مجاميع القوى
Sums of Powers

العدد المثلثي النوني $\left(n^{th}\right)$

$$T_n = 1+2+3+4+\cdots+n$$

هو مجموع أول n عدد صحيح. في الفصل الأول استخدمنا الهندسة لإيجاد صيغة بسيطة لـ T_n ،

$$T_n = \frac{n\left(n+1\right)}{2}$$

هذه الصيغة كانت مفيدة جدًّا في الفصل التاسع والعشرون، حيث وصفنا جميع الأعداد التي تكون مثلثيه ومربعة في نفس الوقت.

إن السبب وراء أهمية صيغة T_n هو أن هذه الصيغة تعبر عن مجموع n من الأعداد بكثير حدود بسيط بدلالة المتغير n. ولنقول ذلك بطريقة أخرى، ليكن $F\left(x\right)$ كثير الحدود:

$$F\left(x\right) = \frac{1}{2}X^{2} + \frac{1}{2}X$$

عندئذ فإن المجموع :

$$1+2+3+4+\cdots+n$$

والذي يتطلب منا للوهلة الأولى جمع n من الأعداد ، يمكن حسابه ببساطة شديدة على أنه قيمة $F(n)$.

الآن افرض بدلاً من جمع أول n عدد صحيح ، أننا جمعنا أول n من الأعداد المربعة :

$$R_n = 1+4+9+16+\cdots+n^2$$

نعمل جدولاً صغيراً للقيم القليلة الأولى ونبحث عن نمط.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R_n	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385

الأعداد $R_1, R_2, R_3, \ldots$ تتزايد بسرعة كبيرة ، ولكن لا يبدو أنها توحي بأي نمط بسيط. ليس من السهل أن نرى كيف حصلنا على هذه الأعداد. لعمل ذلك سنستخدم أداة تسمى طريقة "المجاميع المتداخلة" (*telescoping sums*). لتوضيح هذه الطريقة ، سننظر أولاً للمسألة السهلة التالية. افرض أننا نريد حساب قيمة المجموع :

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

بالنسبة إلى هذا المجموع ، إذا قمنا بحساب القيم القليلة الأولى ، فإنه من السهل ملاحظة النمط :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$

إذن نتوقـع أن S_n ربمـا تسـاوي $\frac{n-1}{n}$ ، لكـن ، كيـف نـبرهن أن هـذا صـحيح؟

المفتاح هو ملاحظة أن الحدود القليلة الأولى للمجموع يمكن كتابتها على الشكل :

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3} \quad , \quad \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

وهكذا. بشكل عام ، الحد i^{th} للمجموع يساوي :

$$\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$$

لذلك فإن المجموع S_n يساوي :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

الآن انظر ماذا يحدث عندما نجمع حدود هـذا السطر الأخير. إننـا نبـدأ بـ 1 . بعد ذلك نحصل على $+\frac{1}{2}$ متبوعة بـ $-\frac{1}{2}$ ، إذن يلغي هذان الحدان أحدهما الآخر. بعد ذلك نحصل على $+\frac{1}{3}$ متبوعة بـ $-\frac{1}{3}$ ، إذن يلغـي أيضاً هـذان الحـدان أحـدهما الآخـر. سنجد بالمحصلة أن الحدود الباقية هي فقط الحد الأول والحد الأخير. هذا يبرهن الصيغة

$$S_n=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$$

نعود الآن لمسألة حساب مجموع المربعات :

$$R_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

للأسباب التي ستصبح واضحة في وقتها، سوف ننظر أولاً للمجموع المتداخل الذي يحوي مكعبات (أعداد مكعبة):

$$(n+1)^3 = 1^3 + \left(2^3 - 1^3\right) + \left(3^3 - 2^3\right) + \cdots + \left((n+1)^3 - n^3\right)$$

باستخدام رمز المجموع يمكن كتابة المعادلة السابقة على الشكل:

$$(n+1)^3 = 1 + \sum_{i=1}^{n}\left((i+1)^3 - i^3\right)$$

بعد ذلك نفك المقدار $(i+1)^3$ بالاعتماد على صيغة ذو الحدين (انظر الفصل السادس والثلاثون).

$$(i+1)^3 = i^3 + 3i^2 + 3i + 1$$

بتعويض هذا في المجموع المتداخل نحصل على (لاحظ أن الحدود i^3 شُطبت).

$$(n+1)^3 = 1 + \sum_{i=1}^{n}\left(3i^2 + 3i + 1\right)$$

الآن نجزئ المجموع إلى ثلاث قِطَع كما يلي:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= 1 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= 1 + 3R_n + 3\mathrm{T}_n + n\end{aligned}$$

لكننا نعلم مسبقاً أن $\mathrm{T}_n = \sum_{i=1}^{n} i$ يساوي $\left(n^2+n\right)/2$ ، إذن يمكن أن نحل المعادلة في R_n :

$$R_n = \frac{(n+1)^3 - n - 1}{3} - \mathrm{T}_n$$
$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} - \frac{n^2 + n}{2}$$
$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

لقد استخدمنا الكثير من الجبر، لكن تكللت جهودنا بالصيغة الجميلة:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

لاحظ كم هي أنيقة هذه الصيغة. إذا أردنا أن نحسب قيمة

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 9999^2 + 10000^2$$

فيمكننا أن نجمع 10000 حد، لكن باستخدام صيغة R_n فإننا نحتاج فقط لحساب

$$R_{10000} = \frac{2 \cdot 10000^3 + 3 \cdot 10000^2 + 10000}{6} = 333,383,335,000$$

خذ الآن نفساً عميقاً؛ لأننا سنتعرض لمسألة إيجاد مجاميع قوى k^{th} لقيم عليا لـ k. نكتب

$$F_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

كمجموع أول n من الأعداد، كل منها مرفوع للأس k.

كما أن طريقة المجموع المتداخل عملت بشكل ممتاز في حساب مجاميع مربعة، كذلك هي بالنسبة للقوى العليا. سنبدأ بالمجموع المتداخل

$$\left(n+1\right)^k = 1^k + \left(2^k - 1^k\right) + \left(3^k - 2^k\right) + \cdots + \left(\left(n+1\right)^k - n^k\right)$$

باستخدام رمز المجموع تصبح المعادلة على الشكل:

$$\left(n+1\right)^k = 1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\left(i+1\right)^k - i^k\right)$$

تماماً كما فعلنا سابقاً، نفك $(i+1)^k$ باستخدام صيغة ذي الحدين (الفصل السادس والثلاثون).

$$(i+1)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} i^j$$

الحد الأخير (بمعنى الحد $j = k$) هو i^k، إذن يُلغي هذا الحدُّ الحدَّ i^k الموجود في المجموع المتداخل، إذن

$$(n+1)^k = 1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j} i^j$$

الآن بتبديل ترتيب المجموعتين، نجد بالمصادفة الغريبة أن مجاميع القوى $F_0\left(n\right), F_1\left(n\right), \ldots, F_{k-1}\left(n\right)$ تظهر،

$$\left(n+1\right)^k = 1 + \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{i=1}^{n} i^j = 1 + \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j} F_j\left(n\right)$$

ما مقدار أهمية صيغة بهذا الشكل، والتي تَضُم جميع المقادير التي لا نعلمها؟ الجواب هو أنها تربط كل مقدار من $F_0\left(n\right), F_1\left(n\right), F_2\left(n\right), \ldots$ بالمقدار الذي يسبقه. لتوضيح ذلك، سنسحب خارجاً الحد الأخير في المجموع، أي الحد عندما $j = k - 1$ وننقل جميع الحدود الأخرى إلى الطرف الآخر.

$$\binom{k}{k-1}F_{k-1}(n) = (n+1)^k - 1 - \sum_{j=0}^{k-2}\binom{k}{j}F_j(n)$$

الآن $\binom{k}{k-1} = k$ ، إذن بالقسمة على k نحصل على الصيغة الإرجاعية :

$$F_{k-1}(n) = \frac{(n+1)^k - 1}{k} - \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-2}\binom{k}{j}F_j(n)$$

نسمي هذه الصيغة بالصيغة الإرجاعية لـ F_k's ، لأنها تعبر عن كل F_k بدلالة المقادير التي تسبقه. ولذلك فهذه الصيغة تشبه بطريقة ما الصيغة الإرجاعية لمتتالية فيبوناتشي (الفصل السابع والثلاثون)، على الرغم من أن هذه الصيغة أعقد بكثير من صيغة فيبوناتشي.

دعنا نستخدم الصيغة الإرجاعية لإيجاد صيغة مجموع- قوة جديدة. بأخذ $k = 4$ في الصيغة الإرجاعية ينتج.

$$F_3(n) = \frac{(n+1)^4 - 1}{4} - \frac{1}{4}\left\{\binom{4}{0}F_0(n) + \binom{4}{1}F_1(n) + \binom{4}{2}F_2(n)\right\}$$

ونعلم مسبقاً أن :

$$F_1(n) = \mathrm{T}_n = \frac{n^2+n}{2} \qquad , \qquad F_2(n) = R_n = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

بينما قيمة $F_0(n)$ تساوي :

$$F_0(n) = 1^0 + 2^0 + \cdots + n^0 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ terms}} = n$$

بتعويض قيم $F_0(n)$. $F_1(n)$, $F_2(n)$ ينتج :

$$F_3(n)=\frac{(n+1)^4-1}{4}-\frac{1}{4}\left\{\binom{4}{0}F_0(n)+\binom{4}{1}F_1(n)+\binom{4}{2}F_2(n)\right\}$$
$$=\frac{n^4+4n^3+6n^2+4n+1-1}{4}$$
$$-\frac{1}{4}\left\{n+4\frac{n^2+n}{2}+6\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right\}$$
$$=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

إذن :

$$F_3(n)=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

فمثلاً ،

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+10000^3=\frac{10000^4+2\cdot 10000^3+10000^2}{4}$$
$$=2,500,500,025,000,000$$

إن الصيغة الإرجاعية لمجاميع القوة جميلة جدًّا ؛ لذلك سنسجل اكتشافنا على شكل نظرية.

نظرية (١, ٤٢) (نظرية مجموع القوى)

ليكن $k\geq 0$ عدداً صحيحاً. يوجد كثير حدود $F_k(x)$ من الدرجة $k+1$ بحيث :

$F_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$ لكل قيمة $n=1,2,3,\ldots$.

كثيرات الحدود هذه يمكن حسابها باستخدام الصيغة الإرجاعية :

$$F_{k-1}(X)=\frac{(X+1)^k-1}{k}-\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-2}\binom{k}{i}F_i(X)$$

البرهان

لقد برهنا أن مجاميع القوة يمكن حسابها من خلال صيغة إرجاعية. كذلك يتضح من الصيغة الإرجاعية أن مجاميع القوة هي كثيرات حدود ؛ لأنه ببساطة كل مجموع قوة لاحقة هو كثير الحدود $\frac{(X+1)^k-1}{k}$ مضافاً إليه مضاعف لمجاميع القوة السابقة.

كل ما تبقى هو برهان أن درجة $F_k(X)$ هي $k+1$. سوف نستخدم الاستقراء. لنبدأ البرهان بالاستقراء ، نلاحظ أن $F_0(X)=X$ درجته صحيحة. الآن أفرض أننا نعلم أن درجة $F_k(X)$ هي $k+1$ للقيم $k=0,1,2,\ldots,m-1$. بمعنى آخر ، افرض أننا أنهينا البرهان لجميع قيم k الأقل من m. لنستخدم الصيغة الإرجاعية عندما $k=m+1$ لحساب

$$F_m(X)=\frac{(X+1)^{m+1}-1}{m+1}-\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}F_i(X)$$

الجزء الأول يبدو على الشكل :

$$\frac{(X+1)^{m+1}-1}{m+1}=\frac{1}{m+1}X^{m+1}+\cdots$$

من جهة أخرى ، من فرض الاستقراء نعلم أن درجة $F_i(X)$ هي $i+1$ لكل $i=0,1,\ldots,m-1$ ، إذن كثيرات الحدود في المجموع درجتها على الأكثر m. إن هذا يثبت أن X^{m+1} الآتي من الجزء الأول لا يُلغى مع أي من الحدود الأخرى ، إذن درجة $F_m(X)$ هي $m+1$. وبهذا يكتمل برهاننا الاستقرائي.

لقد قمنا بحساب كثيرات حدود مجموع – القوة :

$$F_1(X) = \frac{1}{2}\left(X^2 + X\right)$$
$$F_2(X) = \frac{1}{6}\left(2X^3 + 3X^2 + X\right)$$
$$F_3(X) = \frac{1}{4}\left(X^4 + 2X^3 + X^2\right)$$

عُد الآن لحساب بعض كثيرات حدود مجموع – القوة اللاحقة ؛ لذلك اذهب لتمرين 42.2 واستخدم الصيغة الإرجاعية لحساب $F_4(X)$, $F_5(X)$. تأكد من فحص إجابتك.

لكي لا تشعر أنني قمت بعمل الحسابات السهلة وتركت لك عمل الحسابات الصعبة سأسرد هنا بعض كثيرات حدود مجموع – القوة اللاحقة.

$$F_6(X) = \frac{1}{42}\left(6X^7 + 21X^6 + 21X^5 - 7X^3 + X\right)$$
$$F_7(X) = \frac{1}{24}\left(3X^8 + 12X^7 + 14X^6 - 7X^4 + 2X^2\right)$$
$$F_8(X) = \frac{1}{90}\left(10X^9 + 45X^8 + 60X^7 - 42X^5 + 20X^3 - 3X\right)$$
$$F_9(X) = \frac{1}{20}\left(2X^{10} + 10X^9 + 15X^8 - 14X^6 + 10X^4 - 3X^2\right)$$
$$F_{10}(X) = \frac{1}{66}\left(6X^{11} + 33X^{10} + 55X^9 - 66X^7 + 66X^5 - 33X^3 + 5X\right)$$

ويمكنك الاعتماد على هذه القائمة للبحث عن أنماط ولتختبر التخمينات.

أشكال العدد ثلاثي الأبعاد

خلال عملنا في نظرية الأعداد والهندسة نقوم بدراسة أنواع مختلفة من أشكال العدد ، مثل الأعداد المثلثية والأعداد المربعة (الفصلين رقم واحد والتاسع والعشرون) وحتى الأعداد الخماسية (تمرين ٢٩،٢). المثلثات ، المربعات، الخماسيات هي أشكال

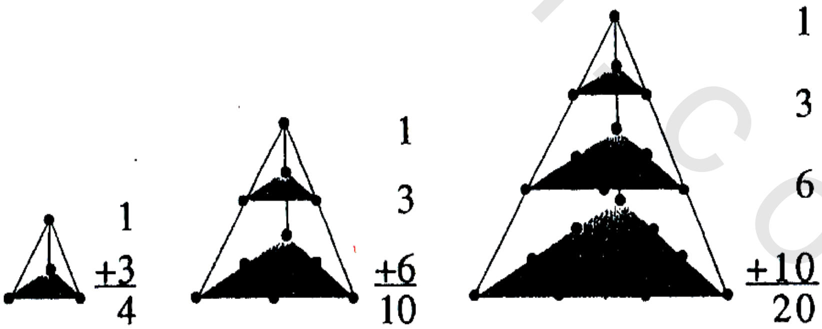
مستوية ، أي أنها تقع في أسطح منبسطة. من جهة أخرى ، نحن نعيش في فضاء ثلاثي الأبعاد ؛ لذلك بَحثنا في أشكال العدد ثلاثي الأبعاد. سوف نبني هرماً قاعدته مثلثية ، كما يتضح من الشكل رقم 42.1.

المصطلح الرياضي الغريب الذي يطلق على هذا النوع من المجسمات هو "رباعي السطوح" (*tetrahedron*) . نعرف العدد رباعي السطوح النوني $\left(n^{th}\right)$ *th* *Tetrahedral Number* على أنه عدد النقاط في رباعي السطوح ذي الـ n طبقة، ونرمز لذلك بالرمز:

$$\mathbb{T}_n = \text{العدد رباعي السطوح النوني} \left(n^{th}\right)$$

بالنظر للشكل 42.1 ، نرى أن:

$$\mathbb{T}_1 = 1 \quad , \quad \mathbb{T}_2 = 4 \quad , \quad \mathbb{T}_3 = 10 \quad , \quad \mathbb{T}_4 = 20$$



الشكل رقم (٤٢,١). الأعداد رباعية السطوح $T_2 = 4$, $T_3 = 10$, $T_4 = 20$

توضح الصور أعلاه كيف تتشكل الأعداد رباعية السطوح.

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_1 &= 1, \\ \mathrm{T}_2 &= 4 = 1+3, \\ \mathrm{T}_3 &= 10 = 1+3+6, \\ \mathrm{T}_4 &= 20 = 1+3+6+10, \end{aligned}$$

لتشكيل العدد رباعي السطوح الخامس، نحتاج إلى إضافة مثلث آخر في قاع رباعي السطوح السابق. بكلمات أخرى، نحتاج إلى إضافة العدد المثلثي اللاحق إلى العدد رباعي السطوح السابق. إذا لم يكن هذا واضحاً، نلاحظ كيف أن $\mathbb{T}_4$ تشكل بإضافة أول أربعة أعداد مثلثية: $1, 3, 6, 10$ لذلك لكي نحصل على $\mathbb{T}_5$، نأخذ $\mathbb{T}_4$ ونضيفه إلى العدد المثلثي الخامس $T_5 = 15$ لنحصل على

$$\mathbb{T}_5 = \mathbb{T}_4 + T_5 = (1+3+6+10)+15 = 35$$

بشكل عام، العدد رباعي السطوح النوني (n^{th}) يساوي مجموع أول n من الأعداد المثلثية،

$$\mathbb{T}_n = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + \mathrm{T}_3 + \cdots + \mathrm{T}_n$$

ونعلم أن العدد المثلثي النوني $\mathrm{T}_n (n^{th})$ يُعطى من الصيغة

$$\mathrm{T}_n = \frac{n^2+n}{2}$$

لذلك يمكننا إيجاد صيغة لـ $\mathbb{T}_n$ بالمجموع:

$$\mathbb{T}_n = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{T}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2+j}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j$$

ولإنهاء الحسابات ، نستخدم صيغ – القوة ، وبالتحديد صيغتنا لمجموع أول n من الأعداد المربعة ،

$$\mathbb{T}_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{n^2+n}{2}\right)=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$$

من المهم ملاحظة أن كثير الحدود رباعي السطوح يحلل إلى عوامل على الشكل :

$$\mathbb{T}_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

لذلك ؛ فإن العدد المثلثي النوني $\left(n^{th}\right)$ والعدد رباعي السطوح النوني $\left(n^{th}\right)$ يمكن التعبير عنهما باستخدام معاملات ذو الحدين :

$$T_n = \binom{n+1}{2} \qquad \text{و} \qquad \mathbb{T}_n = \binom{n+2}{3}$$

بكلمات أخرى ، الهرم (المثلث) ثنائي البعد النوني $\left(n^{th}\right)$ له $\binom{n+1}{2}$ نقطة ، والهرم (رباعي السطوح) ثلاثي البعد النوني $\left(n^{th}\right)$ له $\binom{n+2}{3}$ نقطة. كم نقطة حسب اعتقادك نحتاجها لملء هرم رباعي الأبعاد؟

تماريــــــن

(٤٢,١) استخدمنا خلال هذا الفصل مجموع متداخل لإثبات أن المقدار $S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$ يساوي $\frac{n-1}{n}$.

استخدام الاستقراء لإعطاء برهان مختلف لهذه الصيغة.

(٤٢,٢) (a) استخدم الصيغة الإرجاعية لحساب كثير الحدود $F_4\left(X\right)$. تأكد من فحص إجابتك بحساب $F_4\left(1\right)$, $F_4\left(2\right)$, $F_4\left(3\right)$ ، وبرهن أنها تساوي $1\ ,\ 1+2^4=17\ ,\ 1+2^4+3^4=98$ على التوالي.

(b) أوجد كثير الحدود $F_5\left(X\right)$ وافحص إجابتك كما في (a).

(٤٢,٣) (a) برهن أن المعامل القيادي لـ $F_k\left(X\right)$ هو $\dfrac{1}{k+1}$ بمعنى، برهن أن $F_k\left(X\right)$ هو على الشكل.

$$F_k\left(X\right)=\frac{1}{k+1}X^{k+1}+aX^k+bX^{k-1}+\cdots$$

(b) حاول إيجاد صيغة مشابهة للمعامل اللاحق (بمعنى، معامل X^k) في كثير الحدود $F_k\left(X\right)$.

(c) أوجد صيغة لمعامل X^{k-1} في كثير الحدود $F_k\left(X\right)$.

(٤٢,٤) (a) ما قيمة $F_k\left(0\right)$ ؟

(b) ما قيمة $F_k\left(-1\right)$ ؟

(c) اعتمد على (b) لإثبات أنه إذا كان p عدداً أوليًّا، فإن:

$$1^k+2^k+\cdots+\left(p-1\right)^k\equiv 0\left(\operatorname{mod} p\right)$$

(d) ما قيمة $F_k\left(-1/2\right)$ ؟ بشكل أكثر دقة، حاول إيجاد أكبر مجموعة من الـ k's التي يمكنك من خلالها تخمين قيمة $F_k\left(-1/2\right)$ (وأثبت صحة ذلك).

(٤٢,٥) برهن الحقيقة الرائعة:

$$\left(1+2+3+\cdots+n\right)^2=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

(٤٢,٦) معاملات كثير الحدود $F_k(N)$ أعـداد نسبية. نرغـب في ضـرب كثير الحـدود هذا في عدد صحيح للتخلص من جميع المقامات (جمع مقام). على سبيل المثال،

$$F_1(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X \quad , \quad F_3(X) = \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X$$

إذن $2 \cdot F_1(X) \quad , \quad 6 \cdot F_2(X)$ لهما معاملات صحيحة.

(a) برهن أن

$(k+1)! \cdot F_k(X)$

معاملاته أعداد صحيحة.

(b) واضح من أمثلة هذا الفصل أن $(k+1)!$ يكون غالباً أكبر من العـدد الضروري للتخلص من مقامات معـاملات $F_k(X)$. هـل تستطيع إيجاد أي نوع من الأنماط لهذه المقامات؟

(٤٢,٧) الهـرم ذو القاعـدة المربعـة الـتي طولهـا n يتطلـب $F_2(n)$ نقطـة ؛ لـذلك $F_2(n)$ هو "العدد الهرمي المربـع النـوني (n^{th}) " (the nth Square Pyramid Number). في الفصل التاسع والعشرون أوجـدنا عـدد لا نهـائي مـن الأعـداد المثلثيـة والمربعـة في نفـس الوقـت. ابحـث عـن أعـداد تكـون رباعيـة السـطوح وهرمية ومربعة في نفس الوقت. هـل تعتقـد أن هنـاك عـدداً لا نهائيًّـا منهـا أم أنها محدودة؟

(٤٢,٨) (a) أوجد تعبيراً بسيطاً للمجموع :

$$\mathsf{T}_1 + \mathsf{T}_2 + \mathsf{T}_3 + \cdots + \mathsf{T}_n$$

أي مجموع أول n عدد رباعي السطوح.

(b) عبِّر عن إجابتك في (a) كمعامل ذي حدين مُفْرد.

(c) حاول أن تفهم وتشرح العبارة التالية :

" العدد $T_1+T_2+T_3+\cdots+T_n$ هو عدد النقاط التي نحتاجها لتشكيل شكل هرمي في الفضاء رباعي البعد".

(٤٢,٩) العدد المثلثي النوني $\left(n^{th}\right)$ يساوي معامل ذي الحدين $\binom{n+1}{2}$ ، والعدد رباعي السطوح النوني $\mathbb{T}_n\left(n^{th}\right)$ يساوي معامل ذي الحدين $\binom{n+2}{3}$. هذا يعني أن الصيغة $\mathbb{T}_n = \mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2+\mathrm{T}_3+\cdots+\mathrm{T}_n$ يمكن كتابتها باستخدام معاملات ذي الحدين على الشكل :

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{n+1}{2}=\binom{n+2}{3}$$

(a) وضح هذه الصيغة عندما $n=5$ بأخذ مثلث باسكال (انظر الفصل 36) ، بوضع دائرة حول الأعداد $\binom{2}{2},\binom{3}{2},\ldots,\binom{6}{2}$ ، ووضع مربع حول المجموع $\binom{7}{3}$.

(b) اكتب الصيغة $1+2+3+\cdots+n=\mathrm{T}_n$ باستخدام معاملات ذي الحدين ووضح صيغتك عند $n=5$ باستخدام مثلث باسكال كما في (a).
(مساعدة : $\binom{n}{1}=n$).

(c) عمم هذه الصيغ لكتابة مجموع معاملات ذي الحدين $\binom{r}{r},\binom{r+1}{r},\ldots$ بدلالة معامل ذي الحدين.

(d) برهن أن صيغتك في (c) صحيحة.

(٤٢,١٠) (للذين درسوا التفاضل والتكامل). ليكن $P_0\left(x\right)$ كثير الحدود :

$$P_0\left(x\right)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}$$

وليكن :

$$P_2(x) = \frac{d}{dx}\left(x\,P_1(x)\right),\ P_1(x) = \frac{d}{dx}\left(x\,P_0(x)\right)$$

وهكذا دواليك.

(a) ما هو الشكل العام لـ $P_k(x)$ ؟ ما قيمة $P_k(1)$ ؟

(مساعدة : الجواب يحتاج استخدام طرق وردت في هذا الفصل).

(b) كثير الحدود $P_0(x)$ هو المجموع الهندسي الذي استخدمناه في الفصل 14. تذكر أن صيغة المجموع الهندسي هي :

. $P_0(x) = (x^n - 1)/(x - 1)\ \ ,\ \ x \neq 1$

احسب النهاية :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

وتأكد من أنها تعطي نفس قيمة $P_0(1)$. (مساعدة : استخدم قاعدة لوبيتال).

(c) أوجد صيغة لـ $P_1(x)$ من خلال الاشتقاق.

$$P_1(x) = \frac{d}{dx}\left(x \frac{x^n - 1}{x - 1}\right)$$

(d) احسب النهاية للصيغة التي أوجدتها في (c) عندما $x \to 1$. اشرح لماذا تعطي هذه الطريقة برهاناً جديداً لقيمة $1 + 2 + \cdots + n$.

(e) ابدأ بصيغتك التي أوجدتها في (c)، كرر (c) و (d) لإيجاد صيغة لـ $P_2(x)$ ولنهاية $P_2(x)$ عندما $x \to 1$.

(f) ابدأ بصيغتك التي أوجدتها في (e) ، كرر (c) و (d) لإيجاد صيغة لـ $P_3\left(x\right)$ ولنهاية $P_3\left(x\right)$ عندما $x \to 1$.

(٤٢,١١) ثبّت عدداً صحيحاً $k \geq 0$ وليكن $F_k\left(n\right) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ هو مجموع القوى الذي درسناه في هذا الفصل. وليكن :

$A\left(x\right) =$ الدالة المولدة للمتتالية $F_k\left(0\right),\ F_k\left(1\right),\ F_k\left(2\right),\ F_k\left(3\right),\ \ldots$

وتساوي :

$$F_k\left(1\right)x + F_k\left(2\right)x^2 + F_k\left(3\right)x^3 + \cdots$$

$B\left(x\right) =$ الدالة المولدة للمتتالية $0^k, 1^k, 2^k, 3^k, \ldots$

وتساوي

$$x + 2^k x^2 + 3^k x^3 + 4^k x^4 + \cdots$$

أوجد صيغة بسيطة تربط بين $A\left(x\right),\ B\left(x\right)$.