نظرية الأعداد والأعداد التخيلية

Number Theory and Imaginary Numbers

كلنا نعلم "العدد" $i = \sqrt{-1}$.

إن استخدام الحرف " i " ليعبر عن الجذر التربيعي لسالب العدد 1 يعود تاريخه إلى تلك الأيام عندما نظر الناس إلى هذه الأعداد بكثير من الشك والريبة، وشعروا أنها أبعد ما تكون عن الأعداد الحقيقية؛ ولذلك تستحق أن يطلق عليها اسم "تخيلية". وفي هذا العصر المتقدم فنحن نعلم أن كل[1] الأعداد، إلى حد ما، هي مجردات يمكن استخدامها لحل بعض أنواع من المسائل. مثلاً، الأعداد السالبة (والتي لم تستخدم من قبل الرياضيين الأوروبيين حتى القرن الرابع عشر، على الرغم من استخدامها في الهند حوالي العام 600 للميلاد) لا نحتاج لها لإحصاء عدد الماشية، ولكنها مفيدة في أمور الديون. وظهر استخدام الكسور عندما بدأ الناس بالتعامل مع الأشياء التي يمكن قسمتها، مثل مكاييل القمح والذرة. الأعداد غير النسبية، وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على شكل كسر، ظهرت في أبسط أنواع القياسات، عندما وجد الفيثاغوريون

(١) أو على الأقل، تقريباً كلها. قال ليوبولد كرونكر (1823 – 1891): "خلق الله الأعداد الصحيحة، وكل أعداد غيرها هي من صنع الإنسان".

obeikandl.com

أن قطر بعض الأشكال الهندسية تكون غير متناسبة مع أضلاعها. لقد قلب هذا الاكتشاف العُرف الرياضي رأساً على عقب في ذلك الوقت، وكان الموت هو عقاب كل من باح بهذا السر. إن ظهور الأعداد التخيلية أحدث نفس القلق والارتباك في أوربا في القرن التاسع عشر، على الرغم من أن العقوبات المفروضة على من يستخدم الأعداد التخيلية كانت أقل حزماً من ذي قبل.

الأعداد التخيلية وبشكل أعم الأعداد المركبة، $z = x + iy,$. عُرِّفَت في الرياضيات لهدف محدد وهو حل المعادلات. فلقد احتجنا الأعداد السالبة لحل المعادلة $x + 3 = 0$ ، بينما احتجنا الكسور لحل $3x - 7 = 0$. بالنسبة للمعادلة $x^2 - 5 = 0$ نحتاج العدد غير النسبي $\sqrt{5}$ ، ولكن حتى لو قدمنا للشكل العام للأعداد غير النسبية فإننا نبقى غير قادرين على حل المعادلة البسيطة $x^2 + 1 = 0$. لأن هذه المعادلة ليس لها أي حل في مجموعة "الأعداد الحقيقية"، ولا يوجد أي شيء يمنعنا من خلق عدد جديد ليكون حلاً، وإعطاء هذا العدد الجديد الاسم i . وهذا لا يختلف عن كوننا أحراراً في خلق حل للمعادلة $x^2 - 5 = 0$ وتسميته $\sqrt{5}$ ، حيث إن المعادلة $x^2 - 5 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد النسبية. في الحقيقة فعلنا نفس الشيء عندما لاحظنا أن المعادلة $3x - 7 = 0$ ليس حلولاً في مجموعة الأعداد الصحيحة، ولذلك أوجدنا حلاً لها وأسميناه $\frac{7}{3}$.

إن الأعداد المركبة وجدت[١] لحل معادلات مثل $x^2 + 1 = 0$ ، ولكن لماذا

(١) قد يقول البعض إن الأعداد المركبة موجودة أصلاً، بينما يعتقد البعض الآخر بقوة أن الوجود الرياضي مثل الأعداد المركبة هي من صنع مخيلة الإنسان. هذا السؤال عن فيما إذا كانت الرياضيات مكتشفة أو من صنع الإنسان هو لغز فلسفي مثير (وهو من أفضل الأسئلة الفلسفية) ولكن لسوء الحظ لا يوجد أحد يمكن أن يعطي إجابة محددة لهذا السؤال.

obeikandi.com

نقف هناك؟ الآن ونحن نعرف الأعداد المركبة، يمكننا أن نحاول حل معادلات أكثر تعقيداً ، حتى المعادلات التي معاملاتها أعداد مركبة مثل :

$$\left(3+2i\right)x^{3}-\left(\sqrt{3}-5i\right)x^{2}-\left(\sqrt[7]{5}+\sqrt[3]{14i}\right)x+17-8i=0$$

إذا لم يكن لهذه المعادلة حلول، فإننا سوف نحاول بقوة اختراع أعداد أخرى. مفاجأة، إن هذه المعادلة لها حلول في مجموعة الأعداد المركبة. الحلول (مقربة إلى أقرب خمس خانات عشرية) هي :

$$1.27609+0.72035i,\quad 0.03296-2.11802i,\quad -1.67858-0.02264i$$

في الواقع، فإن هناك عدداً كافياً من الأعداد المركبة لحل أي معادلة من هذا النوع، وهذا ما تنص عليه المعادلة التي لها تاريخ طويل واسم لامع.

نظرية (٣٣,١) (النظرية الأساسية في الجبر)

إذا كان $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d$ أعداداً مركبة، حيث $a_0 \neq 0$ و $d \geq 1$ ؛ فإن المعادلة

$$a_0x^{d}-a_1x^{d-1}-a_2x^{d-2}+\cdots+a_{d-1}x+a_d=0$$

لها حل في الأعداد المركبة.

إن هذه النظرية صيغت واستخدمت من قبل الكثير من الرياضيين خلال القرن الثامن عشر، ولكن أولى البراهين المقنعة لم تكتشف حتى بدايات القرن التاسع عشر. كثير من هذه البراهين معروف الآن، بعضها استخدم الجبر، وبعضها استخدم التحليل (التفاضل والتكامل)، وبعضها استخدم الأفكار الهندسية. لسوء الحظ، ولا واحد من هذه البراهين سهل ؛ ولذلك لن نعطي أي منها هنا.

بدلاً من ذلك، سوف نبحث عن الأعداد المركبة في نظرية الأعداد. إنك تتذكر

obeikandl.com

بلا شك القوانين البسيطة عن جمع وطرح الأعداد المركبة، وضربها يُعرَّف بكل سهولة كما يلي:

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

أما بالنسبة للقسمة فإننا نستخدم إنطاق المقام:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}$$

سنتعامل في نظرية الأعداد مع مجموعة جزئية خاصة من الأعداد المركبة تسمى أعداد جاوس الصحيحة *Gaussian integers*. وهي الأعداد المركبة التي تكتب على الشكل:

$a+bi$ حيث a , b عددان صحيحان.

أعداد جاوس الصحيحة تشترك مع الأعداد الصحيحة العادية في كثير من الخصائص. فمثلاً، إذا كان كل من α,β عدداً جاوساً صحيحاً فإن كل من مجموعهما $\alpha+\beta$، طرحهما $\alpha-\beta$، وضربهما $\alpha\beta$ عدد جاوس صحيح. على كل حال، قسمة عددين جاوسيين صحيحين ليس بالضرورة أن يكون عدداً جاوساً صحيحاً (تماماً كما أن قسمة عددين صحيحين عاديين ليس بالضرورة أن يكون عدداً صحيحاً). فمثلاً:

$$\frac{3+2i}{1-6i}=\frac{-9+20i}{37}$$

ليس عدداً جاوساً صحيحاً، بينما:

$$\frac{16-11i}{3+2i}=\frac{26-65i}{13}=2-5i$$

هو عدد جاوس صحيح.

إن هذا يلزمنا بتعريف قسمة أعداد جاوس الصحيحة تماماً كما عرفناها للأعداد الصحيحة العادية. لذلك نقول إن عدد جاوس الصحيح $a+bi$ يقسم عدد جاوس الصحيح $c+di$ إذا استطعنا إيجاد عدد جاوس صحيح $e+fi$ بحيث:

$$c+di=\left(a+bi\right)\left(e+fi\right)$$

وهذا طبعاً نفس معنى إن نقول أن النسبة $\dfrac{c+di}{a+bi}$ هي عدد جاوس صحيح. على سبيل المثال، رأينا أن $3+2i$ يقسم $16-11i$، لكن $1-6i$ لا يقسم $3+2i$.

الآن وبعد أن عرفنا كيف نتكلم عن القسمة، نستطيع أن نتكلم عن التحليل. مثلاً، العدد $1238-1484i$ يحلل كما يلي:

$$1238-1484i=\left(2+3i\right)^3\cdot\left(-1+4i\right)\cdot\left(3+i\right)^2.$$

وحتى الأعداد الصحيحة العادية مثل $600=2^3\cdot 3\cdot 5^2$، والتي نظن أننا نعلم تلقائيًّا كيف تحلل، يمكن أن تحلل أيضاً باستخدام أعداد جاوس الصحيحة:

$$600=-i\cdot\left(1+i\right)^6\cdot 3\cdot\left(2+i\right)^2\cdot\left(2-i\right)^2.$$

بالنسبة للأعداد الصحيحة العادية، الأعداد الأولية هي لبنات البناء الأساسية لأنه لا يمكن تحليلها إلى عوامل أصغر منها طبعاً، هذا ليس صحيحاً تماماً من ناحية تقنية، لأن العدد 7 يمكن أن يحلل كما يلي:

$$7=1\cdot 7 \quad \text{أو} \quad 7=\left(-1\right)\cdot\left(-1\right)\cdot 7$$

أو حتى:

$$7=\left(-1\right)\cdot\left(-1\right)\cdot\left(-1\right)\cdot\left(-1\right)\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 7$$

على كل حال، فإننا نلاحظ أن هذه التحليلات هي ليست تحليلات مختلفة فعليًّا؛ لأننا نستطيع دائماً وضع أكثر من 1 وأزواج من -1. ما هو الذي يجعل العددين 1 و -1 عددين مميزين؟ الجواب هو أنهما العددان الصحيحان الوحيدان اللذان لكل منهما نظير ضربي صحيح:

$$(-1)\cdot(-1)=1 \quad \text{و} \quad 1\cdot 1=1$$

(في الحقيقة، فكل منهما هو النظير الضربي لنفسه، ولكن هذا يجعل الموضوع أقل أهمية). لاحظ أنه إذا كان a أي عدد صحيح غير 1 و -1 فإن a ليس لها نظير ضربي صحيح؛ لأن المعادلة $ab=1$ ليس لها حل b بحيث يكون b عدداً صحيحاً. نقول إن 1 و -1 هما الوحدتان الوحيدتان في الأعداد الصحيحة العادية.

إن أعداد جاوس الصحيحة لها وحدات أكثر من الأعداد الصحيحة العادية. فمثلاً، i نفسها وحدة؛ لأن:

$$i\cdot(-i)=1$$

تبين هذه المعادلة أيضاً أن $-i$ وحدة، بذلك نرى أن لأعداد جاوس الصحيحة أربع وحدات على الأقل: $-i, i, -1, 1$. هل هناك وحدات أخرى؟

للإجابة عن هذا السؤال، لنفرض أن $a+bi$ وحدة في أعداد جاوس الصحيحة. هذا يعني أن له نظيراً ضربيًّا؛ لذلك يوجد عدد جاوس صحيح آخر $c+di$ بحيث:

$$(a+bi)(c+di)=1$$

إذاً:

$$ac-bd=1 \quad , \quad ad+bc=0$$

لـذلك ؛ فإننـا نبحـث عـن الحلـول (a,b,c,d) لهـاتين المعـادلتين في الأعـداد الصحيحة العادية. سنرى لاحقاً طريقة رائعة لحل هذه المسألة، لكن دعنا حتى الآن نستخدم فقط القليل من الجبر والقليل من المعلومات البسيطة.

نحن نحتاج لأخذ عدة حالات بعين الاعتبار ، أولاً إذا كان $a=0$ ، فإن $-bd=1$ ، إذاً $b=\pm1$ و $a+bi=\pm1$. ثانياً، إذا كان $b=0$ فإن $ac=1$ ، إذاً $a=\pm1$ و $a+bi=\pm1$. هاتان الحالتان تؤديان إلى الأربع وحدات التي نعرفها سابقاً.

بالنسبة للحالة الثالثة والحالة الأخيرة، لنفرض أن $a\neq 0$, $b\neq 0$. عندئذ يمكننا حل المعادلة الأولى في c ونعوضها في المعادلة الثانية:

$$c=\frac{1+bd}{a} \;\Rightarrow\; ad+b\left(\frac{1+bd}{a}\right)=0 \;\Rightarrow\; \frac{a^2d+b+b^2d}{a}=0$$

لذلك أي حل يفترض $a\neq 0$ يجب أن يحقق المعادلة:

$$\left(a^2+b^2\right)d=-b$$

هذا يعني أن a^2+b^2 يقسم b ، وهذا غير منطقي ؛ لأن a^2+b^2 أكبر من b (تذكر أن $a\neq 0$, $b\neq 0$). هذا يعني أن الحالة الثالثة لا تعطي وحدات جديدة، وبذلك نكون قد أكملنا برهان نظريتنا الأولى عن أعداد جاوس الصحيحة.

نظرية (٢, ٣٣) (نظرية وحدة جاوس)

وحدات أعداد جاوس الصحيحة هي فقط $1,-1,i,-i$ أي أن هذه الأعداد هي أعداد جاوس الصحيحة الوحيدة التي لها نظائر ضربية بحيث تكون هذه النظائر أعداداً جاوساً صحيحة.

obeikandl.com

إن أحد الأشياء التي تجعل أعداد جاوس الصحيحة مجموعة جزئية مهمة من مجموعة الأعداد المركبة هو أن مجموع، طرح، وضرب أي عددين منها يكون أيضاً عدداً جاوساً صحيحاً. لاحظ أن الأعداد الصحيحة العادية أيضاً لها هذه الخاصة. المجموعة الجزئية من مجموعة الأعداد المركبة التي لها هذه الخاصية (وتحوي أيضاً العددين 0 , 1) تسمى "حلقة" ring ؛ لذلك فإن الأعداد الصحيحة العادية وأعداد جاوس الصحيحة هما مثالان على الحلقات. هناك الكثير من الحلقات المهمة الموجودة في مجموعة الأعداد المركبة، وستتاح لك الفرصة لدراسة بعضها في تمارين هذا الفصل.

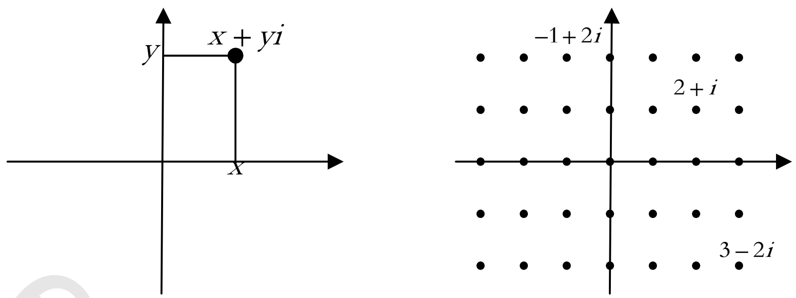
لنعود لمناقشة التحليل في أعداد جاوس الصحيحة، قد نقول إن عدداً جاوساً صحيحاً α هو أولي إذا كان يقبل القسمة فقط على ± 1 ونفسه، ولكن واضح أنه من الخطأ عمل ذلك. على سبيل المثال يمكننا دائماً كتابة:

$$\alpha = i \cdot (-i) \cdot \alpha$$

لذلك؛ فإن أي α يقبل القسمة على i , $-i$, $i\alpha$, $-i\alpha$. إن هذا يقودنا لتصحيح التعريف. يسمى عدد جاوس صحيح α عدد جاوس أولي إذا كانت أعداد جاوس الصحيحة التي تقسم α هي فقط الأعداد الثمانية التالية:

$$1, \quad -1, \quad i, \quad -i, \quad \alpha, \quad i\alpha, \quad -i\alpha$$

بكلمات أخرى، الأعداد التي تقسم α هي فقط الوحدات ومضروب α فيها.



a) الأعداد المركبة في المستوى

B) أعداد جاوس الصحيحة

الشكل رقم (٣٣,١). الهندسة للأعداد المركبة

الآن وقد عرفنا ما هي أعداد جاوس الأولية، هل نستطيع تحديدها؟ على سبيل المثال، أي الأعداد التالية - حسب ما تظن- هي أعداد جاوس أولية ؟

$$2,\quad 3,\quad 5,\quad 1+i,\quad 3+i,\quad 2+3i$$

يمكننا الإجابة عن هذا السؤال باستخدام الأفكار الجبرية التي وظفناها سابقاً عندما حددنا جميع وحدات جاوس، لكن مهمتنا تكون أسهل إذا استخدمنا الهندسة.

نقدم الهندسة في دراستنا عن الأعداد المركبة من خلال تعيين كل عدد مركب $x+yi$ بنقطة (x,y) في المستوى. هذه الفكرة موضحة في الشكل 33.1(a) . عندئذ تعين أعداد جاوس الأولية بالنقاط الصحيحة (x,y) ، أي بالنقاط التي يكون لها كل من x , y عدد صحيح.

(الشكل 33.1(b)) يبين أن أعداد جاوس الصحيحة تشكل شبكة مربعة الشكل من النقاط في المستوى.

بتعيين العدد المركب كنقطة (x,y) في المستوى، يمكننا أن نتكلم عن المسافة بين عددين مركبين. كحالة خاصة، المسافة بين $x+yi$ و 0 تساوي $\sqrt{x^2+y^2}$. من

obeikandi.com

المناسب أكثر أن نتعامل مع مربع المسافة ؛ لذلك نعرف معيار العدد $x+yi$ ليكون :

$$N\left(x+yi\right)=x^2+y^2$$

من البديهي أن معيار العدد المركب α هو نوع من قياس الحجم للعدد α. من وجهة النظر هذه فإن المعيار يقيس كمية هندسية. من جهة أخرى ، فإن للمعيار أيضاً خاصية جبرية مهمة : المعيار للضرب يساوي الضرب للمعايير. هذا التفاعل بين الخصائص الهندسية والخصائص الجبرية يجعل المعيار إحدى الأدوات المفيدة لدراسة أعداد جاوس الصحيحة. سنبرهن الآن خاصية الضرب.

نظرية (٣٣,٣) (خاصية ضرب المعيار)

ليكن α , β أي عددين مركبين. فإن :

$$N\left(\alpha\beta\right)=N\left(\alpha\right)N\left(\beta\right)$$

البرهان

إذا كتبنا $\alpha=a+bi \quad , \quad \beta=c+di$ ، فإن

$$\alpha\beta=\left(ac-bd\right)+\left(ad+bc\right)i,$$

لذلك ؛ فإننا نحتاج إلى التأكد من أن :

$$\left(ac-bd\right)^2+\left(ad+bc\right)^2=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$$

من السهل التحقق من ذلك بفك طرفي المعادلة ، وسنترك عمل ذلك لك (أو انظر الفصل السادس والعشرون).

قبل العودة لمسألة التحليل، من المفيد أن نرى كيف يستخدم المعيار لإيجاد الوحدات. لذلك؛ إفرض أن $\alpha = a + bi$ وحدة. هذا يعني وجود عدد $\beta = c + di$ بحيث $\alpha\beta = 1$. بأخذ المعيار للطرفين واستخدام خاصية ضرب المعيار ينتج:

$$N(\alpha)N(\beta) = N(\alpha\beta) = N(1) = 1$$

إذاً:

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) = 1$$

لكن a, b, c, d جميعها أعداد صحيحة، إذاً يجب أن يكون $a^2 + b^2 = 1$. الحلول الوحيدة لهذه المعادلة هي

$$(a,b) = (1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1),$$

والتي تعطينا برهاناً جديداً على أن وحدات جاوس هي فقط $1, -1, i, -i$. أيضاً نستنبط صيغة مفيدة:

يكون عدد جاوس الصحيح α وحدة إذا و فقط إذا كان $N(\alpha) = 1$.

دعنا الآن نحاول تحليل بعض الأعداد. سنبدأ بالعدد 2 ونحاول أن نحلله كالتالي:

$$(a + bi)(c + di) = 2$$

بأخذ المعيار للطرفين نحصل على:

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) = 4$$

$\left[N(2) = N(2 + 0i) = 2^2 + 0^2 = 4\right]$. نحن لا نريد أن يكون إما $a + bi$

وإما $c+di$ وحدة ؛ لذلك لا العدد a^2+b^2 ولا العدد c^2+d^2 مسموح أن يكون 1. بما أن حاصل ضربهما يساوي 4 وكليهما عدد صحيح موجب، فإن :

$$a^2+b^2=2 \quad , \quad c^2+d^2=2$$

بالتأكيد أن لهاتين المعادلتين حلولاً ؛ مثلاً، إذا أخذنا $(a,b)=(1,1)$ وقسمنا 2 بالعدد $a+bi=1+i$ نحصل على

$$c+di=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{2}=1-i$$

لذلك $(1-i)(1+i)=2$ ، إذاً 2 ليست عدداً جاوساً صحيحاً أوليًّا!

إذا حاولنا أن نحلل 3 بنفس الأسلوب ، فسننتهي بالمعادلتين :

$$a^2+b^2=3 \quad , \quad c^2+d^2=3$$

من الواضح أنه لا يوجد حلول لهاتين المعادلتين، إذاً 3 عدد جاوس أولي. من جهة أخرى ، إذا بدأنا بالعدد 5 فسننتهي بالتحليل $(2-i)(2+i)=5$.

يمكننا استخدام نفس الإجراء لتحليل أعداد جاوس الصحيحة التي ليست أعداداً صحيحة عادية. الطريقة العامة لتحليل عدد جاوس صحيح α هو بوضع

$$(a+bi)(c+di)=\alpha$$

وبأخذ المعيار للطرفين لنحصل على :

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=N(\alpha)$$

هذه معادلة بأعداد صحيحة، ونحن نريد إيجاد حل غير تافه، أي أننا نريد حل بحيث كل من a^2+b^2 و c^2+d^2 لا يساوي 1. لذلك أول شيء نحتاج أن نفعله هو

تحليل العدد الصحيح $N(\alpha)$ إلى حاصل ضرب AB حيث، $A \neq 1$ و $B \neq 1$.
عندئذ نحتاج لحل:

$$a^2 + b^2 = A \text{ و } c^2 + d^2 = B$$

لذلك؛ تحليل أعداد جاوس الصحيحة يرجع بنا إلى الوراء لمسألة مجموع مربعين التي درسناها في الفصلين السادس والعشرون والسابع والعشرون.

لنرى كيف نمارس هذا العمل، سوف نحلل $\alpha = 3 + i$. معيار α هو $N(\alpha) = 10$، الذي يحلل $2 \cdot 5$، إذاً سوف نحل $c^2 + d^2 = 5$, $a^2 + b^2 = 2$. إن هناك عدداً من الحلول. فمثلاً، إذا أخذنا $(a,b) = (1,1)$، فإن التحليل هو:

$$3 + i = (1 + i)(2 - i)$$

هل فهمت لماذا حصلنا على عدة حلول؟ إن ذلك بسبب أن تحليل $3 + i$ يمكن أن يغير دائماً بالوحدات. لذلك؛ إذا أخذنا $(a,b) = (-1,1)$، سنحصل على $3 + i = (-1 + i)(-1 - 2i)$، والذي هو في الحقيقة نفس التحليل، حيث إن:

$$-1 - 2i = -i(2 - i) \quad , \quad -1 + i = i(1 + i).$$

ماذا حدث عندما حاولنا تحليل $\alpha = 1 + i$؟ معيار α هو $N(\alpha) = 2$ و 2 لا يمكن أن تحلل على الشكل $2 = AB$ حيث B, A عددان صحيحان عاديان و $A, B > 1$. هذا يعني أن α ليس لها تحليلات غير تافهة في أعداد جاوس الصحيحة؛ لذلك فهو أولي. نفس الشيء، لا يمكننا تحليل $2 + 3i$ في أعداد جاوس الصحيحة؛ لأن $N(2 + 3i) = 13$ هو أولي في الأعداد الصحيحة العادية. [لكن لاحظ أن 13 ليس عدداً جاوساً أوليًّا، لأن $13 = (2 + 3i)(2 - 3i)$]. لذلك $2 + 3i$ هو عدد جاوس أولي. بشكل أعم، إذا كان $N(\alpha)$ عدداً أوليًّا عاديًّا؛ فإن نفس

الأسباب تبين أن α يجب أن يكون جاوساً أوليًّا. ينتج أن هذه تمثل نصف أعداد جاوس الأولية، والنصف الآخر هو أعداد مثل العدد 3، أي أعداد أولية عادية وأعداد جاوس أولية في نفس الوقت. النظرية التالية تعطي وصفاً كاملاً لجميع أعداد جاوس الأولية، وتمتاز بالعمق والجمال.

نظرية (٤,٣٣) (نظرية عدد جاوس الأولي)

يمكن وصف أعداد جاوس الأولية كما يلي:

(i) $1+i$ جاوس أولي.

(ii) ليكن p عدداً أوليًّا عاديًّا حيث $p=3\pmod 4$. فإن p جاوس أولي.

(iii) ليكن p عدداً أوليًّا عادي، حيث $p=1\pmod 4$ واكتب p كمجموع مربعين $p=u^2+v^2$ (أنظر الفصل 26). فإن $u+vi$ جاوس أولي.

أي جاوس أولي يساوي وحدة (± 1 أو $\pm i$) مضروباً بجاوس أولي من الشكل (i)، (ii)، أو (iii).

البرهان

كما لاحظنا سابقاً، إذا كان $N(\alpha)$ أوليًّا عاديًّا، فإن α يجب أن يكون جاوساً أوليًّا. العدد $1+i$ في الصنف (i) معياره 2، إذاً هو جاوس أولي. نفس الشيء بالنسبة للأعداد $u+iv$ في الصنف (iii)، معيارها $u^2+v^2=p$ ؛ لذلك هي أيضاً أعداد جاوس أولية.

سنختبر الآن الصنف (ii)؛ لذلك سنفرض أن $\alpha=p$ أي أولي عادي، حيث $p\equiv 3\pmod 4$. إذا كان للعدد α تحليل في أعداد جاوس الصحيحة، افرض

$\alpha = (a+bi)(c+di)$ ، عندئذ بأخذ المعيار ينتج :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = N(\alpha) = p^2$$

ولنحصل على تحليل غير تافه ، فإننا نحتاج لحل :

$$a^2+b^2 = p \quad , \quad c^2+d^2 = p$$

ولكننا نعلم من نظرية مجموع مربعين (فصل 26) أنه بما أن $p \equiv 3 \pmod 4$ ، فإنه لا يمكن كتابته كمجموع مربعين ؛ لذلك لا توجد حلول. إذاً لا يمكن تحليل p ، إذاً هو جاوس أولي.

بينا حتى الآن أن الأعداد في الأصناف (i) ، (ii) و (iii) هي في الحقيقة أعداد جاوس أولية ؛ لذلك بقي علينا أن نبين أن أي جاوس أولي يقع في واحد من تلك الأصناف الثلاثة. لعمل ذلك سوف نستخدم النتيجة التالية.

نتيجة (٣٣,٥) (نتيجة قابلية القسمة لأعداد جاوس)

ليكن $\alpha = a+bi$ عدداً جاوساً صحيحاً.

(a) إذا كان 2 يقسم $N(\alpha)$ ، فإن $1+i$ يقسم α.

(b) ليكن $\pi = p$ عدداً أوليًّا من الصنف (ii) ، وافرض أن p يقسم $N(\alpha)$ لأعداد صحيحة عادية. فإن π يقسم α لأعداد جاوس صحيحة.

(c) ليكن $\pi = u+vi$ جاوساً أوليًّا من الصنف (iii) ، وليكن $\bar{\pi} = u-vi$. (هذا رمز طبيعي ؛ لأن $\bar{\pi}$ هو في الحقيقة مرافق العدد المركب للعدد المركب π). افرض أن $N(\alpha) = p$ يقسم $N(\alpha)$ لأعداد صحيحة عادية.

عندئذ ، على الأقل واحد من π و $\bar{\pi}$ يقسم α إلى أعداد جاوس صحيحة.

برهان النتيجة

(a) معطى أن 2 يقسم $N(\alpha)=a^2+b^2$ ؛ إذاً b,a كلاهما فردي أو كلاهما زوجي. إذاً $a+b$ و $-a+b$ كلاهما يقبل القسمة على 2 ؛ إذاً النسبة :

$$\frac{a+bi}{1+i}=\frac{(a+b)+(-a+b)i}{2}$$

هي عدد جاوس صحيح. إذاً $a+bi$ يقبل القسمة على $1+i$.

(b) معطى أن $p\equiv 3 \pmod 4$ ولذلك p يقسم a^2+b^2. هذا يعني أن $a^2\equiv -b^2 \pmod p$ ؛ إذاً يمكننا حساب رموز لجندر :

$$\left(\frac{a}{p}\right)^2=\left(\frac{a^2}{p}\right)=\left(\frac{-b^2}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)^2$$

وحيث إن $p\equiv 3 \pmod 4$ ، فإن قانون التعاكس التربيعي (فصل 24) يخبرنا أن $\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$ ، إذاً $\left(\frac{a}{p}\right)^2=-\left(\frac{b}{p}\right)^2$.

لكن قيمة رمز لجندر هي ± 1 ؛ لذلك يبدو أننا سننتهي بأن $-1=1$. أين الخطأ؟ وحاول حسابه بنفسك قبل أن تكمل القراءة.

الإجابة هي أن رمز لجندر $\left(\frac{a}{p}\right)$ يكون له معنى فقط إذا كان $a\not\equiv 0 \pmod p$ ، أي أن $\left(\frac{a}{p}\right)$ ليس له قيمة. لذلك فإن المخرج من هذا التناقض هو أن b,a يجب أن يكون كل منهما قابلاً للقسمة على p ، ولنفرض أن $a=pa'$ و $b=pb'$ ؛ لذلك $\alpha=a+bi=p(a'+b'i)$ يقبل القسمة على $p=\pi$ ، وهذا الذي حاولنا إثباته.

(c) معطى أن p تقسم $N(\alpha)$ ؛ لذلك يمكننا أن نكتب $N(\alpha)=a^2+b^2=pk$ لعدد صحيح $k\geq 1$.

نحتاج أن نثبت أن واحد على الأقل من العددين

$$\frac{\alpha}{\pi}=\frac{(au+bv)+(-av+bu)i}{p}$$

و

$$\frac{\alpha}{\overline{\pi}}=\frac{(au-bv)+(av+bu)i}{p}$$

يكون عدداً جاوساً صحيحاً.

أول ملاحظة هي أن:

$$\begin{aligned}(au+bv)(au-bv)&=a^2u^2-b^2v^2\\&=a^2u^2-b^2\left(p-u^2\right)\\&=\left(a^2+b^2\right)u^2-pb^2\\&=pKu^2-pb^2\end{aligned}$$

لذلك واحد على الأقل من العددين الصحيحين $au+bv$ و $au-bv$ يقبل القسمة على p. نفس الحسابات تبين أن

$$(-av+bu)(av+bu)=pKu^2-pa^2$$

لذلك واحد على الأقل من العددين $-av+bu$ و $av+bu$ يقبل القسمة على p. إذاً هناك أربع حالات يجب أن تأخذ بعين الاعتبار:

الحالة 1: $au+bv$ و $-av+bu$ يقبلان القسمة على p.

الحالة 2: $au+bv$ و $av+bu$ يقبلان القسمة على p.

الحالة 3: $au-bv$ و $-av+bu$ يقبلان القسمة على p .

الحالة 4: $au-bv$ و $av+bu$ يقبلان القسمة على p .

الحالة 1 سهلة ؛ لأنها تقتضي مباشرة أن النسبة α/π هي عدد جاوس صحيح ؛ لذلك فإن π تقسم α. نفس الشيء بالنسبة للحالة 4 ، النسبة $\alpha/\overline{\pi}$ هي عدد جاوس صحيح ؛ لذلك فإن $\overline{\pi}$ تقسم α.

الحالة 2 معقدة أكثر. معطى أن p تقسم كلا العددين $au+bv$ و $av+bu$ ، من ذلك نستنتج أن p تقسم :

$$(au+bv)b-(av+bu)a=(b^2-a^2)v.$$

(الفكرة هنا هي أننا (لغينا) u من المعادلة). حيث إنه من الواضح أن p لا تقسم v (تذكر أن $p=u^2+v^2$)، فإننا نرى أن p تقسم b^2-a^2. على كل حال، نعلم أيضاً أن p تقسم a^2+b^2 ؛ لذلك نجد أن p تقسم كلاً من:

$$2a^2=(a^2+b^2)-(b^2-a^2) \quad , \quad 2b^2=(a^2+b^2)+(b^2-a^2)$$

حيث إن $p\neq 2$ ، نستنتج أخيراً أن p تقسم كلاً من b , a ، افرض أن $b=pb'$, $a=pa'$ فإن :

$$\alpha=a+bi=p(a'+b'i)=(u^2+v^2)(a'+b'i)=\pi\overline{\pi}(a'+b'i)$$

لذلك بالنسبة للحالة 2 نجد أن α تقبل القسمة على كل من π , $\overline{\pi}$.

أخيراً، نلاحظ أن نفس فكرة الحسابات بالنسبة للحالة 3 توصلنا لنفس النتيجة التي أوصلتنا إليها الحالة 2 ، سنترك لك هذه التفاصيل.

استئناف البرهان. بعد تلك المداخلة المختصرة نكون الآن جاهزين لاستئناف برهان نظرية عدد جاوس الأولي. لنفرض أن $\alpha=a+bi$ عدد جاوس أولي ،

وهدفنا هو إثبات أن α يقع ضمن أحد الأصناف الثلاثة لأعداد جاوس الأولية. نعلم أن $N(\alpha)\neq 1$ ، بما أن α ليس وحدة ؛ لذلك يوجد (على الأقل) عدد أولي p يقسم $N(\alpha)$.

افرض أولاً أن $p=2$. عندئذ فإن الجزء (a) من النتيجة يخبرنا أن $1+i$ يقسم α . لكن فرضنا أن α عدد أولي، إذاً هذا يعني أن α يجب أن يساوي $1+i$ مضروباً بوحدة ؛ إذاً α يقع في الصنف (i).

الآن افرض أن $p\equiv 3 \pmod 4$. عندئذ فإن الجزء (b) من النتيجة يخبرنا أن p يقسم α ؛ لذلك مرة أخرى، أولية العدد α تقتضي أن α يساوي p مضروباً بوحدة ؛ إذاً α يقع في الصنف (ii) .

أخيراً افرض أن $p\equiv 1 \pmod 4$. نظرية مجموع مربعين في الفصل 26 تخبرنا أنه يمكن كتابة p كمجموع مربعين، وليكن $p=u^2+v^2$ ، عندئذ فإن الجزء (c) من النتيجة يخبرنا أن α يقبل القسمة إما على $u+iv$ وإما على $u-iv$ ، إذاً α يساوي العدد $u+iv$ أو $u-iv$ مضروباً بوحدة. بشكل خاص $a^2+b^2=u^2+v^2$ ؛ إذاً α يقع في الصنف (iii). وبذلك يكون قد اكتمل برهاننا على أن أي عدد جاوس أولي يقع في أحد الأصناف الثلاثة.

تمارين

(٣٣.١) اكتب مقالة قصيرة (صفحة أو صفحتين) عن كل من المواضيع التالية :

(a) نشأة الأعداد المركبة في القرن التاسع عشر في أوروبا.

(b) اكتشاف الأعداد غير النسبية في اليونان القديمة.

(c) نشأة الصفر والأعداد السالبة عند الرياضيين الهنود، الرياضيين العرب، والرياضيين الأوربيين.

(d) اكتشاف الأعداد المتسامية في القرن التاسع عشر في أوروبا.

(٣٣,٢) (a) اختر عبارة من العبارتين التاليتين، واكتب مقالة من صفحة واحدة تدافع فيها عنها. تأكد من إعطاء ثلاثة أسباب على أن عبارتك صحيحة، وأن العبارة التي تخالفها خاطئة.

العبارة 1: الرياضيات موجودة أصلاً واكتشفها الإنسان (نفس معنى أن كوكب بلوتو موجود قبل أن يكتشفه الإنسان سنة 1930).

العبارة 2: الرياضيات إبداع إنساني مجرد لوصف العالم (ويمكن أن يكون حتى إبداع مجرد ليس له علاقة بالعالم الحقيقي).

(b) الآن غير وجهة نظرك وأعد الفقرة (a) متبنياً العبارة الأخرى.

(٣٣,٣) اكتب كلاًّ من المقادير التالية كعدد مركب.

$$(a)\ \ (3-2i)\cdot(1+4i) \qquad (b)\ \ \frac{3-2i}{1+4i} \qquad (c)\ \ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$$

(٣٣,٤) (a) حل المعادلة $x^2 = 95-168i$ باستخدام الأعداد المركبة. [مساعدة: أولاً ضع $(u+vi)^2 = 95-168i$، ثم ربع الطرف الأيسر وحل المعادلة في u , v].

(b) حل المعادلة $x^2 = 1+2i$ باستخدام الأعداد المركبة.

(٣٣,٥) في كل فقرة مما يلي اختبر فيما إذا كان عدد جاوس الصحيح α يقسم عدد جاوس الصحيح β، وإذا كان فأوجد ناتج القسمة.

$(a)\ \ \alpha = 3+5i \quad , \quad \beta = 11-8i$

$(b)\ \ \alpha = 2-3i \quad , \quad \beta = 4+7i$

$(c)\ \ \alpha = 3-39i \quad , \quad \beta = 3-5i$

$(d)\ \ \alpha = 3-5i \quad , \quad \beta = 3-39i$

obeikandi.com

(٣٣,٦) (a) بيّن أن العبارة $a+bi$ يقسم $c+di$ تكافئ أن العدد الصحيح العادي a^2+b^2 يقسم كلا العددين الصحيحين $ac+bd$, $-ad+bc$.

(b) افرض أن $a+bi$ يقسم $c+di$. بيّن أن a^2+b^2 يقسم c^2+d^2.

(٣٣,٧) تحقق من أن كل من المجموعات الجزئية التالية R_1، R_2، R_3، R_4 من مجموعة الأعداد المركبة هي حقل. بمعنى آخر، بيّن أنه إذا كان α ,β في المجموعة، فإن $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ و $\alpha\beta$ هي أيضاً في المجموعة.

(a) $R_1 = \{a+bi\sqrt{2} : a, b$ عددان صحيحان عاديان$\}$

(b) ليكن العدد المركب $\rho = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

$R_2 = \{a+b\rho : a, b$ عددان صحيحان عاديان$\}$

(مساعدة: ρ تحقق المعادلة $\rho^2+\rho+1=0$).

(c) ليكن p عدداً أوليًّا محدداً.

$R_3 = \{a/b : a, d$ عددان صحيحان عاديان بحيث $p|d\}$

(d) $R_4 = \{a+b\sqrt{3} : a, b$ عددان صحيحان عاديان$\}$

(٣٣,٨) يسمى عنصر α من حلقة R وحدة إذا وجد عنصر $\beta \in R$ يحقق أن $\alpha\beta = 1$. بكلمات أخرى، $\alpha \in R$ وحدة إذا كان له نظير ضربي في R.

صف جميع الوحدات لكل من الحلقات التالية:

(a) $R_1 = \{a+bi\sqrt{2} : a, b$ عددان صحيحان عاديان$\}$

(مساعدة: استخدم خاصية ضرب المعيار للأعداد $a+bi\sqrt{2}$).

(b) ليكن ρ العدد المركب $\rho = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

obeikandl.com

$$R_2 = \left\{ a + b\rho : a, b \text{ عددان صحيحان عاديان} \right\}$$

(c) ليكن p عدداً أوليًّا محدداً.

$$R_3 = \left\{ a/b : a \,,\, b \text{ عددان صحيحان عاديان بحيث } p \nmid d \right\}$$

(٣٣،٩) لتكن R الحلقة $\left\{ a + b\sqrt{3} : a, b \text{ عددان صحيحان عاديان} \right\}$. لأي عنصر $\alpha = a + b\sqrt{3}$ في R، نعرف "معيار" α ليكون $N(\alpha) = a^2 - 3b^2$.

(لاحظ أن R مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، وأن هذا "المعيار" ليس مربع المسافة من α إلى 0).

(a) بيّن أن $N(\alpha\beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$ لكل $\alpha \,,\, \beta$ في R.

(b) إذا كان α وحدة في R، بين أن $N(\alpha)$ يساوي 1. [مساعدة: بيّن أولاً أن $N(\alpha)$ يجب أن يساوي ± 1، ثم اكتشف لماذا لا يمكن أن تساوي -1].

(c) إذا كان $N(\alpha) = 1$ بيّن أن α وحدة في R.

(d) أوجد ثماني وحدات مختلفة في R.

(e) صف جميع الوحدات في R. (مساعدة: انظر الفصل الثاني والثلاثون).

(٣٣،١٠) أكمل برهان نتيجة قابلية القسمة لأعداد جاوس الجزء (c) من خلال إثبات أن في الحالة 3 عدد جاوس الصحيح α يقبل القسمة على كل من $\pi \,,\, \overline{\pi}$.

(٣٣،١١) حلل كل من أعداد جاوس الصحيحة التالية إلى حاصل ضرب أعداد جاوس أولية. (قد تجد أن نتيجة قابلية القسمة لأعداد جاوس مفيدة في تقرير أي من أعداد جاوس الأولية التي تصلح لأن تكون العوامل المطلوبة).

(a) $91 + 63i$ (b) 975 (c) $53 + 62i$

obeikandl.com