الفصل الرابع والثلاثون

أعداد جاوس الصحيحة والتحليل الوحيد

The Gaussian Integers and Unique Factorization

رأينا في آخر فصل أن دراسة أعداد جاوس الصحيحة يمكن أن تجعل نظرية الأعداد ممتعة كما جعلتها كذلك دراسة الأعداد الصحيحة العادية. في الحقيقة، إن البعض يعتبر دراسة أعداد جاوس الصحيحة أكثر متعة؛ لأنها تحتوي أعداداً أولية أكثر!. رأينا سابقاً كيف أن الأعداد الأولية العادية تشكل لبنات البناء الأساسية المستخدمة للتعبير عن جميع الأعداد الصحيحة الأخرى، ولقد برهنا النتيجة الأساسية التي تنص على أن كل عدد صحيح يمكن التعبير عنه كحاصل ضرب أعداد أولية بطريقة وحيدة. على الرغم من أن هذه النظرية عن التحليل الوحيد والتي قمنا بدراستها في الفصل السابع تبدو واضحة للوهلة الأولى، فإن رحلتنا في "عالم الأعداد الزوجية" أقنعتنا أن هذه النظرية أكثر عمقاً مما تبدو عليه.

السؤال الذي يطفو على السطح الآن هو: هل يمكن تحليل أعداد جاوس بصورة وحيدة إلى حاصل ضرب أعداد أولية؟

بالطبع، فإن إعادة ترتيب العوامل لا يعتبر تحليلاً مختلفاً، لكن توجد هناك صعوبات أخرى. على سبيل المثال، اعتبر التحليلين:

$$11-10i=(3+2i)(1-4i) \quad , \quad 11-10i=(2-3i)(4+i)$$

يبدو هذان التحليلان مختلفين، لكن إذا تذكرت نقاشنا حول الوحدات، ستلاحظ أن

$$3+2i=i\cdot(2-3i) \quad , \quad 1-4i=-i\cdot(4+i)$$

لذلك؛ فإن الاختلاف الظاهر لهذين التحليلين يعود إلى أن $-i\cdot i=1$.

سنواجه نفس المشكلة مع الأعداد الصحيحة العادية إذا استخدمنا كلا الأعداد الأولية الموجبة والسالبة، حيث، وعلى سبيل المثال، $6=2\cdot3=(-2)(-3)$ له تحليلان "مختلفان" ظاهريًّا. لتجنب هذه الصعوبة، اخترنا الأعداد الأولية الموجبة لتكون لبنات البناء الأساسية.

إن هذا يقترح علينا عمل نفس الشيء مع أعداد جاوس الصحيحة، لكن من الواضح أننا لا نستطيع الحديث عن أعداد مركبة موجبة في مقابل أعداد مركبة سالبة.

إذا كان $\alpha=a+bi$ أي عدد جاوس صحيح غير صفري، عندئذ يمكننا ضرب α بكل من الوحدات 1, -1, i, $-i$ لنحصل على الأعداد:

$$\alpha=a+bi, \qquad i\alpha=-b+ai, \qquad -\alpha=-a-bi, \qquad -i\alpha=b-ai$$

إذا عينت أعداد جاوس الصحيحة الأربعة هذه في المستوى المركب، سنجد أن واحداً فقط منها يقع في الربع الأول. بشكل أدق، واحد منها فقط يكون إحداثيه السيني أكبر من 0 وإحداثه الصادي أكبر من أو يساوي 0. نقول إن:

$x+iy$ طبيعي إذا كان $x>0$ و $y\geq 0$.

أعداد جاوس الطبيعية هذه سوف تلعب نفس الدور الذي تلعبه الأعداد الصحيحة العادية الموجبة.

نظرية (١, ٣٤) (التحليل الوحيد لأعداد جاوس الصحيحة)

كل عدد جاوس صحيح $\alpha \neq 0$ يمكن تحليله إلى وحدة u مضروبة في حاصل ضرب أعداد جاوس أولية طبيعية:

$$\alpha = u\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_r$$

بطريقة واحدة فقط.

كالعادة، مطلوب بعض الكلمات التوضيحية القليلة. أولاً، إذا كان α نفسه وحدة، نأخذ $r = 0$ و $u = \alpha$ وليكن تحليل α ببساطة هو $\alpha = u$. ثانياً، أوليات جاوس $\pi_1, \ldots, \pi_r$ ليست مختلفة، وصف بديل هو كتابة تحليل α كما يلي:

$$\alpha = u\pi_1^{e_1} \pi_2^{e_2} \ldots \pi_r^{e_r}$$

وذلك باستخدام أعداد جاوس أولية مختلفة $\pi_1, \ldots, \pi_r$ وأسس $e_1, \ldots, e_r > 0$. ثالثاً، عندما نقول إنه يوجد تحليل وحيد، فمن الواضح أننا لا نعتبر إعادة ترتيب العوامل لتكون تحليلاً جديداً.

إذا راجعنا برهان النظرية الأساسية للحساب الواردة في الفصل 7، سنجد أن الخاصية الحاسمة للأعداد الأولية هو التأكيد البسيط التالي:

إذا قسم عدد أولي حاصل ضرب عددين، فإنه يقسم على أحدهما الأقل

من حسن حظنا أن أعداد جاوس الصحيحة لها أيضاً نفس هذه الخاصية، لكن قبل إعطاء البرهان، فإننا نحتاج لمعرفة أنه عندما نقسم عدداً جاوساً صحيحاً بعدد آخر فإن الباقي يكون أقل من القاسم.

هذه خاصية واضحة جدًّا للأعداد الصحيحة العادية، وقد تعتقد أنها ليست خاصية ثمينة. مثلاً، إذا قسمنا 177 على 37 فإن ناتج القسمة يساوي 4 والباقي 29. بمعنى آخر:

$$177 = 4 \cdot 37 + 29,$$

والباقي 29 أصغر من القاسم 37.

على كل حال، بالنسبة لأعداد جاوس الصحيحة فالمسألة أقل وضوحاً. على سبيل المثال، إذا قسمنا $237+504i$ على $15-17i$، فما هو ناتج القسمة وما هو الباقي، وحتى كيف يمكننا الحديث عن أن الباقي يكون أصغر من القاسم؟ إجابة السؤال الثاني سهلة، نقيس صحيح جاوس من معياره $N\left(a+bi\right)=a^2+b^2$، لذلك يمكن أن نسأل عن أن معيار الباقي أقل من معيار القاسم. لكن هل من الممكن أن نقسم $237+504i$ على $15-17i$ ونحصل على باقي معياره أقل من $N\left(15-17i\right)=514$؟ الجواب نعم حيث:

$$237+504i=\left(-10+23i\right)\left(15-17i\right)+\left(-4-11i\right)$$

هذه المعادلة تقول إن ناتج قسمة $237+504i$ على $-10+23i$ هو $15-17i$ والباقي هو $-4-11i$، وواضح أن $N\left(-4-11i\right)=137$ أصغر من $N\left(15-17i\right)=514$.

سنبرهن الآن أنه بالإمكان دائماً قسمة عدد جاوس صحيح والحصول على باقٍ صغير. البرهان مزيج من الجبر والهندسة.

نظرية (٣٤,٢) (قسمة صحيح جاوس مع الباقي)

ليكن α , β عددين جاوس صحيحين، حيث $\beta \neq 0$. عندئذ يوجد عددين جاوس صحيحين بحيث :

$$N(\rho) < N(\beta) \quad , \quad \alpha = \beta\gamma + \rho$$

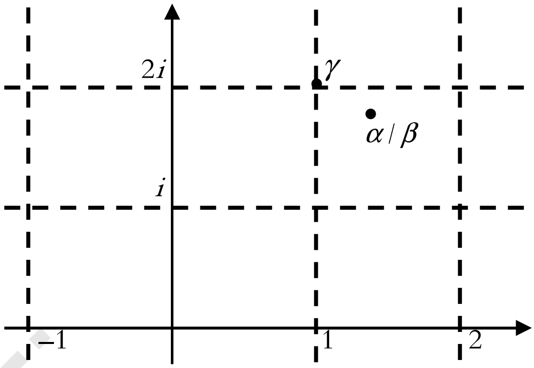
البرهان

إذا قسمنا المعادلة التي نحاول إثباتها على β ، فإن

$$N\left(\frac{\rho}{\beta}\right) < 1 \quad , \quad \frac{\alpha}{\beta} = \gamma + \frac{\rho}{\beta}$$

هذا يعني أننا يجب أن نختار γ ليكون أقرب ما يمكن عن α / β ؛ لأننا نريد أن يكون الفرق بين γ و α / β صغيراً.

إذا كانت النسبة α / β نفسها عدداً جاوساً صحيحاً، عندئذ يمكننا أخذ $\gamma = \alpha / \beta$ و $\rho = 0$ ، لكن بشكل عام α / β ليست عدداً جاوساً صحيحاً. على كل حال، هي عدد مركب ؛ لذلك يمكننا تعيينها في المستوى المركب كما هو موضح في الشكل رقم 34.1. بعد ذلك نُقَسّم المستويات المركبة إلى مربعات من خلال رسم خطوط أفقية ورأسية مارة بكل عدد جاوس صحيح. العدد المركب α / β يقع في أحد هذه المربعات، ونأخذ γ ليكون أقرب زاوية من المربع الذي يحوي α / β. لاحظ أن γ عدد جاوس صحيح ؛ لأن زوايا المربعات هي أعداد جاوس الصحيحة.



الشكل رقم (٣٤,١). أقرب عدد جاوس صحيح للمقدار α/β .

أبعد مسافة بين α/β و γ هي عندما تكون α/β واقعة تماماً في وسط المربع ؛ لذلك $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq$(المسافة بين α/β و γ).

(طول قطر المربع يساوي $\sqrt{2}$ ، إذاً وسط المربع يبعد عن زواياه بمقدار $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

إذا ربعنا الطرفين واستخدمنا حقيقة أن المعيار يساوي مربع الطول ، ينتج أن :

$$N\left(\frac{\alpha}{\beta}-\gamma\right)\leq\frac{1}{2}$$

بعد ذلك نضرب الطرفين بالعدد $N(\beta)$ ، وباستخدام خاصية ضرب المعيار ينتج :

$$N(\alpha-\beta\gamma)\leq\frac{1}{2}N(\beta)$$

أخيراً ، نختار ببساطة ρ لتكون $\rho=\alpha-\beta\gamma$ ، ثم نحصل على الخصائص المطلوبة :

$$\alpha = \beta\gamma + \rho \qquad , \qquad N(\rho) < N(\beta)$$

[في الحقيقة ، حصلنا على المتباينة الأقوى $N(\rho) \le \frac{1}{2} N(\beta)$].

الخطوة التالية هي استخدام نظرية قسمة عدد جاوس الصحيح مع الباقي لنبين أن "أصغر" عدد غير صفري على الشكل $A\alpha + B\beta$ يقسم كل من α , β. إنه من المفيد مقارنة هذا مع الخاصية المماثلة للأعداد الصحيحة العادية والتي أثبتناها في الفصل السادس.

نظرية (٣٤,٣) (خاصية القاسم المشترك لأعداد جاوس الصحيحة)

ليكن α , β صحيحي جاوس، ولتكن S مجموعة من أعداد جاوس الصحيحة على الشكل $A\alpha + B\beta$ حيث A , B أي عددين جاوس صحيحين.

من بين كل أعداد جاوس الصحيحة في S ، اختر العنصر :

$$g = a\alpha + b\beta$$

والذي له أصغر معيار غير صفري، بمعنى آخر ، $0 < N(g) \le N(A\alpha + B\beta)$ لأي عددين جاوس صحيحين A , B حيث $A\alpha + B\beta \ne 0$ عندئذ فإن g يقسم كل من α , β.

البرهان

نستخدم الباقي مع قسمة عدد جاوس صحيح لقسمة α على g ،

$\alpha = g\gamma + \rho$ حيث $0 \le N(\rho) < N(g)$

هدفنا هو إثبات أن الباقي ρ يساوي صفراً.

بتعويض $g = a\alpha + b\beta$ في $\alpha = g\gamma + \rho$ وبقليل من العمليات الجبرية ينتج أن:

$$\left(1 - a\gamma\right)\alpha - b\gamma\beta = \rho$$

إذاً ρ في المجموعة S ، إذن هو على الشكل:

(صحيح جاوس مضروب في α) + (صحيح جاوس مضروب في β).

من جهة أخرى، $N\left(\rho\right) < N\left(g\right)$ ، ونختار g ليكون له أصغر معيار غير صفري من بين كل عناصر S. لذلك $N\left(\rho\right)$ يجب أن يساوي صفراً، وهذا يعني أن $\rho = 0$. هذا يبين أن $\alpha = g\gamma$ ، إذاً g يقسم α.

أخيراً، بعكس قوانين α , β وتكرار الخطوات السابقة ينتج أن g تقسم β أيضاً.

نحن الآن جاهزون لإثبات أنه إذا كان عدد جاوس أولي يقسم حاصل ضرب عددين جاوس صحيحين فإنه يقسم أحدهما على الأقل.

نظرية (٤, ٣٤) (خاصية قابلية القسمة لأعداد جاوس الأولية)

ليكن π عدداً جاوساً أوليًّا، وليكن α , β عددين جاوس صحيحين، وافرض أن π يقسم الضرب $\alpha\beta$. عندئذ إما π يقسم α وإما π يقسم β (وإما يقسمهما كليهما).

بشكل عام، إذا كان α يقسم حاصل الضرب $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ لأعداد جاوس صحيحة، فإنه يقسم واحد على الأقل من العوامل α_1، α_2، ...، α_n.

البرهان

سنطبق خاصية صحيح جاوس القاسم المشترك للعددين α , π. هذا يخبرنا أنه بإمكاننا إيجاد عددين جاوس صحيحين b, a بحيث أن العدد $g = a\alpha + b\pi$ يقسم كل من α , π.

لكن π أولي، إذن من حقيقة أن g يقسم π فإن هذا يعني أن g إما وحدة وإما أن g تساوي π مضروباً في وحدة. سنناقش هاتين الحالتين بشكل منفصل.

أولاً، افرض أن $g = u\pi$ لوحدة ما u (أي أن، u هي أحد الأعداد $1, -1, i, -i$). وحيث إننا نعلم أيضاً أن g يقسم α، فإن π يقسم α، وهو المطلوب.

ثانياً، إفرض أن g نفسه وحدة. نضرب المعادلة $g = a\alpha + b\pi$ بالعدد β لنحصل على

$$g\beta = a\alpha\beta + b\pi\beta$$

نعلم أن π يقسم $\alpha\beta$، إذن هذه المعادلة تخبرنا أن π يقسم $g\beta$، بما أن g وحدة، فإن π يقسم β، مرة أخرى هذا هو المطلوب. بذلك يكتمل برهان أنه إذا كان عدد أولي π يقسم الضرب $\alpha\beta$، فإنه يقسم أحد العاملين α أو β على الأقل.

هذا يثبت الجزء الأول من خاصية قابلية القسمة لأعداد جاوس الأولية. بالنسبة للجزء الثاني فيمكننا استخدام الاستقراء على عدد n من العوامل. لقد أثبتنا الحالة عندما $n = 2$ (بمعنى، عاملين $\alpha_1\alpha_2$)، وهذا كفاية للحصول على بداية الاستقراء. الآن افرض أننا برهنا خاصية قابلية قسمة عدد جاوس أولي لجميع حواصل الضرب التي عواملها أقل من n، وافرض أن π يقسم حاصل الضرب $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ الذي له n عامل. إذا جعلنا $\alpha = \alpha_1\ldots\alpha_{n-1}$ و $\beta = \alpha_n$، فإن π يقسم $\alpha\beta$، إذاً

مما سبق فإن π إما يقسم α وإما π يقسم β. إذا π يقسم β ، فإننا نحصل على المطلوب، لأن $\beta = \alpha_n$. من جهة أخرى، إذا π يقسم α ، فإن π يقسم حاصل الضرب $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ الذي فيه $n-1$ عامل، إذاً من فرض الاستقراء فإن π يقسم أحد العوامل α_{n-1} ،...، α_1. بذلك يكتمل برهان خاصية قابلية قسمة عدد جاوس أولي.

أخيراً، فنحن مستعدون لإثبات أن كل عدد جاوس صحيح له تحليل وحيد كحاصل ضرب أعداد جاوس أولية.

برهان وحدانية تحليل أعداد جاوس الصحيحة. سوف نبدأ بإثبات أن كل عدد جاوس صحيح له تحليل من الأعداد الأولية. نستطيع ببساطة تقليد البرهان الوارد في الفصل السابع، ولكن بقصد التنوع ولكي نقدم لك أداة رياضية جديدة، سنعطي بدلاً من ذلك "برهان بالتناقض".

في البرهان بالتناقض، نبدأ بصياغة عبارة. بعد ذلك نبدأ ببناء استنتاجات منطقية من هذه العبارة، أخيراً ننتهي باستنتاج خاطئ. هذا يسمح لنا بأن نستنتج أن عبارتنا الأصلية كانت خاطئة؛ لأنها أوصلتنا إلى استنتاج خاطئ.

العبارة الخاصة التي سنبدأ بها هنا هي:

[يوجد على الأقل عدد جاوس صحيح غير صفري لا يُحلل إلى أعداد أولية.]

من بين كل أعداد جاوس الصحيحة غير الصفرية التي لها هذه الخاصية يمكننا اختيار عدد (ولنسميه α) له أصغر معيار. يمكننا عمل ذلك لأن معايير أعداد جاوس الصحيحة هي أعداد صحيحة موجبة، وأي مجموعة من الأعداد الموجبة تحوي أصغر عنصر. لاحظ أن α نفسه لا يمكن أن يكون أوليًّا؛ لأن خلاف ذلك سيكون $\alpha = \alpha$ هو تحليل للعدد α إلى أعداد أولية. نفس الشيء، α لا يمكن أن يكون وحدة؛ لأن

خلاف ذلك سيكون $\alpha=\alpha$ هو تحليل للعدد α إلى أعداد أولية (في هذه الحالة، إلى أعداد أولية صفرية). لكن إذا كان α ليس أوليًّا وليس وحدة، فإنه يحلل $\alpha=\beta\gamma$ وهذا حاصل ضرب عددي، جاوس صحيحين، ليس أي منهما وحدة.

الآن، بما أن β , γ ليسا وحدات، فإننا نعلم أن $N(\beta)>1$, $N(\gamma)>1$. وأيضاً من خاصية الضرب فإن $N(\beta)\cdot N(\gamma)=N(\alpha)$، إذاً

$$N(\beta)=\frac{N(\alpha)}{N(\gamma)}<N(\alpha) \quad , \quad N(\gamma)=\frac{N(\alpha)}{N(\beta)}<N(\alpha)$$

ولكننا اخترنا α ليكون عدداً جاوساً صحيحاً له أصغر معيار، أي لا يحلل لأعداد أولية؛ لذلك فكل من β , γ يحلل لأعداد أولية، أي أن:

$$\beta=\pi_1\pi_2\ldots\pi_r \quad , \quad \gamma=\pi'_1\pi'_2\ldots\pi'_s$$

حيث π'_s ، ... ، π'_1 ، π_r ، ... ، π_1 أعداد جاوس أولية. لكن عندئذ فإن:

$$\alpha=\beta\gamma=\pi_1\pi_2\ldots\pi_r\pi'_1\pi'_2\ldots\pi'_s$$

هو أيضاً حاصل ضرب أعداد أولية، وهذا يتناقض مع اختيار α كعدد لا يمكن كتابته على شكل حاصل ضرب أعداد أولية. إن هذا يثبت أن عبارتنا يجب أن تكون خاطئة، لأنها أدت إلى استنتاج غير منطقي وهو أن α تحلل ولا تحلل إلى حاصل ضرب أعداد أولية. بكلمات أخرى، أثبتنا أن العبارة "يوجد على الأقل عدد جاوس صحيح غير صفري لا يحلل إلى أعداد أولية" خاطئة؛ لذلك فقد أثبتنا أن كل عدد جاوس صحيح يحلل إلى حاصل ضرب أعداد أولية.

الجزء الثاني من النظرية يطلب منا إثبات أن التحليل إلى أعداد أولية هو تحليل وحيد.

مرة أخرى، يمكننا تقليد البرهان الوارد في الفصل السابع، ولكننا بدلاً من ذلك سنستخدم البرهان بالتناقض. سنبدأ بالعبارة التالية:

[يوجد على الأقل عدد جاوس صحيح غير صفري يُحلل إلى أعداد أولية بطريقتين مختلفتين.]

بفرض صحة هذه العبارة، فنحن نتعامل مع مجموعة كل أعداد جاوس الصحيحة التي تحلل إلى أعداد أولية بطريقتين مختلفتين (العبارة تؤكد لنا أن هذه المجموعة ليست خالية)، ولنأخذ عنصر α من هذه المجموعة يكون له أصغر معيار.

هذا يعني أن α له تحليلان مختلفان.

$$\alpha = u\pi_1\pi_2\ldots\pi_r = u'\pi_1'\pi_2'\ldots\pi_s'$$

حيث إن هذه الأعداد الأولية طبيعية كما وصفنا ذلك في بداية هذا الفصل. من الواضح أن α لا يمكن أن يكون وحدة؛ لأن خلاف ذلك سيؤدي إلى أن $\alpha = u = u'$، أي أن التحليلين لن يكونا مختلفين. هذا يعني أن $r \geq 1$؛ لذلك يوجد عدد أولي π_1 في التحليل الأول. إذا كان π_1 يقسم α، إذاً π_1 يقسم حاصل الضرب $u'\pi_1'\pi_2'\ldots\pi_s'$.

خاصية قابلية القسمة لأعداد جاوس الأولية تخبرنا أن π_1 يقسم على الأقل أحد الأعداد.

لكن من المؤكد أنه لا يقسم الوحدة u'، إذاً هو يقسم أحد العوامل. بإعادة ترتيب هذه العوامل الأخرى، يمكننا افتراض أن π_1 يقسم π_1'. على كل حال، العدد π_1' هو عدد جاوس صحيح أولي؛ لذلك فإن قواسمه تكون فقط وحدات وهو نفسه يكون من مضاعفات هذه الوحدات. بما أن π_1 ليس وحدة، نستنتج أن:

$$\pi_1 = (\text{وحدة}) \times \pi_1'$$

كذلك، فإن كل من π_1 و π_1' طبيعي، إذاً الوحدة تساوي 1 و $\pi_1 = \pi_1'$.

ليكن $\beta = \alpha / \pi_1 = \alpha / \pi_1'$. بإزالة π_1 من تحليلي α ينتج أن:

$$\beta = u\pi_2 \ldots \pi_r = u'\pi_2' \ldots \pi_س'$$

هذا العدد β له الخاصيتان التاليتان:

- $N(\beta) = N(\alpha) / N(\pi) < N(\alpha)$
- β يحلل إلى أعداد أولية بطريقتين مختلفتين (لأن α له نفس هذه الخاصية، ونحن أزلنا نفس العامل من الطرفين لكل من تحليلي α).

هذا يناقض اختيار α كأصغر عدد يحلل إلى أعداد أولية بطريقتين مختلفتين، ولذلك فإن عبارتنا الأصلية يجب أن تكون خاطئة. لذلك؛ لا يوجد أي عدد جاوس صحيح يحلل إلى أعداد أولية بطريقتين مختلفتين؛ لذلك أي عدد جاوس صحيح يحلل إلى عوامل أولية بطريقة واحدة فقط.

سنستخدم نظرية التحليل الوحيد لعدد جاوس صحيح لعد كم طريقة مختلفة يمكن من خلالها كتابة عدد كمجموع مربعين. على سبيل المثال، بكم طريقة مختلفة يمكن كتابة العدد 45 كمجموع مربعين؟

بقليل من الخبرة نحصل بسرعة على:

$$45 = 3^2 + 6^2$$

وهذه الطريقة الوحيدة لكتابة 45 كمجموع مربعين $a^2 + b^2$، حيث a , b موجبان و $a < b$. طبعاً يمكننا تبديل الحدين لنحصل على $45 = 6^2 + 3^2$، يمكننا أيضاً استخدام أعداد سالبة، فمثلاً:

$45 = (-6)^2 + (-3)^2$ و $45 = (-3)^2 + 6^2$.

إنه من المناسب حصر كل هذه الطرق المختلفة ؛ لذلك نقول إن 45 يمكن أن تكتب كمجموع مربعين بثماني طرق مختلفة :

$$45 = 6^2 + 3^2 \qquad 45 = 3^2 + 6^2$$
$$45 = 6^2 + (-3)^2 \qquad 45 = (-3)^2 + 6^2$$
$$45 = (-6)^2 + 3^2 \qquad 45 = 3^2 + (-6)^2$$
$$45 = (-6)^2 + (-3)^2 \qquad 45 = (-3)^2 + (-6)^2$$

بشكل عام نكتب :

$R(n)=$ عدد طرق كتابة N كمجموع مربعين.

يعرف هذا أيضاً بعدد طرق تمثيل N كمجموع مربعين.

مثالنا السابق يقول أن :

$$R(45) = 8$$

نفس الشيء، $R(65) = 16$ لأن :

$$65 = 8^2 + 1^2 \qquad 65 = 1^2 + 8^2$$
$$65 = 8^2 + (-1)^2 \qquad 65 = (-1)^2 + 8^2$$
$$65 = (-8)^2 + 1^2 \qquad 65 = 1^2 + (-8)^2$$
$$65 = (-8)^2 + (-1)^2 \qquad 65 = (-1)^2 + (-8)^2$$
$$65 = 7^2 + 4^2 \qquad 65 = 4^2 + 7^2$$
$$65 = 7^2 + (-4)^2 \qquad 65 = (-4)^2 + 7^2$$
$$65 = (-7)^2 + 4^2 \qquad 65 = 4^2 + (-7)^2$$
$$65 = (-7)^2 + (-4)^2 \qquad 65 = (-4)^2 + (-7)^2$$

النظرية الجميلة التالية تعطينا صيغة بسيطة ومدهشة لعدد طرق تمثيل عدد صحيح N كمجموع مربعين.

نظرية (٥, ٣٤) (نظرية مجموع مربعين (لجندر)

إذا كان N عدداً صحيحاً موجباً، ليكن:

$D_1 =$(عدد الأعداد الصحيحة الموجبة d التي تقسم N وتحقق $d \equiv 1 \pmod 4$)، $D_2 =$(عدد الأعداد الصحيحة الموجبة d التي تقسم N وتحقق $d \equiv 3 \pmod 4$).

فإن N يمكن كتابته كمجموع مربعين بطرق عددها:

$R(N) = 4(D_1 - D_3)$ طريقة فقط.

قبل أن نعطي برهاناً لصيغة لجندر، سوف نوضح النظرية من خلال العدد $N = 45$. قواسم العدد 45 هي:

$$1 , 3 , 5 , 9 , 15 , 45$$

أربعة من هذه القواسم $(1 , 3 , 5 , 9 , 15)$ تطابق 1 قياس 4، إذاً $D_1 = 4$، بينما اثنان من القواسم $(3 , 15)$ تطابق 3 قياس 4، إذاً $D_3 = 2$. النظرية تقول إن:

$$R(45) = 4(D_1 - D_3) = 4(4-2) = 8$$

وهذا يتفق مع حساباتنا السابقة. نفس الشيء، العدد 65 له أربعة قواسم 1، 5، 13 و 65 جميعها تطابق 1 قياس 4. من النظرية فإن:

$$R(65) = 4(4-0) = 16$$

مرة أخرى النتيجة تتفق مع حساباتنا السابقة.

برهان نظرية مجموع مربعين للجندر

يتضمن البرهان خطوتين. أولاها أننا سنجد صيغة $R\left(N\right)$. ثـم سنجد صيغة $D_1 - D_3$. مقارنة الصيغتين تكمل البرهان.

على الرغم من أن البرهان ليس بالغ الصعوبة إلا أنه قد يبـدو معقـداً بسبب كثرة الرموز. لـذلك سـنبدأ بشـرح كيفيـة اسـتخدام أعـداد جـاوس الصـحيحة لحسـاب $R\left(N\right)$ للعدد الخاص N. إذا كنت قادراً على تتبع البرهان لهذه القيمـة للعـدد N، فإنك لن تواجه صعوبة في البرهان بشكل عام.

سـوف نسـتخدم العـدد $N = 28949649300$. سـنبدأ بتحليـل N إلى حاصل ضرب أعداد أولية عادية ومن ثم تجميـع الأعـداد الأوليـة الـتي تطابق 1 قيـاس 4 والأعداد التي تطابق 3 قياس 4 ،

$$N = 28949649300 = 2^2 \cdot \underbrace{\left(5^2 \cdot 13^3\right)}_{\left(\text{أعداد أولية } 1 \bmod 4\right)} \cdot \underbrace{\left(3^2 \cdot 13^3\right)}_{\left(\text{أعداد أولية } 3 \bmod 4\right)}$$

بعد ذلك سنحلل N إلى حاصل ضرب أعداد جاوس أولية. باستخدام حقيقـة أن $2 = -i\left(1+i\right)^2$. فـإن الأعـداد الأوليـة الـتي تطـابق 1 قيـاس 4 تحلـل إلى حاصـل ضرب مرافقات أعداد جاوس الأولية ، والأعداد الأولية الـتي تطـابق 3 قيـاس 4 هـي تلقائياً أعداد جاوس أولية ، والتي تعطي التحليل :

$$N = -\left(1+i\right)^4 \cdot \left(\left(2+i\right)^2 \left(2-i\right)^2 \cdot \left(2+3i\right)^3 \left(2-3i\right)^3\right) \cdot \left(3^2 \cdot 11^4\right)$$

افرض الآن أننا نريد كتابة N كمجمـوع مـربعين ، ولنقـل إن $N = A^2 + B^2$. هذا يعني أن :

$$N = \left(A+Bi\right)\left(A-Bi\right)$$

إذاً بما أن أعداد جاوس الصحيحة لها تحليل وحيـد ، فـإن $A+Bi$ هـي حاصـل

ضرب بعض الأعداد الأولية التي تقسم N ، و $A-Bi$ هي حاصل ضرب الأعداد الأولية الباقية.

على كل حال، ليس لدينا مطلق الحرية في توزيع الأعداد الأولية التي تقسم N ، لأن $A+Bi$ و $A-Bi$ كل منهما مرافق مركب للآخر. ذلك أن استبدال i بالعدد $-i$ يغير أحدهما للآخر. هذا يعني أنه إذا كان عدد أولي مرفوع لقوة $(a+bi)^e$ يقسم $A+Bi$ ، فإن قوة المرافق الأولي $(a-bi)^e$ يجب أن تقسم $A-Bi$. إذاً، على سبيل المثال، لو كان $(2+i)^2$ يقسم $A+Bi$ ، فإن $(2-i)^2$ يقسم $A-Bi$ ، لذلك لن يتبقى أي من عوامل $2-i$ ليقسم $A+Bi$.

هذا المنطق يمكن تطبيقه كذلك على أعداد جاوس الأولية التي تطابق 3 قياس 4 . لذلك لا يمكن أن يكون العدد 9 من قواسم $A+Bi$ ، لأنه عند ذلك لن يبقى أي من عوامل العدد 3 ليقسم $A-Bi$. هذه الملاحظات تبين أن العوامل $A+Bi$ للعدد $N=28949649300$ يجب أن تكون على الشكل

$$A+Bi=(\text{وحدة})\cdot(1+i)^2\cdot(2+i)^n(2-i)^{2-n}\cdot$$

$$\cdot(2+3i)^m(2-3i)^{3-m}\cdot 3\cdot 11^2$$

حيث يمكننا أخذ أي $0\le n\le 2$ وأي $0\le m\le 3$. إذاً هناك 3 خيارات للقيمة n ، و 4 للقيمة m ، وهناك 4 خيارات معروفة للوحدة، إذاً هناك $4\cdot 3\cdot 4=48$ احتمالاً للعدد $A+Bi$. خاصية التحليل الوحيد لأعداد جاوس الصحيحة تخبرنا أن كتابة N كمجموع مربعين هي تماماً نفس مسألة إيجاد عدد $A+Bi$ ؛ يقسم N ، إذاً نستنتج أن $R(N)=48$. لكن من المهم أن نعلم أن هذا العدد 48 هو في الحقيقة حاصل ضرب المقادير الثلاثة التالية:

- عدد وحدات أعداد جاوس الصحيحة.

- أس العدد $2+i$ زائد واحد.
- أس العدد $2+3i$ زائد واحد.

سنبدأ الآن ببرهان نظرية مجموع مربعين للجندر. نبدأ بتحليل N إلى حاصل ضرب أعداد أولية عادية :

$$N = 2^{t} \underbrace{p_1^{e_1}\, p_2^{e_2} \, \ldots \, p_r^{e_r}}_{\left(\text{أعداد أولية } 1 \bmod 4\right)} \cdot \underbrace{q_1^{f_1}\, q_2^{f_2} \, \ldots \, q_s^{f_s}}_{\left(\text{أعداد أولية } 3 \bmod 4\right)}$$

حيث $p_1 ، \ldots ، p_r$ تطابق 1 قياس 4 ، و $q_s ، \ldots ، q_1$ تطابق 3 قياس 4 . سنستخدم أعداد جاوس الصحيحة لإيجاد صيغة للمقدار $R(N)$ بدلالة الأسس $e_1 ، \ldots ، e_r ، f_1 ، \ldots ، f_s$.

نحلل N إلى حاصل ضرب أعداد جاوس أولية. العدد الصحيح 2 يحلل إلى $2 = -i(1+i)^2$ ، وكل p_j تحلل على الشكل :

$$p_j = \left(a_j + b_j i\right)\left(a_j - b_j i\right),$$

بينما q_j هي نفسها أعداد جاوس أولية. إن هذا يعطي التحليل التالي :

$$N = (-i)^{t}\,(1+i)^{2t}\left(\left(a_1 + b_1 i\right)\left(a_1 - b_1 i\right)\right)^{e_1}\left(\left(a_2 + b_2 i\right)\left(a_2 - b_2 i\right)\right)^{e_2}$$
$$\cdots\left(\left(a_r + b_r i\right)\left(a_r - b_r i\right)\right)^{e_r} q_1^{f_1} q_2^{f_2} \ldots q_s^{f_s}$$

إذا كان أي من الأسس $f_1, \ldots, f_s$ فرديًّا ، فإننا نعلم أن N لا يمكن أن يكتب كمجموع مربعين. إذاً $R(N) = 0$. لذلك سنفرض الآن أن كل من الأسس $f_1, \ldots, f_s$ زوجي ، وسنفرض أن N يكتب على شكل مجموع مربعين ، وليكن $N = A^2 + B^2$. هذا يعني أن :

$$N = \left(A + Bi\right)\left(A - Bi\right)$$

إذاً كل من $(A-Bi)$, $(A+Bi)$ يتألف من عوامل N الأولية. أيضاً، بما أن كل من $(A-Bi)$, $(A+Bi)$ هو مرافق مركب للآخر، فإن كل عدد أولي يظهر في تحليل أي منهما يجب أن يكون مرافقه المركب ظاهر في الآخر. هذا يعني أن $(A+Bi)$ يبدو على الشكل:

$$\begin{aligned} A+Bi = u(1+i)^t & \left((a_1+b_1 i)^{x_1} (a_1-b_1 i)^{e_1-x_1} \right) \\ & \ldots \left((a_r+b_r i)^{x_r} (a_r-b_2 i)^{e_r-x_r} \right) q_1^{f_1/2}\ q_2^{f_2/2} \ldots q_s^{f_s/2} \end{aligned}$$

حيث u وحدة والأسس $x_1,\ldots,x_r$ تحقق:

$$0 \le x_1 \le e_1 \ ,\ 0 \le x_2 \le e_2 \ ,\ \ldots \ ,\ 0 \le x_r \le e_r$$

بأخذ المعيار لكلا الطرفين للتعبير عن N كمجموع مربعين، - لحصر عدد خيارات الأسس - ، نجد أن هذا يعطي:

$$4(e_1+1)(e_2+1)\ldots(e_r+1)$$

وهذا يمثل عدد طرق كتابة N كمجموع مربعين. (سنتركه لك كتمرين لتتأكد من أن الخيارات المختلفة للقيم x_r ، ... ، x_1 ، u تعطي قيماً مختلفة للعددين B , A).

نلخص ما سبق، لقد أثبتنا أنه إذا حللنا العدد الصحيح N على الشكل:

$$N = 2^t\, p_1^{e_1} \ldots p_r^{e_r}\, q_1^{f_1} \ldots q_s^{f_s}$$

حيث $p_1,\ldots,p_r$ جميعها تطابق 1 قياس 4 و $q_1,\ldots,q_s$ جميعها تطابق 3 قياس 4. عندئذ فإن:

$$R(N) = \begin{cases} 4(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_r+1) \ , & \text{إذا كانت } f_1,\ldots,f_s \text{ جميعها زوجية} \\ 0 \ , & \text{إذا كان } f_1,\ldots,f_s \text{ أي منها فردي} \end{cases}$$

سيكتمل برهان نظرية مجموع مربعين للجندر عندما نبرهن أن الفرق $D_1 - D_3$ يُعطى بنفس الصيغة.

نظرية (٦, ٣٤) (نظرية الفرق $D_1 - D_3$)

إذا حللنا العدد الصحيح N لحاصل ضرب أعداد أولية عادية :

$$N = 2^t \underbrace{p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}}_{\text{أعداد أولية } 1 \bmod 4} \cdot \underbrace{q_1^{f_1} q_2^{f_2} \dots q_s^{f_s}}_{\text{أعداد أولية } 3 \bmod 4}$$

لنفرض أن :

$D_1 =$ (عدد الأعداد الصحيحة d التي تقسم N بحيث $d \equiv 1 \pmod 4$).

$D_3 =$ (عدد الأعداد الصحيحة d التي تقسم N بحيث $d \equiv 3 \pmod 4$).

عندئذ فإن الفرق $D_1 - D_3$ يُعطى بالصيغة :

$$D_1 - D_3 = \begin{cases} 4(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_r+1), & \text{إذا كانت } f_1,\dots,f_2 \text{ جميعها موجبة} \\ 0 & \text{إذا كان } f_1,\dots,f_2 \text{ أي منها فردي} \end{cases}$$

البرهان

سنعطي برهاناً بالاستقراء على S. أولاً، إذا كان $S = 0$، فإن $N = 2^t p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$، لذلك فإن كل قاسم فردي للعدد N يطابق 1 قياس 4. أي $D_3 = 0$ و D_1 عدد قواسم N الفردية. قواسم N الفردية هي الأعداد $p_1^{u_1} \dots p_r^{u_r}$ حيث إن كل أس u_i يحقق $0 \le u_i \le e_i$. إذاً هناك $e_i + 1$ اختيار للعدد u_i، وهذا يعني أن العدد الكلي للقواسم الفردية هو :

$$D_1 - D_3 = D_1 = (e_1+1)(e_2+1)\dots(e_r+1)$$

هذا يكمل البرهان عندما $S = 0$ ، أي ، إذا كان N لا يقبل القسمة على أي من الأعداد الأولية 3 قياس 4 .

الآن ، ليكن N قابلاً للقسمة على عدد أولي q حيث $q \equiv 3 \pmod 4$ ، ولنعتبر أننا أكملنا البرهان لكل الأعداد التي يكون لها القاسم الأولي 3 قياس 4 أقل من N . ليكن q^f من قواسم N حيث f هو أعلى أس للعدد q ، إذاً $N = q^f n$ حيث $f \geq 1$ و q لا تقسم n . هناك حالتان تبعاً لكون f فرديًّا أو زوجيًّا.

أولاً ، نفرض أن f فردي. القواسم الفردية للعدد N هي الأعداد :

$q^i d$ حيث $0 \leq i \leq f$ و d فردي ويقسم n .

لذلك كل قاسم d للعدد n يُعطي بالضبط $f+1$ قاسم للعدد N ، أي أن ، للقواسم $q^i d$ حيث $0 \leq i \leq f$ ، ولقواسم N التي عددها $f+1$ ، فإن نصفها تماماً يطابق 1 قياس 4 والنصف الآخر يطابق 3 قياس 4 . لذلك فإن قواسم N تُقسم بالتساوي بين D_1 , D_3 ، إذاً $D_1 - D_3 = 0$. وهذا يكمل البرهان في حالة أن N يقبل القسمة على العدد الأولي المرفوع لأس فردي ويطابق 3 قياس 4 .

ثانياً ، لنفرض أن $N = q^f n$ ، حيث f زوجي. مرة أخرى ، القواسم الفردية للعدد N تكون على الشكل $q^i d$ ، حيث $0 \leq i \leq f$ ، و d ، فردي ويقسم n . إذا اعتبرنا فقط القواسم $q^i d$ ، حيث $0 \leq i \leq f-1$ ، فإن نفس السبب السابق يبين أن عدد القواسم 1 قياس 4 يساوي نفس عدد القواسم 3 قياس 4 ، إذاً ستُلغى في الفرق $D_1 - D_3$. بقيت الحالة التي تكون فيها قواسم N على الشكل $q^i d$. الأس f زوجي ، إذاً $q^f \equiv 1 \pmod 4$. هذا يعني أن $q^f d$ من ضمن D_1 إذا كان $d \equiv 1 \pmod 4$ وضمن D_3 إذا كان $d \equiv 3 \pmod 4$. بكلمات أخرى.

$$\left(D_1 \ for\ N\right)-\left(D_3 \ for\ N\right)=\left(D_1 \ for\ \ n\right)-\left(D_3 \ for\ \ n\right)$$

فرضنا الاستقرائي يخبرنا أن النظرية صحيحة للعدد n ، إذاً نستنتج أن النظرية صحيحة أيضاً للعدد N. هذا يكمل برهان نظرية $D_1 - D_3$.

تماريـــــــن

(٣٤,١) (a) ليكن $\alpha = 2+3i$. عين النقاط الأربع $\alpha, i\alpha, -\alpha, -i\alpha$ في المستوى المركب. صِل بين هذه النقاط الأربع. ما هو نوع الشكل الذي حصلت عليه؟

(b) نفس السؤال عندما $\alpha = -3+4i$.

(c) ليكن $\alpha = a+bi$ أي صحيح جاوس غير صفري، لتكن A النقطة في المستوى المركب الممثلة للعدد α ، لتكن B النقطة في المستوى المركب الممثلة للعدد $i\alpha$ ، ولتكن $O(0,0)$ النقطة في المستوى المركب الممثلة للعدد O.

ما هو قياس الزاوية $\measuredangle AOB$ ؟ أي، ما هو قياس الزاوية المؤلفة من الشعاعين $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ؟

(d) مرة أخرى، ليكن $\alpha = a+bi$ أي صحيح جاوس غير صفري. ما هو الشكل الناتج من ربط النقاط الأربع $\alpha, i\alpha, -\alpha, -i\alpha$ ؟ برهن أن إجابتك صحيحة.

(٣٤,٢) لكل من الأزواج التالية لصحيحي جاوس α و β أوجد صحيحي جاوس γ و ρ تحقق:

$$\alpha = \beta\gamma + \rho \qquad , \qquad N(\rho) < N(\beta)$$

$(a)\ \ \alpha = 11+17i \qquad , \qquad \beta = 5+3i$

$(b)\ \ \alpha = 12-23i \qquad , \qquad \beta = 7-5i$

$(c)\ \ \alpha = 21-20i \qquad , \qquad \beta = 3-7i$

(٣٤,٣) ليكن α , β عددين جاوس صحيحين حيث $\beta \neq 0$. أثبتنا أنه بإمكاننا دائماً إيجاد زوج من أعداد جاوس الصحيحة (γ, ρ) تحقق:

$$\alpha = \beta\gamma + \rho \qquad , \qquad N(\rho) < N(\beta)$$

(a) بيّن أنه يوجد دائماً على الأقل زوجين مختلفين (γ, ρ) يحققان الخصائص المطلوبة.

(b) هل يمكنك إيجاد α , β مع ثلاثة أزواج مختلفة (γ, ρ) لها نفس الخصائص المطلوبة؟ إما أن تعطي مثالاً أو أن تثبت أنه لا يوجد.

(c) نفس فقرة (b) ولكن بأربعة أزواج مختلفة (γ, ρ).

(d) نفس فقرة (b) ولكن بخمسة أزواج مختلفة (γ, ρ).

(e) وضح نتائجك في الفقرات (a)، (b)، (c)، و(d) هندسيًّا من خلال تقسيم مربع إلى عدة مناطق مختلفة تساوي القيمة α / β.

(٣٤,٤) ليكن α , β صحيحي جاوس ليس كلاهما مساوياً للصفر. نقول إن صحيح جاوس γ هو قاسم مشترك أكبر للعددين α , β إذا:

(i) γ تقسم كل من α , β.

(ii) من بين جميع القواسم المشتركة للعددين α , β ، فإن المقدار $N(\gamma)$ أكبر ما يمكن.

(a) افرض أن δ, γ كليهما قاسم مشترك أكبر للعددين α , β. برهن أن γ يقسم δ. استخدم هذه الحقيقة لتستنتج أن $\delta = u\gamma$ لقيمة u ما، حيث u وحدة.

(b) برهن أن المجموعة :

$$\{\alpha r + \beta s : s , r \text{ صحيح جاوس}\}$$

تضم القاسم المشترك الأكبر للعددين α , β .

(مساعدة : ابحث عن عناصر المجموعة التي لها أقل معيار).

(c) ليكن γ قاسماً مشتركاً أكبر للعددين α , β .

برهن أن المجموعة في (b) تساوي المجموعة :

$$\{\gamma t : t \text{ صحيح جاوس}\}$$

(٣٤,٥) أوجد القاسم المشترك الأكبر لكل من أزواج أعداد جاوس الصحيحة التالية :

(a) $\alpha = 8+38i$, $\beta = 9+59i$

(b) $\alpha = -9+19i$, $\beta = -19+4i$

(c) $\alpha = 40+60i$, $\beta = 117-26i$

(d) $\alpha = 16-120i$, $\beta = 52+68i$

(٣٤,٦) لتكن R مجموعة من الأعداد المركبة :

$$\{a+bi\sqrt{5} : b , a \text{ عددان صحيحان عاديان}\}$$

(a) تحقق من أن R حلقة ، أي ، تحقق من أن المجموع ، الفرق ، والضرب لعنصرين من R أيضاً ينتمي إلى R .

(b) بيّن أن حل المعادلة $\alpha\beta = 1$ في R هما فقط $\alpha = \beta = 1$, $\alpha = \beta = -1$. استنتج أن 1 , -1 هما الوحدتان الوحيدتان في الحلقة R .

(c) ليكن α , β عنصرين في R . نقول إن β يقسم α إذا وجد عنصر γ في R بحيث $\alpha = \beta\gamma$. بيّن أن $3+2i\sqrt{5}$ يقسم $85-11i\sqrt{5}$.

(d) نسمي عنصر α في R أوليًّا[1] إذا كانت قواسمه في R هي فقط $\pm 1\ ,\ \pm\alpha$. برهن أن 2 أولي في R .

(e) نعرف المعيار لعنصر $\alpha = a + bi\sqrt{5}$ في R على أنه $N(\alpha) = a^2 + 5b^2$. ليكن $\alpha = 11 + 2i\sqrt{5}$ و $\beta = 1 + i\sqrt{5}$ بيّن أنه لا يمكن إيجاد عنصرين $\gamma\ ,\ \rho$ في R بحيث

$$\alpha = \beta\gamma + \rho \qquad , \qquad N(\rho) < N(\beta)$$

أي أن R ليس لها خاصية باقي القسمة.

(مساعدة : ارسم صورة توضح النقاط في R والأعداد المركبة α / β).

(f) واضح أن العنصر الأولي 2 يقسم الضرب :

$$\left(1 + i\sqrt{5}\right)\left(1 - i\sqrt{5}\right) = 6$$

بيّن أن 2 لا يقسم العامل $1 + i\sqrt{5}$ أو العامل $1 - i\sqrt{5}$.

(g) بيّن أن العدد 6 يحلل إلى حاصل ضرب عددين أوليين في R بطريقتين مختلفتين ، وذلك من خلال التحقق من أن الأعداد في التحليلين :

$$6 = 2 \cdot 3 = \left(1 + i\sqrt{5}\right)\left(1 - i\sqrt{5}\right)$$

جميعها أولية.

(h) أوجد أعداداً أخرى α في R لها تحليلان مختلفان $\alpha = \pi_1\pi_2 = \pi_3\pi_4$

---

(١) العنصر α الذي قواسمه فقط هي $u\ ,\ u\alpha$ ، حيث u وحدة يسمى عنصر غير قابل للاختزال. الاسم أولي محجوز لعنصر α له خاصية أنه إذا كان يقسم حاصل ضرب فإنه دائماً يقسم أحد العوامل على الأقل. بالنسبة للأعداد الصحيحة العادية وأعداد جاوس الصحيحة ، أثبتنا أن كل عنصر غير قابل للاختزال هو أولي ، لكن هذا غير صحيح للحلقة R في هذا التمرين.

حيث π_1,π_2,π_3,π_4 أعداد أولية مختلفة في R.

(i) هل يمكنك إيجاد أعداد أولية مختلفة $\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6$ في R لها الخاصية $\pi_1\pi_2=\pi_3\pi_4=\pi_5\pi_6$ ؟

(٣٤,٧) خلال برهان نظرية مجموع مربعين للجندر، احتجنا لمعرفة أن الخيارات المختلفة للوحدة u والأسس $x_1,\ldots,x_r$ في الصيغة

$$A+Bi=u(1+i)^t\left((a_1+b_1i)^{x_1}(a_1-b_1i)^{e_1-x_1}\right)\ldots\left((a_r+b_ri)^{x_r}(a_r-b_ri)^{e_r-x_r}\right)q_1^{f_1/2}\,q_2^{f_2/2}\ldots q_s^{f_s/2}$$

تعطي قيماً مختلفة للعددين B,A. برهن أن هذا صحيح.

(٣٤,٨) (a) اعمل قائمة بجميع قواسم العدد $N=2925$.

(b) استخدم (a) لحساب D_1 , D_3، عدد قواسم 2925 يطابق 1 و 3 قياس 4، على التوالي.

(c) اعتمد على نظرية مجموع مربعين للجندر لحساب $R(2925)$.

(d) اعمل قائمة لجميع الطرق الممكنة لكتابة العدد 2925 كمجموع مربعين وتأكد من أن النتيجة التي حصلت عليها تتفق مع إجابتك في (c).

(٣٤,٩) لكل قيمة من القيم التالية، احسب قيم D_1 , D_3، تحقق من إجابتك بمقارنة الفرق D_1-D_3 مع الصيغة المعطاة في نظرية D_1-D_3، واستخدم نظرية مجموع مربعين للجندر لحساب $R(N)$.

إذا كان $R(N)\neq 0$، أوجد أربع طرق مختلفة على الأقل لكتابة $N=A^2+B^2$ حيث $A>B>0$.

$(a)\quad N=327026700$

$(b)\quad N=484438500$