الفصل الثامن والأربعون

المنحنيات الناقصية ونظرية فيرما الأخيرة

Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem

تنص نظرية فيرما الأخيرة على أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة الديوفانتينية

$$A^n + B^n = C^n$$

ليس لها حل في الأعداد الصحيحة ما عدا الصفر. أثبتنا في الفصل الثامن والعشرون أن هذه المعادلة ليس لها حل عندما $n = 4$. كما لاحظنا أيضاً أنه إذا كان p/n ولنقل $n = pm$ ، وإذا كان $A^n + B^n = C^n$ فإن :

$$\left(A^m\right)^p + \left(B^m\right)^p = \left(C^m\right)^p$$

لذلك إذا لم يكن لمعادلة فيرما حلول عندما تكون الأسس أولية ، فلن يكون لها حلول عندما تكون الأسس غير أولية أيضاً.

لقد ناقشنا بشكل مقتضب تاريخ نظرية فيرما الأخيرة في الفصل الرابع. قد يكون من الإنصاف القول بأن معظم العمل المهم على معادلة فيرما أُنجز قبل 1980s ،

obeikandi.com

وقد ارتكز على طرق تحليلية. في عام 1986 أشار Gerhard Frey إلى وجود رابط بين نظرية فيرما الأخيرة والمنحنيات الناقصية، وقد أعتقد أن هذا الربط قد يُعطي مساراً جديداً للبرهان.

فكرة Frey تقوم على أخذ حل افتراضي $\left(A,B,C\right)$ لمعادلة فيرما ومن ثم البحث في المنحنى الناقصي :

$$E_{A,B}:\quad y^2=x\left(x+A^p\right)\left(x-B^p\right)$$

يسمى هذا المنحنى الناقصي الآن بـ" *منحنى Frey* "نسبةً له. مميز منحنى Frey يكون :

$$\Delta\left(E_{A,B}\right)=A^{2p}B^{2p}\left(A^p+B^p\right)^2=\left(ABC\right)^{2p}$$

ويمثل بالقوة- $2p^{th}$ الكاملة. وهذا، على أقل تقدير، عمل غير عادي. في الواقع، من غير العادي أبداً أن يقترح Frey مثل هذا المنحنى غير الموجود على الإطلاق. بشكل أكثر دقة، خَمَّن Frey أنه من الغريب جداًّ أن الانحرافات $p-$ للمنحنى $E_{A,B}$ لا تعرض نمطاً معياريًّا. لقد وُضع تخمين Frey بصياغة أفضل من قِبَل Jean – Pierre Serre ، وفي عام 1986 برهن Ken Ribet أن منحنى Frey يأتي من إيجاد حل لمعادلة فيرما ينتهك تخمين المعيارية. بعبارة أخرى، برهن Ribet أنه إذا كان $A^p+B^p=C^p$ بحيث $ABC\neq 0$ فإن منحنى Frey $E_{A,B}$ ليس معياريًّا.

إن عمل Ribet ألهم " أندرو ويلز " (Andrew Wiles) الذي كرس نفسه خلال الست سنوات اللاحقة لإثبات أن كل (أو على الأقل معظم) المنحنيات الناقصية تُظهر نمطاً معياريًّا. وأخيراً ، استطاع إثبات أن كل منحنى ناقصي نصف مستقر (Semistable) يُظهر نمطاً معيارياًّ، وهذا كافٍ لأن منحنيات Frey تصبح نصف مستقرة

Semistable[1]. يمكننا الآن وصف إجراءات البرهان كما يلي:

مخطط برهان نظرية فيرما الأخيرة

(1) ليكن $p \geq 3$ عدداً أوليًّا، وأفرض أن هناك حلاً (A, B, C) للمعادلة $A^p + B^p = C^p$ حيث A, B, C أعداد صحيحة غير صفرية و $\gcd(A, B, C) = 1$.

(2) ليكن $E_{A,B}$ منحنى Frey $y^2 = x(x + A^p)(x - B^p)$.

(3) تخبرنا نظرية Wiles أن $E_{A,B}$ معياري، أي أن الانحرافات – p a_p له يتبع نمطاً معياريًّا.

(4) تخبرنا نظرية Ribet أنه من الغريب جدًّا عدم إمكانية أن يكون $E_{A,B}$ منحنى معياري.

(5) الطريقة الوحيدة للخروج من هذا التناقض هو استنتاج أن المعادلة $A^p + B^p = C^p$ ليس لها حلول في الأعداد الصحيحة عدا الصفر.

ومن هنا، ومن خلال إيجاد الحل لأكثر المسائل الرياضية شهرة، ننهي رحلتنا الطويلة في بحور نظرية الأعداد السبعة، وكلي أمل في أن تكون قد استمتعت بهذه الرحلة مثلما استمتعت أنا بدور المرشد فيها، وأن تكون هذه المواضيع الرائعة قد أثارت فيك الدهشة والتأمل. لكن وقبل كل شيء، أتمنى أن تكون قد اكتسبت حساً

---

(١) يكون المنحنى الناقصي نصف مستقر (Semistable)، إذا كان لكل عدد أولي رديء $p \geq 3$، فإن الانحراف – p a_p يساوي ± 1. هناك أيضاً شرط أصعب إذا كان العدد الأولي $p = 2$ رديئاً، لكن من حسن الحظ يمكن تحويل منحنيات Frey ليصبح رقم ٢ عدداً أوليًّا جيداً.

رياضيًّا بصورة مشروع حي ومتزايد بكل ما فيه من كنوز رائعة اُكْتُشفت حتى الآن، لكن هناك كنوزاً أخرى تلوح في الأفق ربما تكون أكثر روعة تنتظر شخصاً ذا رؤية واضحة لديه الجرأة والإصرار على الإبحار في المجهول.

obeikandl.com