الفصل السابع والأربعون

حدود الانحراف وأنماط المعيارية
Defect Bounds and Modularity Patterns

بغض النظر عن حجم كل من الفصلين الخامس والأربعون والسادس والأربعون، فإنهما بالكاد بدأا في ملامسة سطح الأنماط الرائعة الكامنة في المنحنيات الناقصية قياس p. في هذا الفصل سوف نستمر في البحث.

لقد أشرنا سابقاً عن سبب أن عدد النقاط N_p على منحنى ناقصي قياس p يجب أن يكون تقريباً مساوياً للعدد p ، وأوجدنا العديد من الأنماط للانحراف $p -$ $a_p = p - N_p$ ، ولكن كيف يمكن لنا تحديد معنى العبارة " N_p تساوي تقريباً p "؟ يمكننا القول إن المعنى هو " قيمة a_p تصبح صغيرة " ، ولكن هذا يطرح سؤالاً عن كم هي صغيرة هذه القيمة؟ انظر إلى جداول E_3, E_2, E_1 في الفصل 45، إنها تُظهر أن قيمة a_p يمكن أن تصبح كبيرة عندما تكون قيمة p كبيرة. أحد الأشياء التي يمكننا عملها هو دراسة الحجم النسبي لـ p و a_p. جدول 47.1 يَسرُد تلك الأعداد الأولية p التي يكون فيها الانحراف $p -$ على E_3 كبيراً ، سواء كان موجباً أو سالباً. وبهدف المقارنة سردنا أيضاً القيم $\log(p)$, $\sqrt[3]{p}$, $\sqrt{p}$.

يتضح من الجدول 47.1 أنه على الرغم من أن القيم a_p's هي في الحقيقة أصغر بكثير من p ، فإنها يمكن أن تَكْبُر لتكون أكبر بكثير من $\sqrt[3]{p}$ و $\log(p)$. قيم

obeikandi.com

a_p's هي أكبر أيضاً من $\sqrt{p}$ ، ولكن كما ستلاحظ ، فإنها ليست أكبر من الضعف. بكلمات أخرى ، يظهر أن $\left|a_p\right|$ ليست أكبر من $2\sqrt{p}$.

***نظرية (٤٧,١):* (نظرية هاس Hasse). (H. Hasse ، 1933).**

ليكن N_p عدد النقاط قياس p على منحنى ناقصي، وليكن $a_p = p - N_p$ الانحراف – p . عندئذ $\left|a_p\right| < 2\sqrt{p}$

الجدول رقم (٤٧,١). قيم كبيرة للمقدار a_p للمنحنى $E_3 : y^2 = x^3 - 4x^2 + 16$

a_p	p	$\sqrt{p}$	$\sqrt[3]{p}$	$\log(p)$
–30	239	15.45962	6.20582	2.37840
40	439	20.95233	7.60014	2.64246
44	593	24.35159	8.40140	2.77305
50	739	27.18455	9.04097	2.86864
53	797	28.23119	9.27156	2.90146
–52	827	28.75761	9.38646	2.91751
68	1327	36.42801	10.98897	3.12287
–72	1367	36.97296	11.09829	3.13577
–68	1381	37.16181	11.13605	3.14019
–70	1429	37.80212	11.26360	3.15503
–71	1453	38.11824	11.32631	3.16227
78	1627	40.33609	11.76149	3.21139
84	2053	45.31004	12.70953	3.31239
89	2083	38.63989	12.77114	3.31869
–86	2113	45.96738	12.83216	3.32490
–91	2143	46.29255	12.89261	3.33102
93	2267	47.61302	13.13663	3.35545
–98	2551	50.50743	13.66376	3.40671
–103	3221	56.75385	14.76829	3.50799
114	3733	61.09828	15.51265	3.57206
–123	4051	63.64747	15.94119	3.60756

obeikandl.com

تابع الجدول رقم (٤٧,١).

129	4733	68.79680	16.78980	3.67514
–132	4817	69.40461	16.88854	3.68278
132	5081	71.28113	17.19160	3.70595
138	5407	73.53231	17.55168	3.73296
–146	5693	75.45197	17.85584	3.75534
–138	5711	75.57116	17.87464	3.75671
–147	6317	79.47956	18.48575	3.80051
–146	6373	79.83107	18.54021	3.80434
164	7043	83.92258	19.16840	3.84776
153	7187	84.77618	19.29816	3.85655
162	7211	84.91761	19.31962	3.85800

بعبارة أخرى، عدد النقاط N_p على منحنى ناقصي قياس p يساوي تقريباً p ، بخطأ لا يتجاوز $2\sqrt{p}$. هذه النتيجة الجميلة كانت تخمين وضعه " إيميل آرتن " (Emil Artin) في عشرينات القرن العشرين (1920_s) وأُثبت على يد " هيلمون هاس " (Helmut Hasse) في ثلاثينيات القرن العشرين (1930_s). تعميم هذه النظرية أُثبت على يد " أندريه ويل " (Andre Weil) في أربعينات القرن العشرين (1940_s)، ومرة أخرى عممت هذه النظرية بشكل أكبر على يد (Pierre Deligne) في سبيعينات القرن العشرين (1970_s).

ليس بمقدورنا الآن تقديم برهان نظرية Hasse لعموم المنحنيات الناقصية، ولكننا نستطيع على الأقل أن نبين لماذا تنطبق نتيجة هذه النظرية على المنحنى الناقصي E_2 الذي معادلته $y^2 = x^3 + x$. نذكر من الفصل الخامس والأربعون أن الانحراف لهذا المنحنى يُعطى بالقوانين:

$a_p = 0$ إذا كان $p \equiv 3 \pmod 4$ ، و

obeikandi.com

$a_p = \pm 2A$ إذا كان $p \equiv 1 \pmod 4$ ، حيث نكتب $p = A^2 + B^2$.

إذا كـان $a_p = 0$ فلـيس هنـاك الكـثير لقولـه. مـن جهـة أخـرى، إذا كـان $p \equiv 1 \pmod 4$ ، عندئـذ يمكننـا أن نُقـدّر $|a_p| = 2A = 2\sqrt{p - B^2} < 2\sqrt{p}$ وهـذه تماماً نظرية Hasse.

آخر نمـط سـوف نناقشه لـ a_p هـو نمـط غير متوقع أبـداً، وغالبـاً مـا ستصـاب بالدهشة كما اندهش كل شخص لاحظ هـذا النـمط. في الحقيقـة، لقـد استغرق الأمـر الكـثير مـن السـنوات قبـل أن يـدرك الرياضـيون أخيراً أن نمـط المعيارية (*Modularity Pattern*) صحيح تماماً. وعلى الرغم من أننا لا نستطيع إعطاء توضيح كامل عـن ماهيـة النمط المعياري بالضبط، فإننا نستطيع تذوق النكهة من خلال فحص منحنانا الناقصي

$$E_3 : \quad y^2 = x^3 - 4x^2 + 16$$

المقدار الآخر الذي نبحث فيه هو حاصل الضرب التالي:

$$\begin{aligned} \Theta = \mathrm{T}\left\{(1-\mathrm{T})\left(1-\mathrm{T}^{11}\right)\right\}^2 & \left\{\left(1-\mathrm{T}^2\right)\left(1-\mathrm{T}^{22}\right)\right\}^2 \\ & \times\left\{\left(1-\mathrm{T}^3\right)\left(1-\mathrm{T}^{33}\right)\right\}^2\left\{\left(1-\mathrm{T}^4\right)\left(1-\mathrm{T}^{44}\right)\right\}^2 \cdots \end{aligned}$$

من المفترض أن يستمر حاصل الضـرب هـذا علـى نحـو لا نهـائي، لكـن إذا قمنـا بضـرب العوامـل الأولى، سـنجد أن الحـدود الأولى مستقرة ولا تـتغير عنـدما تضـرب بعوامــل إضــافية. علــى ســبيل المثــال، إذا ضـــربنا جميـــع العوامـــل بـــ $\left\{\left(1-\mathrm{T}^{23}\right)\left(1-\mathrm{T}\right)^{253}\right\}^2$ ، سنحصل على :

$$\begin{aligned} \Theta = {} & \mathrm{T} - 2\mathrm{T}^2 - \mathrm{T}^3 + 2\mathrm{T}^4 + \mathrm{T}^5 + 2\mathrm{T}^6 - 2\mathrm{T}^7 - 2\mathrm{T}^9 - 2\mathrm{T}^{10} + \mathrm{T}^{11} \\ & - 2\mathrm{T}^{12} + 4\mathrm{T}^{13} + 4\mathrm{T}^{14} - \mathrm{T}^{15} - 4\mathrm{T}^{16} - 2\mathrm{T}^{17} + 4\mathrm{T}^{18} \\ & + 2\mathrm{T}^{20} + 2\mathrm{T}^{21} - 2\mathrm{T}^{22} - \mathrm{T}^{23} + \cdots \end{aligned}$$

obeikandi.com

وهذه الحدود الـ23 الأولى لن تتغير إذا ضربناها بعوامل أخرى.

حتى هذه اللحظة قد تكون مصاباً بالدهشة كيف أن حاصل الضرب هذا له علاقة بالمنحنى الناقصي E_3. للإجابة عن سؤالك، سنعرض هنا مرة أخرى قائمة الانحرافات $p-$ للمنحنى E_3 لجميع الأعداد الأولية حتى 23 :

$$\begin{array}{lllll} a_2 = 0 , & a_3 = -1 , & a_5 = 1 , & a_7 = -2 , & a_{11} = 1 \\ a_{13} = 4 , & a_{17} = -2 , & a_{19} = 0 , & a_{23} = -1 & \end{array}$$

بإهمال a_2 ، هل ترى علاقة بين هذه الـ a_p's وحاصل الضرب Θ ؟ عندما نكتب حاصل الضرب Θ كمجموع، سيظهر أن معامل T^p يساوي a_p. روعة، هذا النمط مستمر مع جميع الأعداد الأولية.

نظرية (٢, ٤٧) (نظرية المعيارية للمنحنى E_3).

ليكن E_3 المنحنى الناقصي :

$$E_3 : \; y^2 = x^3 - 4x^2 + 16$$

وليكن Θ حاصل الضرب :

$$\Theta = T\left\{(1-T)(1-T^{11})\right\}^2\left\{(1-T^2)(1-T^{22})\right\}^2 \times\left\{(1-T^3)(1-T^{33})\right\}^2\left\{(1-T^4)(1-T^{44})\right\}^2\ldots$$

بكتابة حاصل الضرب Θ كمجموع:

$$\Theta = c_1T + c_2T^2 + c_3T^3 + c_4T^4 + c_5T^5 + \cdots$$

عندئذ لكل عدد أولي $p \geq 3$ ، الانحراف $p-$ للمنحنى E_3 يحقق $a_p = c_p$.

obeikandl.com

في 1950_s ، وضع " يوتاكا تانياما " (Yutaka taniyama) تخميناً ساحقاً حول الأنماط المعيارية ، وخلال 1960_s قام " جورو شيمورا " (Goro Shimura) بإعادة صياغة لتخمين Taniyama وتحويله إلى تأكيد على أن كل منحنى ناقصي يَعرض نمطاً معياريًّا. بعد ذلك قدَّم Andre Weil برهاناً لمعكوس نظرية ساعد من خلاله في أن يحصل تخمين Shimura و Taniyama على قبول واسع النطاق.

تخمين (٣, ٤٧) (تخمين المعيارية) (Shimura , Taniyama)

كل منحنى ناقصي E هو منحنى معياري. بمعنى ، الانحراف – p للمنحنى E يعرض نمطاً معياريًّا.

ماذا نعني بقولنا إن الانحرافات – p لمنحنى ناقصي E " تعرض نمطاً معياريًّا "؟ إنها تعني أن هناك متسلسلة

$$\Theta = c_1\mathrm{T} + c_2\mathrm{T}^2 + c_3\mathrm{T}^3 + c_4\mathrm{T}^4 + c_5\mathrm{T}^5 + \cdots$$

بحيث (لأغلب) الأعداد الأولية p ، يكون العامل c_p مساوياً الانحراف – p a_p للمنحنى E ؛ ولذلك فإن لحاصل الضرب Θ بعض الخصائص التحويلية الرائعة التي هي لسوء الحظ صعبة جدًّا علينا لوصفها بدقة[١]. وعلى الرغم من هذا النقص في دقة العرض ، فإني آمل أن Θ للمنحنى E_3 ساعد في إيصال النكهة عن معنى المعيارية.

---

(١) للذين درسوا التحليل المركب ، سنقدم هنا الجزء الرئيسي لشرط المعيارية. سنتعامل مع Θ على أنه دالة في T ، ونضع $f(z) = \Theta\left(e^{2\pi iz}\right)$. عندئذ يوجد عدد صحيح $N \geq 1$ بحيث إذا كان A, B, C, D أي أعداد صحيحة تحقق $AD - BCN = 1$ ، فإن الدالة $f(z)$ تحقق

$$f\left(\frac{Az+B}{CNz+D}\right) = \frac{1}{\left(Cz+D\right)^2} f(z)$$

لجميع الأعداد المركبة $z = x + iy$ حيث $y > 0$.

تماريـــن

(٤٧,١) سوف تبحث في هذا التمرين عن أنماط أخرى لمعـاملات حاصـل الضـرب Θ الموصوف في النظرية المعيارية للمنحنى E_3. إذا كتبنا Θ كمجموع

$$\Theta = c_1\mathrm{T} + c_2\mathrm{T}^2 + c_3\mathrm{T}^3 + c_4\mathrm{T}^4 + c_5\mathrm{T}^5 + \cdots$$

النظرية المعيارية تنص على أنه للأعـداد الأوليـة $p \geq 3$ فـإن المعامـل p^{th} c_p يساوي الانحراف $p - a_p$ للمنحنى E_3. اعتمد على الجدول التـالي، الـذي يسـرد المعـاملات c_n لحاصـل الضـرب Θ لجميـع قـيم $n \leq 100$، لصـياغة تخمينات.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
c_n	1	–2	–1	2	1	2	–2	0	–2	–2	1	–2	4	4	–1	–4	–2
n	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
c_n	4	0	2	2	–2	–1	0	–4	–8	5	–4	0	2	7	8	–1	4
n	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
c_n	–2	–4	3	0	–4	0	–8	–4	–6	2	–2	2	8	4	–3	8	2
n	82	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68
c_n	8	–6	–10	1	0	0	0	5	–2	12	–14	4	–8	4	2	–7	–4
n	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
c_n	1	4	–3	0	4	–6	4	0	–2	8	–10	–4	1	16	–6	4	–2
n	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		
c_n	12	0	0	15	4	–8	–2	–7	–16	0	–8	–7	6	–2	–8		

obeikandi.com

(a) أوجد علاقة بين c_n , c_m و c_{mn} عندما $\gcd(m,n)=1$.

(b) أوجد علاقة بين c_p , c_{p^2} للأعداد الأولية p . لمساعدتك ، هنا قيم c_{p^2} للأعداد الأولية $p \le 37$.

$$\begin{array}{llll} c_{2^2}=2, & c_{3^2}=-2, & c_{5^2}=-4, & c_{7^2}=-3, \\ c_{11^2}=1, & c_{13^2}=3, & c_{17^2}=-13, & c_{19^2}=-19, \\ c_{23^2}=-22, & c_{29^2}=-29, & c_{31^2}=18, & c_{37^2}=-28 \end{array}$$

(مساعدة : العدد الأولي $p=11$ هو عدد أولي رديء للمنحنى E_3 ، لذلك ربما تريد معاملة c_{11^2} كخطأ تجريبي ومن ثم إهماله !).

(c) عمم نتيجة الفقرة (b) بإيجاد علاقة بين قيم متنوعة c_{p^k}'s لأعداد أولية p . لمساعدتك ، هنا قيم c_{p^k} للعددين الأوليين $p=3$, $p=5$ و $1 \le k \le 8$.

$$\begin{array}{llll} c_{3^1}=-1, & c_{3^2}=-2, & c_{3^3}=5, & c_{3^4}=1, \\ c_{3^5}=-16, & c_{3^6}=13, & c_{3^7}=35, & c_{3^8}=-74, \\ c_{5^1}=1, & c_{5^2}=-4, & c_{5^3}=-9, & c_{5^4}=11 \\ c_{5^5}=56, & c_{5^6}=1, & c_{5^7}=-279, & c_{5^8}=-284 \end{array}$$

(d) استخدم العلاقات التي اكتشفتها لحساب القيم c_m التالية :

$$(i)\ c_{400} \qquad (ii)\ c_{289} \qquad (iii)\ c_{1521} \qquad (iv)\ c_{16807}$$

(٤٧,٢) في هذا التمرين النمط المعياري للمنحنى الناقصي :

$$E:\ y^2 = x^3 + 1$$

الانحرافات – p للمنحنى E مسرودة في تمرين 45.5. اعتبر حاصل الضرب

$$\Theta = \mathrm{T}\left(1-\mathrm{T}^k\right)^4\left(1-\mathrm{T}^{2k}\right)^4\left(1-\mathrm{T}^{3k}\right)^4\left(1-\mathrm{T}^{4k}\right)^4\ldots$$

(a) أوجد العوامل القليلة الأولى لحاصل الضرب Θ ،

$$\Theta = c_1\mathrm{T} + c_2\mathrm{T}^2 + c_3\mathrm{T}^3 + c_4\mathrm{T}^4 + c_5\mathrm{T}^5 + c_6\mathrm{T}^6 + \cdots$$

obeikandl.com

حاول أن تخمناً ما هي قيمة k التي تجعل c_p's تساوي a_p's للمنحنى E .

(b) باستخدام قيمة k التي اخترتها في (a) ، أوجد قيم $c_1, c_2, \ldots, c_{18}$

(c) إذا كنت تستخدم كمبيوتراً، أوجد قيم $c_1, c_2, \ldots, c_{100}$.كيف ترتبط قيمة c_{91} بقيم c_{13}, c_7 ؟ كيف ترتبط قيمة c_{49} بقيمة c_7 ؟ اعمل تخميناً.

(٤٧,٣) الضرب:

$$f(X) = (1-X)(1-X^2)(1-X^3)(1-X^4)(1-X^5)\ldots$$

مفيد في وصف أنماط معيارية. على سبيل المثال، النمط المعياري للمنحنى الناقصي E_3 يُعطى من خلال $\Theta = \mathrm{T} \cdot f(\mathrm{T})^2 \cdot f(\mathrm{T}^{11})^2$. الآن اعتبر المنحنى الناقصي

$$y^2 = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

لقد اتضح أن النمط المعياري لهذا المنحنى يكون على الشكل:

$$\Theta = \mathrm{T} \cdot f(\mathrm{T}^j) \cdot f(\mathrm{T}^k) \cdot f(\mathrm{T}^m) \cdot f(\mathrm{T}^n)$$

لأعداد صحيحة موجبة معينة j, k, m, n . اجمع بعض البيانات وحاول اكتشاف القيم الصحيحة لـ j, k, m, n . (ربما تحتاج لكمبيوتر لحل هذه المسألة).