريقة أخرى لكتابة β هي :

$$\beta = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{24}} + \frac{1}{10^{120}} + \frac{1}{10^{720}} + \cdots$$

أو باستخدام رمز المجموع لمتسلسلة لا نهائية :

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

لإثبـات أن β عـدد متسـامٍ ، فإننـا نحتـاج لإثبـات أن β لـيس جـذراً لأي كـثير حدود بمعاملات صحيحة. كما فعلنا في برهان أن $\sqrt{2}$ غير نسبي ، كذلك سوف نعطي برهاناً بالتناقض . لذلك سوف نفرض أن كثير الحدود :

$$f\left(X\right) = C_0 X^{d} + C_1 X^{d-1} + C_2 X^{d-2} + \cdots + C_{d-1} X + C_d$$

معاملاته صحيحة و $f\left(\beta\right) = 0$. فكـرة ليوفيـل الذهبيـة هـي أنـه إذا كـان عـدد غير نسبي جذراً لكثير حدود ، فإنه لا يمكن أن يكون قريباً جدًّا من عدد نسبي. لذلك ، قبل أن ندرس عدد ليوفيل ، سنعمل جولة سريعة لمناقشة مسألة تقريب عدد غـير نسـبي بعدد نسبي.

ربما نتذكر نظرية ديرشله للتقريب الديوفانتيني (انظر الفصل الواحد والثلاثون)، والتي تنص على أنه لأي عدد غير نسبي α يوجد عدد لا نهائي من الأعداد النسبية a/b بحيث:

$$\left|\frac{a}{b}-\alpha\right|<\frac{1}{b^2}$$

بمعنى آخر، يمكننا إيجاد الكثير من الأعداد النسبية القريبة جدًّا من α. وقد نتساءل فيما إذا كنا قادرين على الحصول على أعداد أقرب. مثلاً، هل توجد أعداد نسبية a/b لا نهائية بحيث:

$$\left|\frac{a}{b}-\alpha\right|<\frac{1}{b^3} \quad ?$$

الجواب يعتمد إلى حد ما على العدد α.

على سبيل المثال، افرض أننا أخذنا $\alpha=\sqrt{2}$ هذا يعني أن α جذر $f(X)=X^2-2$ ؛ لذلك إذا كان a/b قريباً من α ، فإن $f(a/b)$ يجب أن يكون صغيراً جدًّا. كيف يمكن أن نقيس هذه الملاحظة؟ يمكن أن نقيس صِغَر $f(a/b)$ من خلال التحليل:

$$f\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^2-2=\left(\frac{a}{b}+\sqrt{2}\right)\left(\frac{a}{b}-\sqrt{2}\right)$$

إذا كان a/b قريباً من $\sqrt{2}$ ، فإن العامل الأول $a/b+\sqrt{2}$ قريب من $2\sqrt{2}$ ، إذاً من المؤكد أنه سيكون أصغر من (ولنقل) 4. هذا يسمح لنا بالتقدير:

$$\left|f\left(\frac{a}{b}\right)\right|\le 4\left|\frac{a}{b}-\sqrt{2}\right|$$

من جهة أخرى يمكن أن نكتب :

$$f\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^2-2=\frac{a^2-2b^2}{b^2}$$

لاحظ أن البسط a^2-2b^2 عدد صحيح غير صفري. (لماذا لا يساوي صفراً؟ الجواب: لأن $\sqrt{2}$ غير نسبي، ولذلك لا يمكن أن يساوي a/b). بالطبع فنحن لا نعرف قيمة a^2-2b^2 بالضبط، لكننا نعلم أن القيمة المطلقة لعدد صحيح غير صفري تساوي 1[١] على الأقل. لذلك :

$$\left|f\left(\frac{a}{b}\right)\right|=\left|\frac{a^2-2b^2}{b^2}\right|\geq\frac{1}{b^2}$$

نحن الآن لدينا حد أعلى وحد أدنى للمقدار $|f\,(a/b)|$ ، وبوضعهم سويًّا سنحصل على المتباينة المهمة التالية :

$$\frac{1}{4b^2}\leq\left(\frac{a}{b}-\sqrt{2}\right)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

وهي صحيحة لكل عدد نسبي $\frac{a}{b}$. لاحظ كيف أن هذه المتباينة تُكَمّل متباينة ديرشله :

$$\left(\frac{a}{b}-\sqrt{2}\right)<\frac{1}{b^2}$$

---

(١) الحقيقة التي استخدمناها هنا هي الملاحظة البديهية والتي تقول إنه لا توجد أعداد صحيحة بين العددين $1,0$. على الرغم من بديهية هذه الملاحظة ، فإن هذه الحقيقة تقع في بؤرة جميع براهين التسامي. إنها تكافئ خاصية الترتيب على الأعداد غير السالبة، والتي تؤكد على أنه لأي مجموعة من الأعداد الصحيحة غير السالبة يوجد أصغر عنصر.

بشكل خاص، يمكننا استخدام (1) لنثبت أن متباينة أقوى مثل:

$$\left(\frac{a}{b}-\sqrt{2}\right)<\frac{1}{b^{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2)$$

على أن لها فقط عدداً منتهياً من الحلول. لعمل ذلك، من المتباينتين (1) و (2) نستنتج أن:

$\frac{1}{4b^{2}}<\frac{1}{b^{3}}$ ولذلك فإن $b<4$.

هذا يعني أن احتمالات قيم b هي فقط $b=1,2,3$ ؛ وعليه فإنه لكل قيمة للعدد b ، فإن المتباينة (2) تسمح على الأكثر بوجود عدد محدود من القيم للعدد a.

في الحقيقة، وجدنا أن (2) لها ثلاثة حلول فقط: $\frac{a}{b}=\frac{2}{1}$, $\frac{a}{b}=\frac{1}{1}$ و $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$.

دعنا نراجع ما أنجزناه. لقد استخدمنا حقيقة أن $\sqrt{2}$ هو جذر لكثير الحدود $X^{2}-2$ لاستنتاج المتباينة (1) التي تنص على أن عدد نسبي a/b لا يمكن أن يكون قريباً جدًّا من $\sqrt{2}$. برهان ليوفيل على أن العدد β أعلاه هو عدد متسامٍ يرتكز على القدمين التاليتين (والتي قد تجعل الطاولة غير مستقرة، لكنها مهمة جداً للبرهان):

(i) إذا كان α عدداً جبريًّا، بمعنى، إذا كان α جذراً لكثير حدود معاملاته صحيحة، فإن عدداً نسبيًّا a/b لا يمكن أن يكون قريباً جدًّا من α.

(ii) بالنسبة للعدد β المُعطى أعلاه، هناك العديد من الأعداد النسبية a/b القريبة جدًّا من β.

هدفنا الآن هو أخذ هاتين العبارتين القيمتين وجعلهما أكثر دقة. سنبدأ بالعبارة (i)، والتي يأخذ قياسها الشكل التالي.

نظرية (٢, ٣٥) (متباينة ليوفيل)

ليكن α عدداً جبريًا، وليكن α جذراً كثير الحدود :

$$f(X) = C_0X^d + C_1X^{d-1} + C_2X^{d-2} + \cdots + C_{d-1}X + C_d$$

ذا المعاملات الصحيحة. ليكن D أي عدد بحيث $D > d$ (أي أن D أكبر من درجة كثير الحدود f).

عندئذ يوجد فقط عدد محدود من الأعداد النسبية a/b التي تحقق المتباينة :

$$\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| \le \frac{1}{b^D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (*)$$

البرهان

حقيقة أن $X = \alpha$ جذر $f(X)$ تعني أنه عند قسمة $f(X)$ على $X - \alpha$، فإننا نحصل على الباقي 0. بكلمات أخرى، $f(X)$ يحلل كما يلي :

$$f(X) = (X - \alpha)g(X)$$

حيث $g(X)$ كثير حدود على الشكل :

$$g(X) = e_1X^{d-1} + e_2X^{d-2} + \cdots + e_{d-1}X + e_d$$

على سبيل المثال، العدد الجبري $\sqrt[3]{7}$ هو جذر لكثير الحدود $X^3 - 7$، وعندما نقسم $X^3 - 7$ على $X - \sqrt[3]{7}$ نحصل على التحليل :

$$X^3 - 7 = \left(X - \sqrt[3]{7}\right)\left(X^2 + \sqrt[3]{7}X + \sqrt[3]{49}\right)$$

لاحظ أن المعاملات $e_1, \ldots, e_d$ ليست أعداداً صحيحة، ولكن هذا لن يسبب لنا أي مشاكل.

افرض الآن أن a/b هو حل للمتباينة :

$$\left|\frac{a}{b}-\alpha\right| \le \frac{1}{b^D}$$

إذا عوضنا $X = a/b$ في التحليل :

$$f(X) = (X-\alpha)\,g(X)$$

وأخذنا القيم المطلقة فإننا سنحصل على الصيغة الأساسية التالية :

$$\left|f\left(\frac{a}{b}\right)\right| = \left|\frac{a}{b}-\alpha\right| \cdot \left|g\left(\frac{a}{b}\right)\right|$$

أهمية هذه الصيغة تكمن في أن الطرف الأيمن يكون صغيراً إذا كان a/b قريباً من α ، بينما الطرف الأيسر عدد نسبي. الشيئان الباقيان اللذان نحتاج لعملهما هما إيجاد الحد الأعلى للمقدار $\left|g(a/b)\right|$ والحد الأدنى للمقدار $\left|f(a/b)\right|$.

إذا كتبنا مفكوك $\left|f(a/b)\right|$ ووضعناه على مقام مشترك ، سنحصل على :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{b}\right) &= c_0\left(\frac{a}{b}\right)^{d} + c_1\left(\frac{a}{b}\right)^{d-1} + c_2\left(\frac{a}{b}\right)^{d-2} + \cdots + c_{d-1}\frac{a}{b} + c_d \\ &= \frac{c_0a^d + c_1a^{d-1}b + c_2a^{d-2}b^2 + \cdots + c_{d-1}ab^{d-1} + c_db^d}{b^d} \end{aligned}$$

لاحظ أن بسط هذا الكسر عدد صحيح ؛ ولذلك لا يساوي الصفر ، ونرى أن :

$$\left|f\left(\frac{a}{b}\right)\right| \ge \frac{1}{b^d}$$

[سنتعامل لاحقاً مع الحالة $f(a/b) = 0$] ويمكننا توضيح ذلك باستخدام مثالنا $f(X) = X^3 - 7$:

$$\left| f\left(\frac{a}{b}\right)\right| = \left|\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 7\right| = \left|\frac{a^3 - 7b^3}{b^3}\right| \geq \frac{1}{b^3}$$

نريد الآن أن نجد الحد الأعلى للمقدار $g\ (a/b)$.

حقيقة أن a/b حل للمتباينة $(*)$ يقتضي أن :

$$|a/b| \leq |\alpha| + 1$$

إذاً يمكننا التقدير :

$$\begin{aligned}\left|g\left(\frac{a}{b}\right)\right| &\leq e_1\left|\frac{a}{b}\right|^{d-1} + e_2\left|\frac{a}{b}\right|^{d-2} + e_3\left|\frac{a}{b}\right|^{d-3} + \cdots + e_{d-1}\left|\frac{a}{b}\right| + e_d \\ &\leq e_1\left(|\alpha|+1\right)^{d-1} + e_2\left(|\alpha|+1\right)^{d-2} + e_3\left(|\alpha|+1\right)^{d-3} + \cdots \\ &\quad + e_{d-1}\left(|\alpha|+1\right) + e_d\end{aligned}$$

هذا المقدار الأخير فوضوي إلى حد ما ، ولكن له خاصية هامة جدًّا : *هذا المقدار لا يعتمد على العدد النسبي* a/b . بمعنى آخر ، لقد بينا وجود عدد k موجب بحيث ، إذا كان a/b هو أي حل للمتباينة $(*)$ فإن :

$$|g\ (a/b)| \leq k$$

مرة أخرى فقد وضحنا هذا التقدير من خلال مثالنا $f\ (X) = X^3 - 7$ ، حيث استخدمنا الحد $|a/b| \leq \sqrt[3]{7} + 1$. لذلك :

$$\begin{aligned}\left|g\left(\frac{a}{b}\right)\right| &\leq \left|\frac{a}{b}\right|^2 + \sqrt[3]{7}\left|\frac{a}{b}\right| + \sqrt[3]{49} \\ &\leq \left(\sqrt[3]{7}+1\right)^2 + \sqrt[3]{7}\left(\sqrt[3]{7}+1\right) + \sqrt[3]{49} \\ &\leq 17.717\end{aligned}$$

لذلك ؛ بالنسبة لهذا المثال نستطيع أخذ $k = 17.717$.

لدينا الآن :

المتباينة (*) : $\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| \le \frac{1}{b^D}$

صيغة التحليل : $\left|f\left(\frac{a}{b}\right)\right| = \left|\frac{a}{b} - \alpha\right| \cdot \left|g\left(\frac{a}{b}\right)\right|$

الحد الأدنى : $\left|f\left(\frac{a}{b}\right)\right| \ge \frac{1}{b^d}$

الحد الأعلى : $\left|g\left(\frac{a}{b}\right)\right| \le k$

بوضعهم جميعاً مع بعضهم البعض نحصل على :

$$\frac{1}{b^d} \le \left|f\left(\frac{a}{b}\right)\right| = \left|\frac{a}{b} - \alpha\right| \cdot \left|g\left(\frac{a}{b}\right)\right| \le \frac{k}{b^D}$$

بما أننا نعلم أن $D > d$ فإنه بإمكاننا فصل b في الطرف الأيسر لنحصل على الحد الأعلى :

$$b \le k^{1/(D-d)}$$

لتوضيح ذلك سنستخدم مثالنا $\alpha = \sqrt[3]{7}$ و $f(X) = X^3 - 7$ ، لدينا $d = 3$ ووجدنا أنه يمكننا أخذ $k = 17.717$ ؛ لذلك إذا أخذنا (ولنقل) $D = 3.5$ ، فإننا سنحصل على الحد :

$$b \le 17.717^{1/(3.5-3)} \approx 313.89$$

الآن يمكننا أن نرى لماذا كان من المهم جدًّا ألا يعتمد الحد الأعلى k على العدد a/b ، وهذه الحقيقة هي التي سمحت لنا أن نستنتج أنه توجد فقط قيم متاحة

محدودة للعدد b . (لاحظ أنه من الضروري أن يكون b عدداً صحيحاً موجبًا ؛ لأنه مقام الكسر a/b والمكتوب بأبسط صورة).

علاوة على ذلك، لكل اختيار محدد لعدد b ، يوجد فقط عدد منتهي من القيم a بحيث تتحقق المتباينة (*). (في الحقيقة، إذا كان $b^{D-1} > 2$ ، فإنه يوجد على الأكثر قيمة واحدة متاحة للعدد a لقيمة معطاة b). بالعودة لمثالنا الأخير، رأينا أن قيم b الممكنة هي الأعداد الصحيحة $1 \le b \le 313$ ، وعندئذ لكل قيم محددة b ، فإن قيم a الممكنة [بمعنى ، تلك القيم التي تمثل حلولاً للمتباينة (*)] هي القيم التي تحقق :

$$b\sqrt[3]{7}-\frac{1}{b^{2.5}} \le a \le b\sqrt[3]{7}+\frac{1}{b^{2.5}}$$

هذا يبين أن هناك فقط عدداً منتهياً من الحلول، وبحساب سريع على جهاز الكمبيوتر نجد أن لهذا المثال يوجد فقط الحلان $a/b = 1/1 \quad , \quad 2/1$.

لقد أنجزنا تقريباً برهاننا على أن المتباينة (*) لها عدد منتهٍ من الحلول a/b فقط. إذا راجعت ما أنجزناه سابقاً، ستجد أن ما برهناه في الواقع هو أن المتباينة (*) لها عدد منتهٍ من الحلول تحقق $f(a/b) \neq 0$. لذلك ما زلنا نحتاج لمعالجة جذور $f(X)$. لكن كثير الحدود من الدرجة d له على الأكثر d جذر من أي نوع، نسبي أو غير نسبي ؛ لذلك عدد الجذور المنتهية النسبية لـ $f(X)$ لا يغير من استنتاجنا بأن (*) لها فقط عدد منتهٍ من الحلول.

متباينة ليوفيل تنص على أن عدداً جبريًا α لا يمكن أن يقرب بأعداد نسبية بشكل قريب جدًّا. النظرية التالية ، والتي هي القدم الثانية في برهاننا ، تنص على أن عدد ليوفيل β يمكن أن يقرب بكثير من الأعداد النسبية بشكل قريب جدًّا.

نظرية (٣٫٣٥) (تقريبات جيدة للعدد β)

ليكن β عدد ليوفيل:

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

عندئذ فإن لكل عدد $D \geq 1$ يمكن إيجاد عدد لا نهائي من الأعداد النسبية المختلفة a/b التي تحقق المتباينة:

$$\left| \frac{a}{b} - \beta \right| \leq \frac{1}{b^D}$$

البرهان

واضح أن هذه النظرية تقول أنه يمكننا إيجاد أعداد نسبية قريبة جدًّا جدًّا من β. كيف يمكننا إيجاد مثل هذه التقريبات الجيدة؟ تعريف β:

$$\beta = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \frac{1}{10^{4!}} + \frac{1}{10^{5!}} + \frac{1}{10^{6!}} + \cdots$$

يعطينا المفتاح، الحدود في هذه المتسلسلة تتناقص بشكل سريع جدًّا. لذلك إذا أخذنا فقط أول كم حدًّا، فسوف نحصل على تقريب جيد جدًّا للعدد β. مثلاً إذا أخذنا أول أربعة حدود، فسوف نحصل على العدد النسبي:

$$r_4 = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \frac{1}{10^{4!}} = 0.110001000000000000000001$$

عندئذ، فإن $\left| r_4 - \beta \right|$ يكون فيه أول 119 خانة عشرية جميعها أصفار، إذن $\left| r_4 - \beta \right| < 2 \cdot 10^{-120}$، وهذه قيمة صغيرة جدًّا. من جهة أخرى، إذا كتبنا r_4 ككسر a_4/b_4، سنجد أن:

$$r_4 = \frac{a_4}{b^4} = \frac{110001000000000000000001}{1000000000000000000000000}$$

إذن مقامه b_4 هو "فقط" 10^{24}. قد يبدو هذا عدداً ضخماً، لكن لاحظ أن $|r_4-\beta|<2\cdot10^{-120}<1/b_4^5$ ، إذن r_4 هو تقريب أفضل للعدد β.

بشكل أعم، افترض أننا أخذنا أول N حدًّا من المتسلسلة وجمعناهم لنشكل العدد النسبي:

$$r_N=\frac{a_N}{b_N}=\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\cdots+\frac{1}{10^{N!}}$$

سنحتاج لتقدير حجم b_N وأيضاً كم هو مدى قرب r_N من β.

مقامات الكسور التي جمعناها لنحصل على r_N جميعها قوى للعدد 10 ، إذن أصغر مقام مشترك هو آخرها:

$$b_N=10^{N!}$$

من جهة أخرى، فإن الفرق $\beta-r_N$ يبدو على الشكل:

$$\beta-r_N=\frac{1}{10^{(N+1)!}}+\frac{1}{10^{(N+2)!}}+\frac{1}{10^{(N+3)!}}+\cdots$$

لذلك؛ فإن أول خانة غير صفرية في المفكوك العشري للعدد $\beta-r_N$ تظهر في الخانة $(N+1)!^{th}$ ، وهذه الخانة هي 1. هذا يبين أن الفرق $\beta-r_N$ هو بالتأكيد أصغر من العدد الذي تكون فيه الخانة $(N+1)!^{th}$ هي 2. بمعنى آخر:

$$0<\beta-r_N<\frac{2}{10^{(N+1)!}}$$

لربط هذا بقيمة b_N ، نلاحظ أن:

$$10^{(N+1)!}=\left(10^{N!}\right)^{N+1}=b_N^{N+1}$$

لذلك نجد أن:

$$0 < \beta - r_N < \frac{2}{b_N^{N+1}}$$

نوجز ما سبق بالقول:

لكل $N \geq 1$ أوجدنا عدداً نسبيًّا a_N / b_N بحيث

$$0 < \beta - \frac{a_N}{b_N} < \frac{2}{b_N^{N+1}} = \frac{2}{b_N} \cdot \frac{1}{b_N^N} < \frac{1}{b_N^N}$$

علاوة على ذلك، فإن هذه الأعداد النسبية جميعها مختلفة ؛ لأن مقاماتها $b_N = 10^{N!}$ مختلفة. لذلك فإن الأعداد النسبية a_N / b_N حيث $N \geq D$ تُعطي عدداً لا نهائيًّا من الحلول للمتباينة :

$$\left| \frac{a}{b} - \beta \right| \leq \frac{1}{b^D}$$

وبذلك يكتمل برهان نظرية التقريبات الجيدة.

لدينا الآن الشيئان اللذان نحتاج لهما لإثبات أن β عدد متسامٍ.

نظرية (٤,٣٥) (نظرية تسامي العدد β)

عدد ليوفيل:

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

هو عدد متسامٍ.

البرهان

سنعطي برهان بالتناقض. لذلك سنبدأ بالفرض بأن β عدد جبري ونحاول الحصول على عبارة خاطئة. افتراض أن β عدد جبري يعني أنه جذر لكثير حدود :

$$f(X) = C_0X^d + C_1X^{d-1} + C_2X^{d-2} + \cdots + C_{d-1}X + C_d$$

معاملاته أعداد صحيحة . ليكن $D = d + 1$ عندئذ فإن متباينة ليوفيل تخبرنا أنه يوجد فقط عدد منتهٍ من الأعداد النسبية a/b التي تحقق المتباينة

$$\left|\frac{a}{b} - \beta\right| \le \frac{1}{b^D}$$

من جهة أخرى، نظرية 35.3 تخبرنا أنه يوجد عدد لا نهائي من الأعداد النسبية تحقق هذه المتباينة. هذا التناقض يبين أن β لا يمكن أن يكون عدداً جبريًّا، وهذا يكمل برهان أن β يجب أن يكون عدداً متسامياً.

إن برهان أن عدد ليوفيل هو عدد متسامٍ ليس برهاناً سهلاً، وإنك عزيزي القارئ تستحق التهنئة على وصولك لنهاية البرهان. ولكن كن مدركاً أننا غطينا فقط جزءاً صغيراً جدًّا من المحتوى الضخم للأعداد المتسامية.

إن أحد أجمل البراهين في نظرية التسامي برهنت بشكل مستقل على يد كل من A.O.Gelfond و T.Schneider في عام 1934. لقد برهنا أنه إذا كان a أي عدد جبري غير 0 , 1 وإذا كان b أي عدد جبري غير نسبي. عندئذ فإن العدد a^b هو عدد متسامٍ. على سبيل المثال، العدد $2^{\sqrt{2}}$ هو عدد متسامٍ. مدهش، نظرية Gelfond – Schneider صحيحة حتى إذا كان a , b عددين مركبين. لذلك فإن العدد e^π عدد متسامٍ(١)، لأن e^π يساوي $(-1)^{-i}$.

---

(١) هنا $e = 2.7182818\cdots$ هو أساس اللوغاريتمات الطبيعية. أثبت "هيرمت" أن e عدد متسامٍ وذلك عام 1873. المعادلة $(-1)^{-i} = e^\pi$ نتجت من متطابقة أويلر $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. وضع $\theta = \pi$ يعطي $e^{i\pi} = -1$، وبرفع الطرفين للقوة $-i$ نحصل على الصيغة المطلوبة.

إن نظرية التسامي اليوم تعتبر مجالاً نشطاً في البحوث الرياضية ، ويوجد فيها العديد من المسائل المفتوحة. على سبيل المثال ، من غير المعروف فيما إذا كان العدد $\pi + e$ عدداً متسامياً أم لا ؛ في الحقيقة ، فإنه من غير المعروف حتى فيما إذا كان $\pi + e$ غير نسبي.

تمارين

(٣٥,١) (a) افرض أن N عدد صحيح موجب ليس مربعاً كاملاً. أثبت أن $\sqrt{N}$ عدد نسبي.

(b) ليكن $n \geq 2$ عدداً صحيحاً ، وليكن p عدداً أوليًّا. أثبت أن $\sqrt[n]{p}$ غير نسبي.

(c) ليكن $n \geq 2$, $N \geq 2$ عددين صحيحين. متى يكون $\sqrt[n]{N}$ غير نسبي؟ برهن إجابتك.

(٣٥,٢) ليكن A, B, C أعداداً صحيحة ، حيث $A \neq 0$. ليكن r_1 , r_2 جذرين لكثير الحدود $Ax^2 + Bx + C$. اشرح ما هي الشروط الواجب توافرها ليكون r_1 , r_2 عددين نسبيين. بشكل خاص ، اشرح لماذا يكون الجذران إما كلاهما نسبيًّا وإما كلاهما غير نسبي.

(٣٥,٣) أعط مثال على كثير حدود من الدرجة الثالثة معاملاته أعداد صحيحة له :

(a) ثلاثة جذور نسبية مختلفة.

(b) جذر واحد نسبي وجذران غير نسبيان.

(c) ولا جذر نسبي.

(d) هل يمكن أن يكون لكثير حدود من الدرجة الثالثة جذران نسبيان وجذر

غير نسبي؟ إما أن تعطي مثالاً على كثير الحدود هذا وإما أن تثبت أنه غير موجود.

(٣٥,٤) (a) أوجد كثير حدود معاملاته صحيحة يكون $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ أحد جذوره.

(b) أوجد كثير حدود معاملاته صحيحة يكون $\sqrt{5}+i$ أحد جذوره، حيث $i=\sqrt{-1}$.

(٣٥,٥) افرض أن:

$$f(X)=X^{d}+C_{1}X^{d-1}+C_{2}X^{d-2}+\cdots+C_{d-1}X+C_{d}$$

كثير حدود من الدرجة d معاملاته $c_1,c_2,\ldots,c_d$ جميعها أعداد صحيحة.

افرض أن r جذر نسبي لكثير الحدود $f(X)$.

(a) برهن أن r يجب أن يكون عدداً صحيحاً.

(b) برهن أن r يجب أن يقسم c_d.

(٣٥,٦) اعتمد على التمرين السابق في حل المسائل التالية:

(a) أوجد جميع الجذور النسبية لكثير الحدود:

$$X^{5}-X^{4}-3X^{3}-2X^{2}-19X-6$$

(b) أوجد جميع الجذور النسبية لكثير الحدود:

$$X^{5}+63X^{4}+135X^{3}+785X^{2}-556X-4148$$

(مساعدة: يمكنك أن تختصر العمل إذا قسمت كثير الحدود على $X-r$ لتتخلص من ذلك الجذر).

(c) لأي قيمة (قيم) صحيحة للمجهول c يكون لكثير الحدود التالي جذر نسبي:

$$X^{5}+2X^{4}-cX^{3}+3cX^{2}+3$$

(٣٥,٧) (a) افرض أن :

$$f(X)=C_0X^d+C_1X^{d-1}+C_2X^{d-2}+\cdots+C_{d-1}X+C_d$$

كثير حدود من الدرجة d معاملاته $c_1,c_2,\ldots,c_d$ جميعها أعداد صحيحة. افرض أن $r=a/b$ عدد نسبي هو جذر لكثير الحدود $f(X)$. أثبت أن a يجب أن يقسم c_d ولذلك b يجب أن يقسم c_0.

(b) اعتمد على (a) لإيجاد جميع الجذور النسبية لكثير الحدود.

$$8X^7-10X^6-3X^5+24X^4-30X^3-33X^2+30X+9$$

(c) ليكن p عدداً أوليًّا، برهن أن كثير الحدود pX^5-X-1 ليس له جذور نسبية.

(٣٥,٨) ليكن α عدداً جبريًّا.

(a) برهن أن $\alpha+2$, 2α عددان جبريان.

(b) برهن أن $\alpha+\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}\alpha$ عددان جبريان.

(c) بشكل أعم، ليكن r أي عدد نسبي، برهن أن $\alpha+r$, $r\alpha$ عددان جبريان.

(d) برهن أن $\alpha+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\,\alpha$ عددان جبريان.

(e) بشكل أعم، ليكن A عدداً صحيحاً، برهن أن $\alpha+\sqrt{A}$, $\sqrt{A}\,\alpha$ عددان جبريان.

(f) حاول أن تعمم هذا التمرين قدر ما تستطيع.

(٣٥,٩) العدد $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ هو جذر لكثير الحدود $f(X)=X^4-10X^2+1$.

(a) أوجد كثير حدود $g(X)$ بحيث أن $f(X)$ يحلل كما يلي :

$$f(X)=(X-\alpha)\,g(X)$$

(b) أوجد عدداً K بحيث إذا كان a/b أي عدد نسبي بحيث
$\left|(a/b)-\alpha\right| \le 1$ ، $f\ (a/b) \ne 0$ ، فإن $\left|g\ (a/b)\right| \le K$.

(c) أوجد جميع الأعداد النسبية a/b التي تحقق المتباينة

$$\left|\frac{a}{b}-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right| \le \frac{1}{b^5}.$$

(d) إذا كنت تعلم كيف تبرمج ، أعد (c) باستبدال $\frac{1}{b^5}$ بـ $\frac{1}{b^{4.5}}$

(٣٥,١٠) ليكن β_1 , β_2 العددين :

$$\beta_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^{n!}} \qquad , \qquad \beta_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{n^n}}$$

k هنا هو عدد صحيح معين حيث $k \ge 2$.

(a) برهن أن β_1 عدد متسامٍ . (إذا وجدت أن التعامل مع القيمة العامة للعدد k يربك العمل ، فحاول أولاً مع $k = 2$. لاحظ أننا برهناها سابقاً عند $k = 10$).

(b) برهن أن β_2 عدد متسامٍ.

(٣٥,١١) لنعرف العددين β_3 , β_4 كما يلي :

$$\beta_3 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \qquad , \qquad \beta_4 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{10^n}}$$

(a) حاول استخدام طرق هذا الفصل لإثبات أن β_3 عدد متسامٍ. عند أي نقطة لا يمكن إكمال البرهان؟

(b) برهن β_3 غير نسبي. (مساعدة : اعتبر أن β_3 نسبي ، افرض $\beta_3 = \frac{a}{b}$ وابحث عن أعلى قوة للعدد 2 يجب أن تقسم b). ربما لاحظت العدد المشهور $\beta_3 = e = 2.7182818\cdots$. لقد تبين أن e في الحقيقة هو عدد متسامٍ ، ولكن

ذلك لم يعرف حتى مرور 33 سنة بعد نتيجة ليوفيل وذلك على يد "هيرمت".

(c) حاول استخدام طرق هذا الفصل لإثبات أن β_4 عدد متسامٍ. عند أي نقطة لا يمكن إكمال البرهان؟

(d) برهن أن β_4 ليس جذراً لكثير حدود بمعاملات صحيحة درجته أقل من أو تساوي 9.

(٣٥,١٢) ليكن $\alpha = r/s$ عدداً نسبيًّا مكتوباً بأبسط صورة.

(a) بيّن أنه يوجد عدد نسبي واحد فقط a/b يحقق المتباينة $\left|(a/b)-\alpha\right| < 1/sb$

(b) بين أن المساواة $\left|(a/b)-\alpha\right| = 1/sb$ صحيحة لعدد لا نهائي من الأعداد النسبية a/b المختلفة.

(٣٥,١٣) (a) برهن أن $\left|(a/b)-\sqrt{10}\right| > 1/8b^2$ متحققة لكل عدد نسبي a/b .

(b) استخدم (a) لإيجاد جميع الأعداد النسبية a/b التي تحقق $\left|(a/b)-\sqrt{10}\right| \le 1/b^3$.

(٣٥,١٤) (a) إذا لم يكن N مربعاً كاملاً، أوجد قيمة محددة للمجهول K بحيث تكون المتباينة $\left|(a/b)-\sqrt{N}\right| > K/b^2$ متحققة لكل عدد نسبي a/b. (قيمة K تعتمد على N وليس على a أو b).

(b) استخدم (a) لإيجاد جميع الأعداد النسبية a/b التي تحقق كل من المتباينات التالية:

(i) $\left|(a/b)-\sqrt{7}\right| \le 1/b^3$

(ii) $\left|(a/b)-\sqrt{5}\right| \le 1\big/ b^{\frac{8}{3}}$

(c) اكتب برنامج كمبيوتر يأخذ كمدخلات ثلاثة أعداد (N, C, e) ويعطي كمخرجات جميع الأعداد النسبية a/b التي تحقق $\left|(a/b)-\sqrt{N}\right| \le C/b^e$.

يجب أن يختبر برنامجك أن N عدد صحيح موجب، وأن $C > 0$ و $e > 2$ (إذا كان $e > 2$، فإن على برنامجك أن يخبر المستخدم أنه لن يحصل على جميع الحلول ؛ لأن هناك عدداً لا نهائيًّا منها!).

استخدم برنامجك لإيجاد جميع الحلول النسبية a/b للمتباينات التالية :

(i) $\left|a/b-\sqrt{573}\right| \le 1/b^3$

(ii) $\left|a/b-\sqrt{19}\right| \le 1/b^{2.5}$

(iii) $\left|a/b-\sqrt{6}\right| \le 8/b^{2.3}$

[تحتاج إلى كمبيوتر سريع لحل الفقرة (iii) إذا حاولت حلها بشكل مباشر].

(٣٥,١٥) حدد أي الأعداد التالية هي أعداد جبرية ، وأيها أعداد متسامية. اشرح السبب. يمكن أن تعتمد على حقيقة أن π عدد متسامي ، ويمكن أن تعتمد على نظرية Gelfond-Schneider التي تنص على أنه إذا كان a أي عدد جبري غير 0 أو 1 وإذا كان b أي عدد جبري غير نسبي فإن العدد a^b عدد متسامٍ.

$(a)\ \sqrt{2}^{\cos(\pi)}$ $\quad (b)\ \sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ $\quad (c)\ \left(\tan \pi/4\right)^{\sqrt{2}}$ $\quad (d)\ \pi^{17}$

$(e)\ \sqrt{\pi}$ $\quad (f)\ \pi^{\pi}$ $\quad (g)\ \cos(\pi/5)$ $\quad (h)\ 2^{\sin(\pi/4)}$

(٣٥,١٦) يقال إن مجموعة من الأعداد الحقيقية S لها خاصية "الترتيب الجيد" إذا كانت كل مجموعة جزئية من S تحوي العنصر الأصغر. (المجموعة الجزئية T من S تحوي عنصراً أصغر إذا وجد عنصر $a \in T$ بحيث $a \le b$ لكل عنصر آخر $b \in T$).

(a) بالاعتماد على حقيقة أنه لا توجد أعداد صحيحة واقعة تماماً بين 0 , 1 ، برهن أن مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة لها خاصية "الترتيب الجيد".

(b) بيّن أن مجموعة الأعداد النسبية غير السالبة ليس لها خاصية الترتيب الجيد وذلك بكتابة مجموعة جزئية محددة ليس لها عنصر أصغر.