تقريب ديوفانتين ومعادلة بَلْ

Diophantine Approximation and Pell's Equation

نعود الآن لمسألة إيجاد حلول معادلة بَلْ :

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

كما لاحظنا في الفصل الأخير، فإن علينا البحث عن الحلول بين الأزواج (x, y) التي تجعل $\left|x - y\sqrt{D}\right|$ مقداراً صغيراً، لأن أي حل لمعادلة بَلْ يحقق :

$$\left|x - y\sqrt{D}\right| = \frac{1}{\left|x + y\sqrt{D}\right|} < \frac{1}{y}$$

إن الفكرة التي نعتمد عليها هي أخذ زوجين يكون للمقدار $x^2 - Dy^2$ عندهما نفس القيمة و "نقسمهم". سنطرح مثالاً يساعدنا في توضيح ماذا نعني. نأخذ $D = 13$. بالنظر للجدول الوارد في الفصل الواحد والثلاثون، نرى أن الزوجين $(x_1, y_1) = (11, 3)$, $(x_2, y_2) = (119, 33)$ هما حلان للمعادلة $x^2 - 13y^2 = 4$.
سنقسم هذين الحلين كما يلي :

$$\begin{aligned}\frac{119-33\sqrt{13}}{11-3\sqrt{13}}&=\left(\frac{119-33\sqrt{13}}{11-3\sqrt{13}}\right)\left(\frac{11+3\sqrt{13}}{11+3\sqrt{13}}\right)\\&=\frac{22-6\sqrt{13}}{4}\\&=\frac{11}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{13}\end{aligned}$$

إن الزوج $\left(11/2,3/2\right)$ هو حل لمعادلة بَلْ $x^2-13y^2=1$. لسوء الحظ، كما نلاحظ ، فإن الحل ليس من الأعداد الصحيحة. إن الصعوبة تكمن في ظهور العدد 2 في المقام. بشكل دقيق، نلاحظ أنه كان هناك عدد 4 في المقام آتي من حقيقة أن $11^2-3^2\cdot 13=4$، واستطعنا أن نلغي 2 فقط من المقام. قد نجد إذا بحثنا في حلول أكثر للمعادلة $x^2-13y^2=4$ أحد الحلول يسمح لنا بإلغاء العدد 4 من المقام. بالبحث عن حلول إضافية، نجد في النهاية الحل $\left(14159،3927\right)$ ، وبقسمة هذا الحل على الحل $\left(x_2,y_2\right)$ نجد أن:

$$\begin{aligned}\frac{14159-3927\sqrt{13}}{11-3\sqrt{13}}&=\frac{2569-720\sqrt{13}}{4}\\&=649-180\sqrt{13}\end{aligned}$$

وجدتها! معادلة بَلْ لها الحل الصحيح $\left(649،180\right)=\left(x,y\right)$.

لماذا قادنا الزوجان $\left(11،3\right)$, $\left(14159،3927\right)$ بنجاح لحل من الأعداد الصحيحة؟ إن ذلك يعود إلى أن هذين الزوجين خلصانا من العدد 4 في المقام لأن:

$$11\equiv 14159\pmod 4 \quad , \quad 3\equiv 3927\pmod 4$$

متسلحين بهذه الملاحظة الفاصلة، نكون في النهاية قادرين على إثبات نظرية معادلة بَلْ كما وردت في الفصل الثلاثين. وسنعيد هنا كتابة نصها.

نظرية (١, ٣٢) (نظرية معادلة بَلْ)

ليكن D عدداً صحيحاً موجباً ليس مربعاً كاملاً. عندئذ فإن معادلة بَلْ $x^2 - Dy^2 = 1$ دائماً لها حلول صحيحة موجبة. إذا كان (x_1, y_1) هو حل حيث x_1 أصغر قيمة ، فإن كل حل (x_k, y_k) يمكن استنتاجه بأخذ قوى:

$$x_k + y_k\sqrt{D} = \left(x_k + y_k\sqrt{D}\right)^k \quad , \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

البرهان:

هدفنا الأول هو أن نبين أن معادلة بَلْ لها حل واحد على الأقل. إن نظرية ديرتشلت للتقريب الديوفانتيني 31.1 تخبرنا أن هناك عدداً لا نهائيًّا من الأزواج الصحيحة الموجبة (x, y) التي تحقق المتباينة:

$$\left|x - y\sqrt{D}\right| < \frac{1}{y}$$

افرض أن (x, y) إحداها. نريد أن نقدر حجم:

$$\left|x^2 - Dy^2\right| = \left|x - y\sqrt{D}\right| \cdot \left|x + y\sqrt{D}\right|$$

إن العامل الأول في يمين المعادلة أقل من $\frac{1}{y}$. ماذا يمكننا أن نقول عن العامل الثاني؟

باستخدام حقيقة أن $\left|x - y\sqrt{D}\right| < \frac{1}{y}$ ، نرى أن x محدودة من الأعلى:

$$x < y\sqrt{D} + \frac{1}{y}$$

ولذلك:

$$x + y\sqrt{D} < \left(y\sqrt{D} + 1/y\right) + y\sqrt{D} < 2y\sqrt{D} + 1/y < 3y\sqrt{D}$$

بضرب المتباينة الأخيرة بالمقدار $\left|x - y\sqrt{D}\right|$ ينتج :

$$\left|x^2 - Dy^2\right| < \left|x - y\sqrt{D}\right| \cdot 3y\sqrt{D} < \left(1/y\right) \cdot \left(3y\sqrt{D}\right) = 3\sqrt{D}$$

باختصار ، لقد بيَّنا أن كل حل صحيح موجب (x, y) للمتباينة

$$\left| x - y\sqrt{D}\right| < \frac{1}{y}$$

أيضاً يحقق المتباينة :

$$\left|x^2 - Dy^2\right| < 3\sqrt{D}$$

نحن الآن استخدمنا شكل آخر لمبدأ برج الحمام الوارد في الفصل الواحد والثلاثون. الحمام هو الحلول الصحيحة الموجبة (x, y) للمتباينة $\left| x - y\sqrt{D}\right| < \frac{1}{y}$.

نظرية 31.1 (نظرية ديرتشلت للتقريب الديوفانتيني) تخبرنا أنه يوجد عدد لا نهائي من الحمام[١] . بالنسبة للأعشاش سنأخذ الأعداد الصحيحة :

$$-T, -T+1, -T+2, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, T-2, T-1, T$$

حيث T أكبر عدد صحيح أصغر من $3\sqrt{D}$. نعلم أنه إذا كان (x, y) حمامة ، فإن المقدار $x^2 - Dy^2$ يقع بين $-T$, T ، لذلك فإننا نستطيع أن نخصص الحمامة (x, y) للعش الذي رقمه $x^2 - Dy^2$.

(١) لا تقلق ، فإنك لن تكون مسؤولاً عن إطعام الحمام ، ولا كذلك عن تنظيف الأعشاش.

نكون حتى الآن قد أخذنا عدداً لا نهائيًّا من الحمام ووضعناها في عدد منتهي من الأعشاش! واضح أن هناك أحد الأعشاش يحوي عدداً لا نهائيًّا من الحمام. لنقل أن العش M يضم عدد لا نهائي من الحمام. (لتسهيل الشرح، سنعتبر M موجباً. فرض أن M سالب يتم بنفس الأسلوب وسنترك لك عمل ذلك).

بلغة الرياضيات فإن هذا يعني أن المعادلة التي تشبه معادلة بَلْ:

$$x^2 - Dy^2 = M$$

لها عدد لا نهائي من الحلول الصحيحة الموجبة (x, y). سنكتب قائمة الحلول كما يلي:

$$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),(X_3,Y_3),(X_4,Y_4),\ldots$$

تذكر بقوة أن هذه القائمة مستمرة بدون حدود.

تبعاً للأسلوب الذي أقره المثال الوارد في بداية هذا الفصل، سنبحث عن حلين (X_j,Y_j) , (X_k,Y_k) يحققان أيضاً:

$$X_j \equiv X_k \pmod M \quad , \quad Y_j \equiv Y_k \pmod M$$

سنجد هذين الحلين بإعادة استخدام مبدأ برج الحمام.

الحمام هنا هو الحلول $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots$. إذاً لدينا عدداً لا نهائيًّا من الحمام. والأعشاش هي الأزواج:

(A,B) حيث $0 \le A < M$, $0 \le B < M$

إذاً هناك M^2 عش. سنعين لكل حمامة (X_i,Y_i) عش من خلال اختزال العددين X_i, Y_i قياس M. بمعنى آخر، الحمامة (X_i,Y_i) يعين لها العش (A,B) وذلك باختيار A, B يحققان:

$$X_i \equiv A \pmod M \quad , \quad Y_i \equiv B \pmod M, \qquad 0 \le A \ , \ B < M$$

مرة أخرى، سنعيد تدبير وضع عدد لا نهائي من الحمام في عدد منتهٍ من الأعشاش، إذاً مرة أخرى يجب أن يحتوي أحد الأعشاش على عدد لا نهائي من الحمام. بشكل خاص، يمكننا أن نجد حمامتين مختلفتين $(X_j, Y_j), (X_k, Y_k)$ تسكنان في نفس العش. رياضيًّا، أوجدنا زوجين من الأعداد الصحيحة الموجبة $(X_j, Y_j), (X_k, Y_k)$ لها الخصائص التالية:

$$\begin{aligned} X_j &\equiv X_k \pmod M \quad , \quad X_j^2 - DY_j^2 = M \\ Y_j &\equiv Y_k \pmod M \quad , \quad X_k^2 - DY_k^2 = M \end{aligned}$$

وكما بينا في بداية هذا الفصل، نتوقع الآن أن نحصل على حل (x, y) لمعادلة بَلْ $x^2 - Dy^2 = 1$ وذلك بوضع:

$$\begin{aligned} x + y\sqrt{D} &= \frac{X_j - Y_j\sqrt{D}}{X_k - Y_k\sqrt{D}} \\ &= \frac{\left(X_j X_k - Y_j Y_k D\right) + \left(X_j Y_k - X_k Y_j\right)\sqrt{D}}{X_k^2 - DY_k^2} \end{aligned}$$

بمعنى آخر، نريد أن تعطي الصيغتان:

$$x = \frac{X_j X_k - Y_j Y_k D}{M} \quad , \quad y = \frac{X_j X_k - Y_k Y_j}{M}$$

حل صحيح للمعادلة $x^2 - Dy^2 = 1$.

سنتأكد أولاً من أن (x, y) تحقق معادلة بَلْ.

$$x^2 - Dy^2 = \left(\frac{X_j X_k - Y_j Y_k D}{M}\right)^2 - \left(\frac{X_j Y_k - X_k Y_j}{M}\right)^2$$
$$= \frac{\left(X_j^2 - DY_j^2\right)\left(X_k^2 - DY_k^2\right)}{M^2}$$
$$= 1$$

ثانياً، يجب أن نتحقق من أن y, x عددان صحيحان، باستخدام التطابقين:

$$X_j \equiv X_k \pmod M \quad , \quad Y_i \equiv Y_k \pmod M$$

نجد أن البسط لكل من y, x يحقق

$$X_j X_k - Y_j Y_k D \equiv X_j^2 - Y_j^2 D = M \equiv 0 \pmod M$$
$$X_j Y_k - X_k Y_j \equiv X_j Y_j - X_j Y_j \equiv 0 \pmod M$$

لذلك؛ فإن البسطين يقبلان القسمة على M، إذاً $M's$ التي في المقامات سوف تشطب. هذا يبين أن y, x عددان صحيحان، وباستبدالهما بقيمهما السالبة إذا كان ذلك من الضروري، نكون بذلك قد أوجدنا حل لمعادلة بَلْ $x^2 - Dy^2 = 1$ بأعداد صحيحة $x, y \geq 0$.

من الواضح أن $x \geq 1$. بقي أن نبين أن $y \neq 0$. لكن إذا كان $y = 0$، فإن $X_j Y_k = X_k Y_j$، لذلك نجد أن:

$$Y_k^2 M = Y_k^2 \left(X_j^2 - DY_j^2\right)$$
$$= \left(X_j Y_k\right)^2 - D\left(Y_j Y_k\right)^2$$
$$= \left(X_k Y_j\right)^2 - D\left(Y_j Y_k\right)^2$$
$$= Y_j^2 \left(X_k^2 - DY_k^2\right)$$
$$= Y_j^2 M$$

على كل حال، نحن اخترنا Y_k, Y_j ليكونا موجبين وغير متساويين، وهذا لا يمكن أن يحدث. لذلك $y \neq 0$ ، ونحن أوجدنا حلاً صحيحاً موجباً (x, y) لمعادلة بَلْ. وهذا يكمل برهان الجزء الأول لنظرية معادلة بَلْ.

بالنسبة للجزء الثاني ، ليكن (x_1, y_1) هو الحل الصحيح الموجب بأصغر x_1 ، ونحتاج لأن نثبت أن كل حل يُستخرج بأخذ قوى للعدد $x_1 + y_1\sqrt{D}$. يمكننا تكرار البرهان الذي أعطيناه في الفصل التاسع والعشرون، عندما $D = 2$ ، لكن بدلاً من ذلك سوف نعطي برهان مختلف ومهم ومفيد في الحالات العامة.

لنفرض أن (u, v) هو أي حل صحيح موجب للمعادلة $x^2 - Dy^2 = 1$. ليكن لدينا العددين الحقيقيين:

$$z = x_1 + y_1\sqrt{D} \quad , \quad r = u + v\sqrt{D}$$

العدد z يحقق أن $z > 1$ ؛ لذلك فإن العدد r يقع بين قوتين للعدد z ، أي

$$z^k \le r < z^{k+1}$$

[لنكون أكثر دقة، خذ k ليكون أكبر عدد صحيح موجب أصغر من $\log(r)/\log(z)$]. بقسمة الطرفين على z^k ينتج:

$$1 \le z^{-k} \cdot r < z$$

نلاحظ أن $z^k = x_k + y_k\sqrt{D}$ ، وهذا بسبب كيفية تعريفنا لكل من y_k, x_k ، ولذلك فإن $z^{-k} = x_k - y_k\sqrt{D}$ ، لأننا نعلم أن :

$$\left(x_k + y_k\sqrt{D}\right)\left(x_k - y_k\sqrt{D}\right) = x_k^2 - Dy_k^2 = 1$$

لذلك فإن:

$$z^{-k}\cdot r=\left(x_k-y_k\sqrt{D}\right)\left(u+v\sqrt{D}\right)$$
$$=\left(x_k u-y_k vD\right)+\left(x_k v-y_k u\right)\sqrt{D}$$

وبفرض أن:

$$\left(x_k u-y_k vD\right)=s \quad , \quad \left(x_k v-y_k u\right)=t$$

فإننا نعلم الحقائق الثلاث الآتية عن s , t :

$$(1)\quad s^2-Dt^2=1$$
$$(2)\quad s+t\sqrt{D}\geq 1$$
$$(3)\quad s+t\sqrt{D}<z$$

ونريد أن نثبت أن $s\geq 0$, $t\geq 0$. ولعمل ذلك سوف نبين عدم إمكانية حدوث الحالات الأخرى. الحقيقة (1) تبين مباشرة أن t,s لا يمكن أن يكون كلاهما سالباً.

إفرض أن $s\geq 0$, $t<0$. عندئذ من الحقيقة (2) فإن $s-t\sqrt{D}>s+t\sqrt{D}\geq 1$ ، ومن الحقيقة (1) ينتج أن:

$$1=s^2-Dt^2=\left(s-t\sqrt{D}\right)\left(s+t\sqrt{D}\right)>1$$

وهذا غير ممكن ؛ لذلك لا يمكن أن يكون $t<0$, $s\geq 0$. نفس الشيء، إذا فرضنا أن $s<0$, $t\geq 0$ ، فإن $-s+t\sqrt{D}>s+\sqrt{D}\geq 1$ إذاً:

$$-1=-s^2+Dt^2=\left(-s+t\sqrt{D}\right)\left(s+t\sqrt{D}\right)>1$$

وهذا أيضاً غير ممكن. وهكذا نكون قد بينا عدم إمكانية حدوث جميع الحالات ما عدا الحالة $s\geq 0$, $t\geq 0$ ، وبذلك نكون قد أثبتنا ما نريد.

نعلم الآن أن (s,t) هو حل صحيح غير سالب للمعادلة $x^2 - Dy^2 = 1$ ، إذا كان s , t كلاهما موجباً، فإن فرض أن (x_1, y_1) هو أصغر حل يستلزم أن $s \geq x_1$. بالإضافة لذلك:

$$t^2 = \frac{s^2 - 1}{D} \geq \frac{x_1^2 - 1}{D} = y_1^2$$

لذلك نجد أيضاً أن $t \geq y_1$ ، وبالتالي:

$$s + t\sqrt{D} \geq x_1 + y_1\sqrt{D} = z$$

وهذا يتناقض مع المتباينة $s + t\sqrt{D} < z$ المنصوص عليها في الحقيقة (3). لذلك، على الرغم من أن t, s كليهما غير سالب، فإن ليس كلاهما موجباً. لذلك فأحدهما يساوي صفراً، ومن $s^2 - Dt^2 = 1$ ، فإن $t = 0$, $s = 1$.

باختصار، بينا أن $z^{-k} \cdot r = 1$ ، أي أن $r = z^k$. بمعنى آخر، لقد بيَّنا أنه إذا كان (u,v) أي حل صحيح موجب للمعادلة $x^2 - Dy^2 = 1$ فإنه يوجد أس $k \geq 1$ بحيث $r = u + v\sqrt{D}$ تساوي:

$$z^k = \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^k = x_k + y_k\sqrt{D}$$

وهذا يثبت أن $u + v\sqrt{D}$ هو قوة العدد $x_1 + y_1\sqrt{D}$ ، وبذلك يكون قد اكتمل برهان نظرية معادلة بَلْ.

تمارين

(٣٢.١) بيَّنا في هذا الفصل أن معادلة بلْ $x^2 - Dy^2 = 1$ دائماً لها حل صحيح موجب. هذا التمرين يكشف ماذا يحدث لو استبدلنا العدد 1 في يمين المعادلة بعدد آخر.

(a) لكل $2 \le D \le 15$ ليس مربعاً كاملاً، بيّن فيما إذا كانت المعادلة $x^2 - Dy^2 = -1$ لها حل صحيح موجب. هل تستطيع تحديد نمط تتمكن من خلاله من التنبؤ بقيم D التي تجعل للمعادلة حلاًّ؟

(b) إذا كان (x_0, y_0) حلاًّ صحيحاً موجباً للمعادلة $x^2 - Dy^2 = -1$ ، بيّن أن $(x_0^2 + Dy_0^2, 2x_0y_0)$ هو حل لمعادلة بَلْ $x^2 - Dy^2 = 1$.

(c) أوجد حلاًّ للمعادلة $x^2 - 41y^2 = -1$ من خلال تعويض القيم $y = 1, 2, 3, \dots$ حتى تجد قيمة تجعل المقدار $41y^2 - 1$ مربعاً كاملاً. (لن تحتاج إلى تعويض الكثير من القيم). اعتمد على إجابتك لهذا الفرع والفرع (b) لإيجاد حل صحيح موجب لمعادلة بَلْ $x^2 - 41y^2 = -1$.

(d) إذا كان (x_0, y_0) حلاًّ للمعادلة $x^2 - Dy^2 = M$ ، وإذا كان (x_1, y_1) حلاًّ لمعادلة بَلْ $x^2 - Dy^2 = 1$ ، بيّن أن $(x_0x_1 + Dy_0y_1, x_0y_1 + y_0x_1)$ هو أيضاً حل للمعادلة $x^2 - Dy^2 = M$. اعتمد على هذا لإيجاد خمسة حلول صحيحة موجبة مختلفة للمعادلة $x^2 - 2y^2 = 7$.

(٣٢,٢) لكل معادلة من المعادلات التالية، إما أن توجد لها حلاًّ صحيحاً موجباً (x, y) ، وإما أن تشرح لماذا لا يمكن أن يوجد لها مثل هكذا حل.

$$(a) \quad x^2 - 11y^2 = 7$$

$$(b) \quad x^2 - 11y^2 = 433$$

$$(c) \quad x^2 - 11y^2 = 3$$