التقريب الديوفانتيني
Diophantine Approximation

ما الطريقة التي أوجدنا بها حل معادلة بَلْ Pell's equation.

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

حيث x , y عددان صحيحان؟ التحليل :

$$\left(x - y\sqrt{D}\right)\left(x + y\sqrt{D}\right) = 1$$

عبر عن العدد 1 كحاصل ضرب عددين ، أحدهما كبير بوضوح. وبشكل أدق ، يكون العدد $x + y\sqrt{D}$ كبيراً ، إذا كان x , y كلاهما عدداً كبيراً ، لذلك العامل الآخر $x - y\sqrt{D} = \dfrac{1}{x + y\sqrt{D}}$ يجب أن يكون صغيراً.

سوف نستفيد من هذه الملاحظة للبحث عن إجابة للسؤال التالي :

(كيف نستطيع جعل العامل $x - y\sqrt{D}$ صغيراً ؟) إذا استطعت إيجاد عددين صحيحين x , y يجعلان $x - y\sqrt{D}$ صغيراً جدًّا ، فإننا نأمل أن يكون x , y حلاً

لمعادلة بَلْ[١]. سـوف نخصص ما بقـي من هذا الفصل لإعطاء حل "ديرشله" Lejeune Dirichlet الجميل لهذه المسألة. سنعود لمعادلة بَلْ في الفصل القادم.

دعنا نبدأ بأسهل إجابة لسؤالنا. لأي عدد صحيح موجب y ، إذا أخذنا x ليكون أقرب عدد صحيح للعدد $y\sqrt{D}$ ، فإن الفرق $\left|x - y\sqrt{D}\right|$ يكون على الأكثر $\frac{1}{2}$. إن هذا صحيح لأن أي عدد حقيقي يقع بين عددين صحيحين ؛ لذلك فإن المسافة بينه وبين أقرب عدد صحيح تكون على الأكثر $\frac{1}{2}$.

هل نستطيع الحصول على نتيجة أفضل؟ سنعرض هنا جدولاً مختصراً للعدد $\sqrt{13}$. لكل عدد صحيح y من 1 إلى 40 ، عرضنا قائمة للأعداد الصحيحة x الأقرب للعدد $y\sqrt{3}$ ، مصاحبة للقيم $\left|x - y\sqrt{13}\right|$, $x^2 - 13y^2$.

x	y	$\left\|x - y\sqrt{13}\right\|$	$x^2 - 13y^2$
4	1	0.394449	3.000
7	2	0.211103	−3.000
11	3	0.183346	4.000
14	4	0.422205	−12.000

x	y	$\left\|x - y\sqrt{13}\right\|$	$x^2 - 13y^2$
76	21	0.283423	43.000
79	22	0.322128	−51.000
83	23	0.072321	12.000
87	24	0.466769	81.000

(١) لسوء الحظ ، وكما يحدث غالباً في هذه الحياة، تحطمت آمالنا عندما علمنا أن y, x هما حلان لمعادلة شبيهه لمعادلة بَلْ $x^2 - Dy^2 = M$. لا تيأس. فسوف نكون قادرين لأخذ حلين مختارين بعناية للمعادلة $x^2 - Dy^2 = M$ وتحويلهم بشكل سحري من خلال البحث عن حل المعادلة $x^2 - Dy^2 = 1$.

18	5	0.027756	−1.000
22	6	0.366692	16.000
25	7	0.238859	−12.000
29	8	0.155590	9.000
32	9	0.449961	−29.000
36	10	0.055513	−4.000
40	11	0.338936	27.000
43	12	0.266615	−23.000
47	13	0.127833	12.000
50	14	0.477718	−48.000
54	15	0.083269	−9.000
58	16	0.311180	36.000
61	17	0.294372	−36.000
65	18	0.100077	13.000
69	19	0.494526	68.000
72	20	0.111026	−16.000

90	25	0.138782	−25.000
94	26	0.255667	48.000
97	27	0.349884	−68.000
101	28	0.044564	9.000
105	29	0.439013	92.000
108	30	0.166538	−36.000
112	31	0.227910	51.000
115	32	0.377641	−87.000
119	33	0.016808	4.000
123	34	0.411257	101.000
126	35	0.194295	−49.000
130	36	0.200154	52.000
133	37	0.405397	−108.000
137	38	0.010948	−3.000
141	39	0.383500	108.000
144	40	0.222051	−64.000

لاحظ أن المقدار $\left|x-y\sqrt{13}\right|$ دائماً أقل من $\frac{1}{2}$ ، وذلك كما تنبأنا. أحياناً يكون الفرق قريباً من $\frac{1}{2}$ ، كما حدث عندما $y=19$, $y=24$ ، ولكن أحياناً يكون هذا الفرق أصغر بكثير. فعلى سبيل المثال، هناك أربعة أمثلة في الجدول يكون فيها الفرق أقل من 0.05 :

$$\begin{aligned}
&(x,y)=(18,5), && \left|x-y\sqrt{13}\right|=0.027756, && x^2-13y^2=-1,\\
&(x,y)=(101,28), && \left|x-y\sqrt{13}\right|=0.044564, && x^2-13y^2=9,\\
&(x,y)=(119,33), && \left|x-y\sqrt{13}\right|=0.016808, && x^2-13y^2=4,\\
&(x,y)=(137,38), && \left|x-y\sqrt{13}\right|=0.010948, && x^2-13y^2=-3
\end{aligned}$$

إذا وسعنا الجدول حتى القيمة $y=200$ ، سنجد أن كل الأزواج اللاحقة (x,y) تحقق أن $\left|x-y\sqrt{13}\right|<0.05$:

$$\begin{aligned}
&(18,5),(101,28),(119,33),(137,38),(155,43),(238,66),(256,71),\\
&(274,76),(292,81),(375,104),(393,109),(411,114),(494,137),\\
&(512,142),(530,147),(548,152),(631,175),(649,180),(667,185).
\end{aligned}$$

هل لاحظت نمط؟ حسناً، أنا كذلك لم ألاحظ. بما أنه لا يبدو أن هناك أي نمط واضحاً، فسوف نستخدم أسلوباً مختلفاً لجعل المقدار $\left|x-y\sqrt{13}\right|$ صغيراً. الطريقة التي سوف نستخدمها تسمى:

(مبدأ برج الحمام)

هذا المبدأ الرائع ينص على أنه إذا كان عدد الحمام لديك أكثر من عدد الأعشاش، فإن عشاً واحداً على الأقل سوف يضم أكثر من حمامة! على الرغم من أن هذا المبدأ يبدو واضحاً وبديهيًّا، إلا أن تطبيقه الفعلي له العديد من الفوائد الرياضية

الجميلة. إن ما سنفعله هو البحث عن قيمتين مختلفتين $y_1\sqrt{D}$ و $y_2\sqrt{D}$ يكون الفرق بينهما قريب جدًّا من عدد صحيح. لعمل ذلك، سوف نختار عدداً كبيراً Y ونعتبر جميع القيم :

$$0\sqrt{D},1\sqrt{D},2\sqrt{D},3\sqrt{D},\ldots,Y\sqrt{D}.$$

سنقوم بكتابة كل واحد من هذه القيم كمجموع مكون من عدد صحيح وعدد عشري بين 0 و 1.

$0\sqrt{D}=N_0+F_0$ ، حيث $N_0=0$, $F_0=0$

$1\sqrt{D}=N_1+F_1$ ، حيث N_1 عدد صحيح و $0\le F_1<1$

$2\sqrt{D}=N_2+F_2$ ، حيث N_2 عدد صحيح و $0\le F_2<1$

$3\sqrt{D}=N_3+F_3$ ، حيث N_3 عدد صحيح و $0\le F_3<1$

$$\vdots$$

$Y\sqrt{D}=N_Y+F_Y$ ، حيث N_Y عدد صحيح و $0\le F_Y<1$

عدد الحمام هو $Y+1$ وهي $F_0\ ,\ F_1\ ,\ \ldots\ ,\ F_Y$. إن كل الحمام بين 0 و 1 ، لذلك فإن جميعها تقع في الفترة $0\le t<1$. سوف نُشَّكل Y من الأعشاش من خلال تقسيم هذه الفترة إلى Y فترة أطوالها متساوية. بكلمات أخرى، سنأخذ الفترات التالية كأعشاش :

العش 1 : $0/Y\le t<1/Y$

العش 2 : $1/Y\le t<2/Y$

العش 3 : $2/Y\le t<3/Y$

$$\vdots$$

العش Y : $(Y-1)/Y\le t<Y/Y$

كل حمامة ستسكن في عش واحد، وهناك حمامات أكثر من الأعشاش، لذلك فإن مبدأ برج الحمام يؤكد لنا أن بعض الأعشاش فيها حمامتين على الأقل. الشكل 31.1 يوضح حالة الحمام والأعشاش عندما $D=13$ و $Y=5$، ونرى أن الحمامة 0 والحمامة 5 كلتيهما تسكن في العش 1.

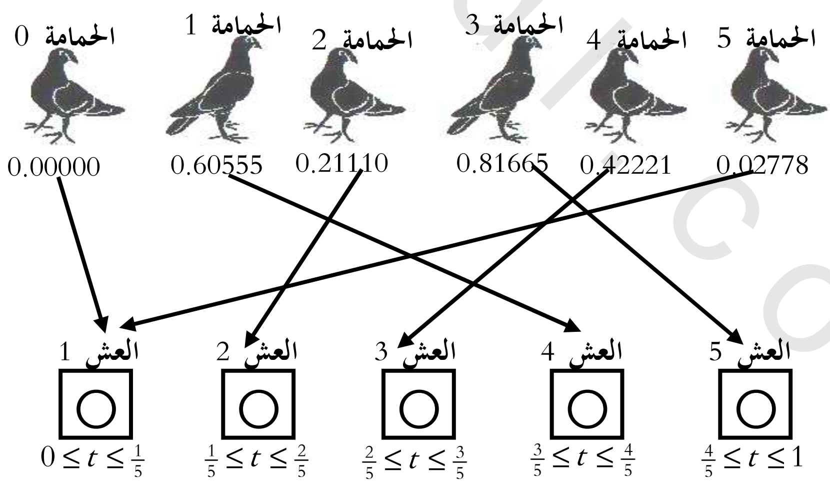
نعلم الآن أن هناك حمامتين، ولتكن الحمامتان F_m , F_n، تسكنان في نفس العش. ولنفرض أن $m<n$. لاحظ أن الأعشاش ضيقة بما يكفي، قياسها فقط $1/Y$ من إحدى جهاته إلى الجهة الأخرى؛ لذلك فإن المسافة بين F_m, F_n أقل من $1/Y$. رياضيًّا $|F_m - F_n| < 1/Y$

ولكن:

$$m\sqrt{D} = N_m + F_m \qquad , \qquad n\sqrt{D} = N_n + F_n$$

وعليه يمكن كتابة المتباينة السابقة على الشكل:

$$\left|\left(m\sqrt{D} - N_m\right) - \left(n\sqrt{D} - N_n\right)\right| < 1/Y$$



الشكل رقم (٣١,١). الحمام والأعشاش عندما $D=13$ **و** $Y=5$.

بإعادة ترتيب الحدود في الطرف الأيسر ينتج :

$$\left|\left(N_n - N_m\right) - \left(n - m\right)\right| < 1/Y.$$

لاحظ أن المقدارين $N_n - N_m$, $n - m$ عددان صحيحان (موجبان). إذا أسمينا هذين المقدارين x , y على التوالي، نكون بذلك قد حققنا هدفنا في جعل المقدار $\left|x - y\sqrt{D}\right|$ صغير بما يكفي.

هدفنا الأخير هو تقدير حجم العدد الصحيح $y = n - m$. اختير العددان m و n من بين الحمام $F_0, F_1, \ldots, F_Y$ والحمامتان F_m , F_n تجلسان في نفس العش. بشكل خاص m و n يقعان بين 0 , Y ، وبما أننا اخترناهم بحيث $n > m$ فإن $0 < m < n \leq Y$. إذاً y تحقق :

$$0 < y \leq Y$$

باختصار، نكون بذلك قد بينا أنه لأي عدد صحيح Y ، يمكننا إيجاد عددين صحيحين x , y بحيث :

$$0 < y \leq Y \qquad , \qquad \left|x - y\sqrt{D}\right| < 1/Y$$

إضافة إلى ذلك، بأخذ قيم Y أكبر وأكبر. فإننا سنحصل بشكل تلقائي على قيم جديدة x's , y's . وهذا صحيح لأنه لأي عددين ثابتين x , y فإن المتباينة

$$\left|x - y\sqrt{D}\right| < 1/Y$$

تكون خاطئة عندما تكون Y كبيرة بالقدر الكافي[1] . أخيراً، بملاحظة أن

(١) نحن إستخدمنا بشكل ضمني حقيقة أن D ليس مربع كامل، فبخلاف ذلك يمكن أن يكون المقدار $\left|x - y\sqrt{D}\right|$ مساوياً للصفر.

$\frac{1}{y} \leq \frac{1}{Y}$ ، نكـون قـد أكملنـا برهـان النظريـة التاليـة ، وهـي نظريـة درشـليه "Dirichlet".

نظرية (١, ٣١) (نظرية درشليه للتقريب الديوفانتيني)

(الجزء الأول)

ليكن D عدداً صحيحاً موجباً ليس مربعاً كاملاً. عندئذ يوجد عدد لا نهائي من الأزواج لأعداد صحيحة موجبة (x, y) بحيث $\left| x - y\sqrt{D} \right| < 1/y$.

إننا نستطيع استخدام جدولنا للقيمة $D = 13$ لتوضيح نظرية درشليه للتقريب الديوفانتيني. إن هنـاك سـبعة أزواج (x, y) في الجـدول تحقـق المتباينـة $\left| x - y\sqrt{D} \right| < 1/y$ وهي :

$$(4,1),(7,2),(11,3),(18,5),(36,10),(119,33),(137,38)$$

إن هذا يبدو كثيراً ، لكن في الحقيقة فإن هذه الأزواج قليلة[١] . إذا كنا وسعنا الجدول حتى $y = 1000$ ، فسوف نجد أربعة أزواج أخرى هي :

$$(256,71),(393,109),(649,180),(1298,360)$$

وحتى لو وسعنا الجدول حتى $y = 5000$ ، سنجد فقط أربعة أزواج إضافية أخرى :

---

(١) بالطبع ، أحياناً لا تكون هذه الأزواج نادرة ، لأن هناك عدداً لا نهائيًّا منها ، وللوهلة الأولى يبدو تسمية عدد لا نهائي من الأشياء بالنادرة ضرباً من السخف. على كل حال ، مثل هذه الأزواج تكون نادرة جدًّا مقارنةً بمجموعة كل أزواج الأعداد الصحيحة. هذه نفس ملاحظتنا في الفصل 13 عندما قلنا أن "معظم" الأعداد هي أعداد غير أولية ، ضاربين بعرض الحائط حقيقة أن هناك عدداً لا نهائيًّا من الأعداد الأولية.

$$(4287,1189),(4936,1369),(9223,2558),(14159,3927).$$

إن هناك فرعاً رياضيًّا يسمى نظرية التقريب الديوفانتيني ، والذي يهتم بتقريب الأعداد غير النسبية بأعداد نسبية. في نظرية ديرشله للتقريب الديوفانتيني ، قُرّب العدد غير النسبي $\sqrt{D}$ بالعدد النسبي x/y ، حيث إنه بقسمة طرفي متباينة درشليه على y نحصل على :

$$\left|\frac{x}{y}-\sqrt{D}\right|<\frac{1}{y^2}$$

هذا يبين بوضوح أنه إذا كان y كبيراً ، فإن $\frac{x}{y}$ قريباً جدًّا من $\sqrt{D}$. إذا نظرنا مرة أخرى لبرهاننا لنظرية درشليه للتقريب الديوفانتيني سنرى أننا لم نستخدم حقيقة أن $\sqrt{D}$ هو الجذر التربيعي للعدد D. إن كل ما احتجنا معرفته كان معرفتنا أن $\sqrt{D}$ ليس عدداً نسبيًّا. لذلك فإن ما أثبتناه فعلاً هو النتيجة الأعم التالية.

نظرية رقم (٢, ٣١) (نظرية درشليه للتقريب الديوفانتيني) (الجزء الثاني)

ليكن $\alpha>0$ عدداً غير نسبي. أي أن α عدد حقيقي لا يمكن كتابته على الشكل a/b. عندئذ يوجد عدد لا نهائي من الأزواج لأعداد صحيحة (x,y) بحيث :

$$|x-y\alpha|<1/y$$

على سبيل المثال ، إذا أخذنا α ليكون :

$$\pi=3.14159265358979323846264338\,3\cdots$$

فإن الجدول التالي يُدرج كل $(x,y)'s$ بحيث $y<500$ حيث :

$$\left|x-y\alpha\right|<1/y$$

بالإضافة إلى قيم $\left|x-y\right|\cdot y$ و x/y . ولنكون أكثر دقة ، بما أننا مهتمون بالنسبة x/y ، فإن الجدول يُدرج فقط الأزواج التي تحقق $\gcd(x,y)=1$.

x	y	$\left\|x-y\pi\right\|\cdot y$	x/y
3	1	0.141593	3.0000000000
19	6	0.902664	3.166666667
22	7	0.061960	3.1428571429
333	106	0.935056	3.1415094340
355	113	0.003406	3.1415929204

لاحظ أن الكسر $22/7$, $355/113$ هما أقرب ما يكونا للعدد π . وهما كسران استخدما في الماضي بشكل واسع كتقريب للعدد π. سوف نقوم بتوسيع مجال بحثنا لإيجاد تقريب أفضل، لنجد أن العدد النسبي اللاحق الأقرب للعدد π هو

$$\frac{103993}{33102}=3.141592653011903\cdots$$

لقد استخدمنا طريقة القوة الصعبة لإيجاد تقريب نسبي لأعداد غير نسبية. فلكل y اخترنا العدد الصحيح x الأقرب للعدد $y\alpha$ ، وبعد ذلك تأكدنا لنرى كيف يقترب x/y من α. إن هناك طرقاً أكثر تنظيماً لإيجاد أفضل القيم x/y تقوم على نظرية الكسور المستمرة. سوف نقوم بدراسة الكسور المستمرة في الفصلين التاسع والثلاثون وأربعون. ويمكنك قراءة معلومات إضافية عن هذه الطرق في **"الحساب العالي لدافينبورت"**

(**Davenport's *The Higher Arithmetic***) أو في أي كتاب عن مقدمة نظرية الأعداد. ولتوضيح قوة وفعالية نظرية الكسور المستمرة، فإننا نشير إلى أنها يمكن أن تستخدم لإيجاد الأعداد النسبية

$$\frac{5419351}{1725033} = 3.1415926535898153 83\cdots$$

و

$$\frac{21053343141}{6701487259} = 3.14159265358979323846238 17\cdots$$

واللذان يقربان π إلى 13 و 21 خانة عشرية، على التوالي. واضح أننا لا نرغب في استخدام طريقة القوة الصعبة في مثل هكذا أمثلة! إن طريقة الكسور المستمرة تزودنا أيضاً بطريقة فَعَّالة لحل معادلة بَلْ، حتى عندما يكون الحل كبير جدًّا. في التمارين سوف نرى كيف أن طريقة الكسور المستمرة تستخدم لإيجاد تقريبات نسبية قريبة جدًّا لعدد معين يسمى النسبة الذهبية Golden Ratio.

تمارين

(٣١,١) برهن الجزء الثاني من نظرية درشليه للتقريب الديوفانتيني.

(٣١,٢) العدد:

$$\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398874989\cdots$$

يسمى النسبة الذهبية، هذه التسمية تنسب خطأً للعصر الإغريقي القديم.

(a) لكل $y \le 20$، أوجد العدد الصحيح x الذي يجعل $|x - y\gamma|$ أصغر ما يمكن. أي الأعداد النسبية x / y حيث $y \le 20$ هو الأقرب للعدد γ؟

(b) أوجد باستخدام الكمبيوتر جميع الأزواج (x, y) التي تحقق:

$$21 < y \le 1000 \quad , \quad \gcd(x, y) = 1 \quad , \quad |x - y\gamma| < 1/y$$

وقارن قيم x/y و γ.

(c) ابحث عن سبب تسمية العدد γ بالنسبة الذهبية، واكتب فقرة أو فقرتين عن الأهمية الرياضية للعدد γ وكيف ظهر في الفنون والعمارة.

(٣١,٣) افرض القواعد التالية لتوليد قائمة من الأعداد النسبية.

- العدد الأول هو $r_1 = 1$
- العدد الثاني هو $r_2 = 1 + \frac{1}{r_1} = 1 + \frac{1}{1} = 2$
- العدد الثالث هو $r_3 = 1 + \frac{1}{r_2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
- العدد الرابع هو $r_4 = 1 + \frac{1}{r_3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

بشكل عام، العدد النوني n^{th} في القائمة هو $r_n = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}$.

(a) احسب قيم $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$ (يجب أن يكون $r_{10} = \frac{89}{55}$).

(b) ليكن $\gamma = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$ النسبة الذهبية، احسب الفروق:

$$|r_1 - \gamma| \, , \, |r_2 - \gamma| \, , \, \ldots \, , \, |r_{10} - \gamma|$$

بالأعشار. هل تلاحظ أي شيء.

(c) استخدم الكمبيوتر أو حاسبة قابلة للبرمجة لحساب r_{20} ، r_{30} و r_{40} وقارن هذه القيم بالعدد γ.

(d) افرض أن الأعداد في القائمة $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$ تقترب أكثر فأكثر من عدد r

(بلغة علم التفاضل والتكامل ، $r = \dim_{n \longrightarrow \infty} r_n$) . استخدم حقيقة أن $r_n = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}$ لتشرح لماذا يجب أن يحقق العدد r العلاقة $r = 1 + \frac{1}{r}$.

اعتمد على ذلك لإثبات أن $r = \gamma$ ، وبذلك قم بشرح ملاحظاتك في الفقرتين (b) و (c).

(e) أعد النظر في المقام والبسط لكل من الكسور $r_1, r_2, \dots, r_{10}$. هل ميزت شيئاً في هذه الأعداد؟ إذا فعلت ، فبرهن أن γ لها القيمة التي تَدَّعيها.

(٣١,٤) تخبرنا نظرية درشليه للتقريب الديوفانتيني أن هناك عدداً لا نهائيًّا من الأزواج من الأعداد الصحيحة الموجبة (x, y) حيث $\left| x - y\sqrt{2} \right| < 1/y$. هذا التمرين يسألك عن فيما إذا كان باستطاعتك أن تفعل أفضل.

(a) لكل من قيم y التالية ، أوجد x بحيث $\left| x - y\sqrt{2} \right| < 1/y$

$$y = 12, 17, 29, 41, 70, 99, 169, 239, 408, 577, 985, 1393, 2378, 3363$$

(هذه القائمة تعطي جميع قيم y بين 10 , 5000 والتي يمكن أن تحقق المتباينة السابقة).

هل قيمة $\left| x - y\sqrt{2} \right|$ أقل بكثير من $\frac{1}{y}$ ؟ هل هي دائماً أقل من $\frac{1}{y^2}$ ؟ من الطرق الجيدة لمقارنة القيمة $\left| x - y\sqrt{2} \right|$ بالقيمتين $\frac{1}{y}$ و $\frac{1}{y^2}$ هي حساب المقدارين $y\left| x - y\sqrt{2} \right|$ و $y^2\left| x - y\sqrt{2} \right|$. هل يمكنك أن تخمن أصغر قيمة ممكنة للمقدار $y\left| x - y\sqrt{2} \right|$.

(b) برهن أن العبارتين التاليتين صحيحتين لكل زوج من الأعداد الصحيحة الموجبة (x, y) :

(i) $\left|x^2-2y^2\right|\geq 1$

(ii) إذا كان $\left|x-y\sqrt{2}\right|<\frac{1}{y}$ ، فإن $x+y\sqrt{2}<2y\sqrt{2}+\frac{1}{y}$

الآن استخدم (i) و (ii) لتثبت أن $\left|x-y\sqrt{2}\right|>\frac{1}{2y\sqrt{2}+(1/y)}$ لجميع أزواج الأعداد الصحيحة الموجبة (x,y). هل هذا يفسر حساباتك في الفرع (a)؟