الفصل الواحد والاربعون

توليـــد الـــدوال
Generating Functions

اختبارات الكفاءة، اختبارات الذكاء، ورياضيات الفصول الابتدائية تعج بأسئلة من النوع[1]:

ما هو العدد التالي في المتتالية: $23, 27, 28, 32, 36, 37, 38, 39, 41, 43, 47, 49,$ $50, 51, 52, 53, 56, 58, 61, 62, 77, 78, \_ ?$

إن نظرية الأعداد مليئة بالمتتاليات المثيرة للاهتمام. ولقد رأينا الكثير منها خلال رحلاتنا في دراسة نظرية الأعداد، على سبيل المثال[2]:

الأعداد الطبيعية $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

الأعداد المربعة $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$

أعداد فيبوناتشي $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

---

(١) هذه المسألة لمحبي البيسبول فقط. الإجابة في نهاية الفصل.

(٢) بالنسبة لهذا الفصل، من الملائم أن تبدأ هذه المتتاليات المثيرة بالصفر بدلاً من الواحد.

كذلك رأينا أن المتتاليات يمكن وصفها بعدة طرق، فمثلاً من خلال صيغة على الشكل:

$$S_n = n^2$$

أو من خلال صيغة إرجاعية مثل:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

كلتا هاتين الطريقتين مفيدة في وصف المتتالية، لكن بما أن المتتالية تضم قائمة لا نهائية من الأعداد، فإنه من الجيد أن تكون هناك طريقة لتجميع كامل المتتالية في رزمة واحدة. وسوف نبني هذه الأوعية من متسلسلات القوى.

على سبيل المثال، يمكننا جعل المتتالية $0,1,2,3,\ldots$ من الأعداد الطبيعية في رزمة من خلال متسلسلة القوى:

$$0 + 1\cdot x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \cdots$$

ويمكننا جعل المتتالية $0,1,1,2,3,5,8,\ldots$ من أعداد فيبوناتشي في رزمة من خلال متسلسلة القوى:

$$0 + 1\cdot x + 1\cdot x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \cdots$$

بشكل عام، أي متتالية:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$$

يمكن أن نجعلها في رزمة من خلال متسلسلة قوى:

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

وهذا يسمى "توليد دالة" (*generating function*) للمتتالية $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$.

ما هي الإيجابية الأخرى لتوليد الدوال غير أنها طريقة مناسبة نوعاً ما لسرد حدود المتتالية؟ الجواب يكمن في الكلمة القوية "دالة" (*function*). الدالة المُولدة $A(x)$ هي دالة في المتغير x، أي، يمكننا أن نعوض بقيمة للمتغير x و(إذا كنا محظوظين) نحصل على قيمة لـ $A(x)$. نقول "إذا كنا محظوظين" لأنه كما تعلم – إذا كنت قد درست حساب التفاضل والتكامل – ، متسلسلة القوى ليست متقاربة لأي قيمة للمتغير x.

لتوضح هذه الأفكار، سنبدأ مع المتتالية غير المهمة:

$$1,1,1,1,1,1,1,\ldots$$

التي جميع حدودها 1. إن الدالة المُولدة لهذه المتتالية، والتي نسميها $G(x)$ هي:

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$$

ينص اختبار النسبة[١] من "حساب التفاضل والتكامل" على أن هذه المتسلسلة متقاربة إذا كان:

$$1 > \rho = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x|$$

لقد أدركت بلا شك أن $G(x)$ هي "المتسلسلة الهندسية" (*geometric series*) وربما تتذكر أيضاً قيمتها، ولكن في حالة أنك نسيت، فهنا الطريقة الأنيقة المستخدمة

(١) تذكر أن اختبار النسبة ينص على أن المتتالية $b_0, b_1, b_2, \ldots$ متقاربة إذا كانت نهاية النسبة $\rho = \lim_{n \to \infty} |b_{n+1}/b_n|$ تحقق أن $\rho < 1$.

لحساب قيمة المتسلسلة الهندسية.

$$\begin{aligned} x\,G(x) &= x\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots\right) \\ &= x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\cdots \\ &= \left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\cdots\right)-1 \\ &= G(x)-1 \end{aligned}$$

لذلك $xG(x)=G(x)-1$ ، إذن :

$$G(x)=\frac{1}{1-x}$$

وهذا ما يثبت الصيغة التالية :

صيغة المتسلسلة الهندسية

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots=\frac{1}{1-x}$$ **حيث** $|x|<1$

المتتالية $1,1,1,1,\ldots$ مثيرة للملل ؛ لذلك دعنا ننتقل إلى المتتالية من الأعداد الطبيعية $0,1,2,3,\ldots$ والتي دالتها المُولدة هي :

$$N(x)=x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+6x^6+\cdots$$

يخبرنا اختبار النسبة أن $N(x)$ متقاربة بشرط

$$1>\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{n\,x^n}\right|=|x|$$

إننا نرغب في إيجاد صيغة بسيطة لـ $N(x)$ ، شبيهة بالصيغة التي أوجدناها لـ $G(x)$. الطريقة لعمل ذلك هي أن نبدأ أولاً بصيغة المتسلسلة الهندسية .

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

ومن ثم نستخدم القليل من حساب التفاضل والتكامل. باشتقاق طرفي هذه الصيغة ، نحصل علىِ :

$$\underbrace{0+1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

بضرب طرفي هذه المعادلة بـ x نحصل على الصيغة :

$$N(x)=x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+6x^6+\cdots=\frac{x}{(1-x)^2}$$

إذا اشتقينا مرة أخرى وضربنا طرفي المعادلة بـ x فسنحصل على صيغة للدالة المُوَلدة :

$$S(x)=x+4x^2+9x^3+16x^4+25x^5+36x^6+\cdots$$

لمتتالية الأعداد المربعة $1,4,9,16,25,\ldots$. لذلك :

$$x\frac{dN(x)}{dx}=x\frac{d}{dx}\left(x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots\right)=x\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)$$

$$S(x)=x+4x^2+9x^3+16x^4+25x^5+\cdots=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

نعود الآن لمتتالية فيبوناتشي $0,1,1,2,3,5,8,\ldots$ ودالتها المُولدة :

$$F(x)=F_1x+F_2x^2+F_3x^3+F_4x^4+F_5x^5+F_6x^6+\cdots$$
$$=x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5+8x^6+13x^7+\cdots$$

كيف نستطيع إيجاد تعبير بسيط لـ $F(x)$ ؟ إن فكرة الاشتقاق التي استخدمناها سابقاً لا تبدو مجدية ، إذن بدلاً من ذلك سنستخدم الصيغة الإرجاعية .

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

لـذلك يمكننـا اسـتبدال F_3 بــ $F_2 + F_1$ ، ويمكننـا اسـتبدال F_4 بــ $F_3 + F_2$ ، وهكذا ، وهذا يعني أننا يمكننا كتابة $F(x)$ على الشكل

$$\begin{aligned} F(x) &= F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + F_5x^5 + \cdots \\ &= F_1x + F_2x^2 + (F_2+F_1)x^3 + (F_3+F_2)x^4 + (F_4+F_3)x^5 + \cdots \end{aligned}$$

بإهمـال أول حـدين مؤقتـاً ، يمكننـا إعـادة تجميـع الحـدود الأخـرى بالأسـلوب التالي :

نجمع هذه الحدود مع بعضها

$$(F_2+F_1)x^3 + (F_3+F_2)x^4 + (F_4+F_3)x^5 + (F_5+F_4)x^6 + \cdots$$

نجمع هذه الحدود مع بعضها

هذا يعطي الصيغة :

$$\begin{aligned} F(x) = F_1x + F_2x^2 &+ \{F_1x^3 + F_2x^4 + F_3x^5 + F_4x^6 + \cdots\} \\ &+ \{F_2x^3 + F_3x^4 + F_4x^5 + F_5x^6 + \cdots\} \end{aligned}$$

الآن لاحظ أن المتسلسلة بـين المجموعـة الأولى مـن الأقـواس تسـاوي تقريبـاً الدالة المولدة $F(x)$ التي بدأنا بها ، بشكل أكثر دقة ، إنهـا تسـاوي $x^2F(x)$. نفـس الشيء ، المتسلسلة بين المجموعة الثانية مـن الأقـواس تسـاوي $x\,F(x)$ فيمـا عـدا أنهـا تفتقد إلى الحد الابتدائي F_1x^2 . بمعنى آخر ،

$$F(x) = F_1x + F_2x^2 + \{F_1x^3 + F_2x^4 + \dots\} + \{F_2x^3 + F_3x^4 + \dots\}$$
$$= F_1x + F_2x^2 + x^2\underbrace{\{F_1x + F_2x^2 + \dots\}}_{\text{equals } F(x)} + x\underbrace{\{F_2x^2 + F_3x^3 + \dots\}}_{\text{equals } F(x) - F_1x}$$

إذا استخدمنا القيمتين $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ، فهذا يعطينا الصيغة :

$$F(x) = x + x^2 + x^2F(x) + x(F(x) - x)$$
$$= x + x^2F(x) + x\,F(x)$$

هذا يعطينا معادلة يمكن حلها في $F(x)$ لنستنتج الصيغة الجميلة التالية :

صيغة الدالة المولدة لمتتالية فيبوناتشي

$$x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \cdots = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

يمكننا استخدام صيغة الدالة المولـدة لمتتالية فيبوناتشـي مـع اسـتخدام طريقـة الكسـور الجزئيـة الـتي تعلمناهـا في التفاضـل والتكامـل لاشـتقاق صـيغة Binet لعـدد فيبوناتشي النوني (n^{th}) (نظرية 37.1). الخطـوة الأولى هـي اسـتخدام الصـيغة التربيعيـة لإيجاد جذور كثير الحدود $1 - x - x^2$. الجذور هي $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ، وهما العددان[١] :

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad , \qquad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

وعليه يمكن تحليل كثير الحدود كما يلي :

$$1 - x - x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$$

(١) لاحظ كيف أن النسبة الذهبية (الفصل 37) ظهرت فجأة! إن هذا لا يستدعي الدهشة، حيث إننا رأينا في الفصل السابع والثلاثون أن متتالية فيبوناتشي والنسبة الذهبية بينهما علاقة وثيقة.

فكرة الكسور الجزئية هي أخذ الدالة $\frac{x}{1-x-x^2}$ وكتابتها على شكل مجموع كسرين:

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{A}{1-\alpha x}+\frac{B}{1-\beta x}$$

ونريد الآن إيجاد القيمة الصحيحة لكل من A , B. لعمل ذلك، نتخلص من المقام بضرب الطرفين بـ $1-x-x^2$ لنحصل على:

$$x=A(1-\beta x)+B(1-\alpha x)$$

[تذكر $(1-\beta x)(1-\alpha x)=1-x-x^2$]. بإعادة ترتيب حدود هذه المعادلة نحصل على:

$$x=(A+B)-(A\beta+B\alpha)x$$

نبحث الآن عن قيم A , B التي تجعل كثير الحدود x على الطرف الأيسر يساوي كثير الحدود على الطرف الأيمن، إذن يجب أن نختار A , B التي تحقق:

$$0=A+B$$
$$1=-A\beta-B\alpha$$

من السهل حل هاتين المعادلتين في المجهولين A , B (تذكر أن α , β عددان محددان). ونجد أن:

$$A=\frac{1}{\alpha-\beta} \quad , \quad B=\frac{1}{\beta-\alpha}$$

وحيث أن $\alpha=\left(1+\sqrt{5}\right)/2$ و $\beta=\left(1-\sqrt{5}\right)/2$ فإن:

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad , \quad B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

مما سبق فإن :

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\beta x}\right)$$

إذن :

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{1-x-x^2}dx &= \frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{1-\alpha x}-\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{1-\beta x}\\ &=\frac{-1}{\sqrt{5}\alpha}\log[1-\alpha x]+\frac{1}{\sqrt{5}\beta}\log[1-\beta x]+C\end{aligned}$$

على كل حال، موضوعنا ليس التفاضل والتكامل، بل هو نظرية الأعداد، لذلك لاحظ أن الكسرين الجزئيين يمكن التعبير عنهما باستخدام المتسلسلة الهندسية كما يلي :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\alpha x}&=1+\alpha x+(\alpha x)^2+(\alpha x)^3+(\alpha x)^4+\cdots\\ \frac{1}{1-\beta x}&=1+\beta x+(\beta x)^2+(\beta x)^3+(\beta x)^4+\cdots\end{aligned}$$

وهذا يمكننا من كتابة الدالة $x/(1-x-x^2)$ كمتسلسلة قوى :

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x-x^2}&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\beta x}\right)\\ &=\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}}x+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{5}}x^2+\frac{\alpha^3-\beta^3}{\sqrt{5}}x^3+\cdots\end{aligned}$$

ولكننا نعلم أن $x/(1-x-x^2)$ هي الدالة المولدة لمتتالية فيبوناتشي،

$$\frac{x}{1-x-x^2}=F_1x+F_2x^2+F_3x^3+F_4x^4+F_5x^5+F_6x^6+\cdots$$

بمقارنة المتسلسلتين للدالة $\left(1-x-x^2\right)$ نجد أن:

$$F_1=\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}} \quad , \quad F_2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{5}} \quad , \quad F_3=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\sqrt{5}} \quad , \cdots$$

صيغة Binet

$$\boxed{F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}}$$

بتعويض قيمتي α , β ، نحصل مرة أخرى على صيغة Binet (نظرية ٣٧,١) لعدد فيبوناتشي النوني $\left(n^{th}\right)$.

العددان الظاهران في صيغة Binet يساويان تقريباً:

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618034 \quad , \quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\approx -0.618034$$

لاحظ أن $|\beta|<1$ ؛ لذلك إذا رفعنا β لقوة كبيرة، فإنه يصبح صغيراً جدًّا. بشكل خاص:

$F_n=$ أقرب عدد صحيح لـ $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ ويساوي تقريباً:

$$(0.447213\cdots)\times(1.61803\cdots)^n$$

فمثلاً،

$$F_{10}\approx 55.003636\cdots \quad , \quad F_{25}=75024.999997334\cdots$$

والتي في الحقيقة قريبة جدًّا جدًّا للقيم الصحيحة:

$F_{25}=75025 \quad , \quad F_{10}=55$.

تماريـــــــن

(٤١,١) (a) أوجـد صـيغة بسـيطة للدالـة المولـدة $E(x)$ لمتتاليـة الأعـداد الزوجيـة $0,2,4,6,8,\ldots$.

(b) أوجـد صـيغة بسـيطة للدالـة المولـدة $J(x)$ لمتتاليـة الأعـداد الفرديـة $1,3,5,7,9,\ldots$.

(c) ماذا يساوي $E(x^2)+xJ(x^2)$ ؟ لماذا؟.

(٤١,٢) أوجد صيغة بسيطة للدالة المولدة للمتتالية :

$$a\ ,\ a+m\ ,\ a+2m\ ,\ a+3m\ ,\ a+4m\ ,\ldots$$

(إذا كان $0\le a\le m$ ، فإن هذه متتالية الأعداد غير السالبة التي تطابق a قياس m).

(٤١,٣) (a) أوجد صيغة بسيطة للدالة المولـدة للمتتاليـة الـتي حـدها النـوني (n^{th}) هـو n^3 أي ، المتتالية $0,1,8,27,64,\ldots$.

(b) أعـد حـل (a) للدالـة المولـدة للمتتاليـة $0,1,16,81,256,\ldots$ (هـذه هـي المتتالية التي حدها النوني (n^{th}) هو n^4).

(c) إذا أمكنـك إسـتخدام كمبيـوتر يوجـد المشـتقة أو إذا كنـت مـن الـذين يستمتعون بإنجاز الحسابات الطويلة باستخدام الورقة والقلم ، أوجـد الدالـة المولدة للمتتالية التي حدها النوني (n^{th}) هو n^5.

(d) أعد حل (c) للمتتالية التي حدها النوني (n^{th}) هو n^6.

(٤١,٤) لـيكن $G(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots$ هـي الدالـة المولـدة للمتتاليـة $1,1,1,\ldots$.

(a) احسب أول خمسة عوامل لمتسلسلة القوى $G(x)^2$.

(b) برهن أن متسلسلة القوى $G(x)^2 - G(x)$ تساوي متسلسلة قوى أخرى درسناها في هذا الفصل.

(٤١,٥) لتكن $\mathrm{T}(x) = x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + \cdots$ الدالة المولدة لمتتالية الأعداد المثلثية $0,1,3,6,10,\ldots$. أوجد صيغة بسيطة لـ $\mathrm{T}(x)$.

(٤١,٦) هذا السؤال يبحث في الدوال المولدة لبعض المتتاليات التي حدودها معاملات ثنائية (انظر الفصل 36).

(a) أوجد صيغة بسيطة للدالة المولدة للمتتالية التي حدها النوني (n^{th}) هو $\binom{n}{1}$.

(b) نفس السؤال للمتتالية التي حدها النوني (n^{th}) هو $\binom{n}{2}$.

(c) نفس السؤال للمتتالية التي حدها النوني (n^{th}) هو $\binom{n}{3}$.

(d) لعدد ثابت k ، اعمل تخميناً يعطي صيغة بسيطة لدالة مولدة للمتتالية التي حدها النوني (n^{th}) هو $\binom{n}{k}$.

(e) برهن أن تخمينك في (d) صحيح.

(٤١,٧) ليكن $k \geq 0$ عدداً صحيحاً وليكن $D_k(x)$ الدالة المولدة للمتتالية $0^k, 1^k, 2^k, 3^k, 4^k, \ldots$. خلال هذا الفصل قمنا بحساب :

$$D_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad , \quad D_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \quad , \quad D_2(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

وفي تمرين 41.3 قمت بحساب أمثلة إضافية. هذه الحسابات تشير إلى أن $D_k(x)$ هو على الشكل

$$D_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$$

لكثير حدود $P_k(x)$.

(a) برهن أنه يوجد كثير حدود $P_k(x)$ بحيث $P_k(x)$ يكون على الشكل $P_k(x)/(1-x)^{k+1}$.

(مساعدة: استخدم الاستقراء على k).

(b) اعمل قائمة بقيم $P_k(0),\ k=0,1,2,\ldots$ واعمل تخميناً. برهن أن تخمينك صحيح.

(c) نفس السؤال (b) للقيم $P_k(1)$.

(d) أعد حل (b) و (c) لقيم المشتقة $P_k{}'(0)$, $P_k{}'(1)$.

(e) ما هي الأنماط الأخرى التي يمكن أن تجدها في كثيرات الحدود $P_k(x)$؟

(٤١,٨) ليكن ϕ هي دالة فاي لأويلر (انظر الفصل الحادي عشر)، وليكن p عدداً أوليًّا. أوجد صيغة بسيطة للدالة المولدة للمتتالية $\phi(1), \phi(p), \phi(p^2), \phi(p^3), \ldots$.

(٤١,٩) "متتالية لوكاس" (Lucas Sequence) هي دالة متتالية الأعداد L_n التي تُعطى بالقاعدة:

$$L_1=1 \quad , \quad L_2=3 \quad , \quad L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$$

(a) اكتب أول عشرة حدود من متتالية "لوكاس".

(b) أوجد صيغة بسيطة للدالة المولدة لمتتالية "لوكاس".

(c) استخدم طريقة الكسر الجزئي لإيجاد صيغة بسيطة لـ L_n، بنفس طريقة صيغة Binet لعدد فيبوناتشي F_n.

(٤١,١٠) اكتب الحدود القليلة الأولى للمتتاليات التالية المعرفة على شكل صيغة إرجاعية، ثم أوجد صيغة بسيطة للدالة المولدة.

$$(a)\ a_1 = 1\ ,\ a_2 = 2\ ,\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$
$$(b)\ b_1 = 1\ ,\ b_2 = 3\ ,\ b_n = 2b_{n-1} - 2b_{n-2}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$
$$(c)\ c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1, c_n = 4c_{n-1} + 11c_{n-2} - 30c_{n-3}\ , n = 4, 5, 6, \ldots$$

(٤١,١١) استخدم الدوال المولدة وطريقة الكسر الجزئي لإيجاد صيغة بسيطة للحد النوني (n^{th}) تشبه الصيغة التي أوجدناها في هذا الفصل للحد النوني (n^{th}) لمتتالية فيبوناتشي لكل من المتتاليات التالية. (لاحظ أن هذه هي نفس المتتاليات الواردة في التمرين السابق). تأكد من إجابتك من خلال فحص القيم القليلة الأولى لـ n.

$$(a)\ a_1 = 1\ ,\ a_2 = 2\ ,\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$
$$(b)\ b_1 = 1\ ,\ b_2 = 3\ ,\ b_n = 2b_{n-1} - 2b_{n-2}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$

(مساعدة: قد تحتاج إلى استخدام الأعداد المركبة!)

$$(c)\ c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1, c_n = 4c_{n-1} + 11c_{n-2} - 30c_{n-3}\ , n = 4, 5, 6, \ldots$$

(٤١,١٢) (a) ثبّت عدداً صحيحاً $k \ge 0$، وليكن $H(x)$ الدالة المولدة للمتتالية التي حدها النوني (n^{th}) هو $h_n = n^k$. استخدم اختبار النسبة لإيجاد فترة التقارب للدالة المولدة $H(x)$.

(b) استخدم اختبار النسبة لإيجاد فترة التقارب للدالة المولدة $F(x)$ لمتتالية فيبوناتشي $0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$.

(٤١,١٣) المتتاليات $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ هي أيضاً تكون أحياناً رزمة في دالة مولدة أسية (*exponential generating function*).

$$a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + a_4\frac{x^4}{4!} + a_5\frac{x^5}{5!} + \cdots$$

(a) ما هي الدالة المولدة الأسية للمتتالية $1, 1, 1, 1, \ldots$؟

(مسـاعدة : إجابتـك تشـرح لمـاذا اُسـتخدمت كلمـة أسـية (exponential) في تسمية هذا النوع من الدوال المولدة).

(b) ما هي الدالة المولدة الأسية لمتتالية الأعداد الطبيعية $0,1,2,3,\ldots$.

(٤١٫١٤) ليكن $f(x)$ دالة مولدة أسية لمتتالية فيبوناتشي.

$$f(x)=F_0+F_1\frac{x}{1!}+F_2\frac{x^2}{2!}+F_3\frac{x^3}{3!}+F_4\frac{x^4}{4!}+F_5\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

(a) أوجـد علاقـة بسـيطة متحققـة بـين $f(x)$ ومشـتقاتها $f'(x)$, $f''(x)$.

(b) أوجد صيغة بسيطة لـ $f(x)$.

(٤١٫١٥) ثبِّـت عـدداً صـحيحاً N وأنشـئ متتاليـة مـن الأعـداد $a_0,a_1,a_2,\ldots$ بالأسلوب التالي :

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1^0+2^0+3^0+\cdot+N^0\\
a_1 &= 1^1+2^1+3^1+\cdot+N^1\\
a_2 &= 1^2+2^2+3^2+\cdot+N^2\\
a_3 &= 1^3+2^3+3^3+\cdot+N^3\\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

احسب الدالة المولدة الأسية لهذه المتتالية. (سوف ندرس مجموع هـذه القـوى بشكل أعمق في الفصل الثاني والأربعون).

حَل المتتالية الواردة في بداية هذا الفصل:

الحدود الأربعة التالية للمتتالية :

$23,27,28,32,36,37,38,39,41,43,47,49,50,51,52,53,56,58,61,62,77,78$

هـي $96,98,99,00$ ، كمـا هـو واضـح للـذين يعرفـون أن أمريكيـي ولايـة نيويورك فازوا بالمتسلسلات العالمية في السنوات.

1923,1927,1928,…,1977,1978,1996,1998,1999, 2000

الآخرون قد يفضلون إكمال المتتالية القصيرة …,03,12,15,16,18 .

(مساعدة : هناك انقطاع في التسلسل مقداره 86 سنة قبل المُدْخل الأخير).