الكسور المستمرة، الجذور التربيعية، ومعادلة بَلْ

Continued Fractions, Square Roots, and Pell's Equation

الكسر المستمر للعدد $\sqrt{2}$ ،

$$[1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,\dots]$$

هو كسر تكراري. دعنا نرى فيما إذا كنا نستطيع إثبات أن الكسر المستمر للعدد $\sqrt{2}$ يحوي العدد 1 متبوعاً تماماً بالأعداد 2.

حيث إن $\sqrt{2}=1,414\cdots$ ، فإن الخطوة الأولى في خوارزمية الكسر المستمر هي كتابة:

$$\sqrt{2}=1+\left(\sqrt{2}-1\right)=1+\frac{1}{1/\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

ثم ننطق المقام:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

بتعويض هذه القيمة في المعادلة السابقة ينتج أن :

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

العدد $\sqrt{2}+1$ يقع بين 2 , 3 لذلك سنكتبه على الشكل :

$$\sqrt{2}+1=2+\left(\sqrt{2}-1\right)=2+\frac{1}{1/\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

ولكننا رأينا أن $1/\left(\sqrt{2}-1\right)$ يساوي $\sqrt{2}+1$ لذلك نجد أن :

$$\sqrt{2}+1=2+\frac{1}{\sqrt{2}+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

وعليه فإن :

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

الآن يمكننا استخدام الصيغة $(*)$ مرة أخرى لنحصل على :

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}$$

وباستخدامها مرة أخرى نحصل على :

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}}$$

بالاستمرار في توظيف الصيغة (*) ، نجد أن الكسر المستمر للعدد $\sqrt{2}$ يضم العدد 1 الوحيد متبوعاً تماماً بالأعداد 2 .

نجاحنا مع العدد $\sqrt{2}$ يدفعنا لطرح السؤال التالي ، هل نستطيع إيجاد أعداد أخرى كسورها المستمرة تكون تكرارية بنفس الأسلوب (أو ، باستخدام المصطلحات الرياضية ، أي الكسور المستمرة هي كسور دورية *periodic*)؟

إذا قمت بحل تمرين 39.10 الذي طلب منك أن تحسب الكسر المستمر للعدد $\sqrt{D}$ للقيم $D = 2, 3, 4, \cdots, 20$ ، فقد أوجدت بعض الأمثلة. بجمع بيانات أكثر من هذا النوع ، يعرض الجدول 40.1 قائمة بالكسور المستمرة للعدد $\sqrt{p}$ لجميع الأعداد الأولية p الأقل من 40 .

دعنا نعود إلى السؤال السابق ونسأل: متى تكون الكسور المستمرة تكرارية؟ لنبدأ بمثال بسيط. لنفرض أن الكسر المستمر للعدد A هو :

$$A = [a, b, b, b, b, b, b, \ldots]$$

جدول 40.1 يضم عدة أعداد من هذا النوع. مثل $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{37}$. يمكننا كتابة A على الشكل:

$$A = a + \frac{1}{[b, b, b, b, \ldots]}$$

إذن فعليًّا نحن نحتاج لتحديد قيمة الكسر المستمر :

$$B = [b, b, b, b, b, b, b, \ldots]$$

الجدول رقم (١,٤٠). الكسور المستمرة لكسور تربيعية.

D	الكسر المستمر للعدد $\sqrt{D}$	الدورة
2	$[1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,\ldots]$	1
3	$[1,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,\ldots]$	2
5	$[2,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,\ldots]$	1
7	$[2,1,1,1,4,1,1,1,4,1,1,1,4,1,1,1,4,1,1,1,4,1,\ldots]$	4
11	$[3,3,6,3,6,3,6,3,6,3,6,3,6,3,6,3,6,3,6,\ldots]$	2
13	$[3,1,1,1,1,6,1,1,1,1,6,1,1,1,1,6,1,1,\ldots]$	5
17	$[4,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,\ldots]$	1
19	$[4,2,1,3,1,2,8,2,1,3,1,2,8,2,1,3,1,2,8,\ldots]$	6
23	$[4,1,3,1,8,1,3,1,8,1,3,1,8,1,\ldots]$	4
29	$[5,2,1,1,2,10,2,1,1,2,10,2,1,1,2,10,2,1,1,\ldots]$	5
31	$[5,1,1,3,5,3,1,1,10,1,1,3,5,3,1,1,10,1,1,\ldots]$	8
37	$[6,12,12,12,12,12,12,12,12,12,12,12,12,12,\ldots]$	1

تماماً كما فعلنا مع A ، يمكننا سحب المُدْخَل الأول للعدد B ومن ثم نكتب B على الشكل:

$$B = b + \frac{1}{[b,b,b,b,b,\ldots]}$$

لكن المقام هو العدد B نفسه، إذن:

$$B = b + \frac{1}{B}$$

بضرب طرفي المعادلة بالعدد B نحصل على $B^2 = bB + 1$ وباستخدام القانون العام نجد أن:

$$B = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{2}$$

(لاحظ أننا استخدمنا الإشارة الموجبة لأننا نريد أن يكون B موجباً). والآن نحسب قيمة A ،

$$\begin{aligned} A = a + \frac{1}{B} &= a + \frac{2}{b + \sqrt{b^2 + 4}} \\ &= a + \frac{2}{b + \sqrt{b^2 + 4}} \cdot \left(\frac{b - \sqrt{b^2 + 4}}{b - \sqrt{b^2 + 4}} \right) \\ &= a - \frac{b - \sqrt{b^2 + 4}}{2} \\ &= \frac{2a - b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

سنلخص حساباتنا بحالتين لهما أهمية خاصة جدًّا.

نتيجة (١, ٤٠)

لأي عددين صحيحين موجبين b ,a ، فلدينا صيغة الكسر المستمر التالية:

$$\frac{2a - b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + 4}}{2} = [a, b, b, b, b, b, b, b, \ldots]$$

بأخذ $a = b$ كحالة خاصة نحصل على الصيغة:

$$\frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{2} = [b, b, b, b, b, b, b, \ldots]$$

وبأخذ $b = 2a$ *نحصل على الصيغة*

$$\sqrt{a^2+1} = [a, 2a, 2a, 2a, 2a, 2a, 2a, 2a, \ldots]$$

ماذا يحدث لو أن لدينا كسراً مستمراً تكراريًّا بأسلوب أكثر تعقيداً؟ لنعطي مثالاً. افرض أن A له الكسر المستمر التالي :

$$A = [1, 2, 3, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, \ldots]$$

حيث الحدود اللاحقة تستمر بالتبديل بين 4 و 5 . أول شيء يجب عمله هو أن ندفع خارجاً الجزء غير التكراري ،

$$A = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{[4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, \ldots]}}}$$

لذلك فنحن نحتاج الآن لمعرفة قيمة الكسر المستمر "الدوري تماماً" (*Purely Periodic*) :

$$B = [4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, \ldots]$$

(يسمى الكسر المستمر "دوريًّا تماماً" (Purely Periodic) إذا بدأ تكراري من البداية). يمكننا كتابة B على الشكل :

$$B = 4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{[4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, \ldots]}}$$

كما رأينا في مثالنا السابق ، فقد عرفنا أن أدنى مقام يساوي B ، إذن فقد بينا أن :

$$B = 4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{B}}$$

الآن سنقوم بتبسيط هذا الكسر المعقد لنحصل على معادلة في B ،

$$\begin{aligned} B &= 4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{B}} = 4 + \cfrac{1}{\cfrac{5B+1}{B}} \\ &= 4 + \frac{B}{5B+1} \\ &= \frac{21B+4}{5B+1} \end{aligned}$$

بضرب الطرفين بالوسطين، وبنقل جميع الحدود على طرف واحد، نحصل على المعادلة:

$$5B^2 - 20B - 4 = 0$$

وباستخدام الصيغة التربيعية العامة نحصل على:

$$\begin{aligned} B &= \frac{20 + \sqrt{400+80}}{10} \\ &= \frac{10 + 2\sqrt{30}}{5} \end{aligned}$$

بعد ذلك نجد قيمة A بتعويض قيمة B في صيغتنا السابقة وباستخدام بعض العمليات الجبرية.

$$A=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{B}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{10+2\sqrt{30}}{5}}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{10+2\sqrt{30}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{35+6\sqrt{30}}{10+2\sqrt{30}}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{10+2\sqrt{30}}{35+6\sqrt{30}}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{80+14\sqrt{30}}{35+6\sqrt{30}}}$$

$$=1+\frac{35+6\sqrt{30}}{80+14\sqrt{30}}=\frac{115+20\sqrt{30}}{80+14\sqrt{30}}$$

أخيراً، ننطق مقام A بضرب البسط والمقام بالمقدار $80-14\sqrt{30}$ ،

$$A=\frac{115+20\sqrt{30}}{80+14\sqrt{30}}\cdot\left(\frac{80-14\sqrt{30}}{80-14\sqrt{30}}\right)$$

$$=\frac{800-10\sqrt{30}}{520}=\frac{80-\sqrt{30}}{52}$$

إذا قمت بحل تمرين 39.9 ، فحاول إدخال القيمة التالية إلى برنامجك :

$$\frac{80-\sqrt{30}}{52}=1.433130277402852670489\cdots$$

وتأكد من أنك حصلت في الحقيقة على الكسر المستمر $[1,2,3,4,5,4,5,4,5,\ldots]$.

يسمى الكسر المستمر "دوريًّا" (*Periodic*) إذا كان على الشكل :

$$[\underbrace{a_1,a_2,\dots,a_\ell}_{\text{initial part}},\underbrace{b_1,b_2,\dots,b_m}_{\text{periodic part}},\underbrace{b_1,b_2,\dots,b_m}_{\text{periodic part}},\underbrace{b_1,b_2,\dots,b_m}_{\text{periodic part}},\dots\ ]$$

بمعنى آخر، يكون دوريًّا إذا ضم بعد بعض الحدود الابتدائية متتالية منتهية من الحدود تتكرر مرة بعد مرة. عدد الحدود التي تكرر m يسمى "الدورة" (Period). فمثلاً، $\sqrt{2}=[1,2,2,2,\dots]$ دورته 1 $\sqrt{23}=[4,1,3,1,8,1,3,1,8,\dots]$ دورته 4. أمثلة أخرى معطاة في الجدول 40.1 . في الكسور التكرارية، نضع شريطاً صغيراً "ـ" فوق الجزء المكرر للإشارة إلى أن هذا الجزء يتكرر بشكل لا نهائي، مثلاً:

$$\sqrt{2}=\left[1,\overline{2}\right],\quad \sqrt{23}=\left[4,\overline{1,3,1,8}\right],\quad \frac{80-\sqrt{30}}{52}=\left[1,2,3,\overline{4,5}\right]$$

بنفس الأسلوب، الكسر المستمر الدوري العام يكتب على الشكل:

$$\left[a_1,a_2\dots,a_\ell,\overline{b_1,b_2,\dots,b_m}\right]$$

الأمثلة التي رأيناها تشير إلى أن النظرية التالية قد تكون صحيحة. سنبرهن الجزء الأول ونترك الجزء الثاني كتمرين (تحدي).

نظرية (٤٠,٢). (نظرية الكسر المستمر الدوري)

(a) افرض أن العدد A له كسر مستمر دوري

$$A=\left[a_1,a_2\dots,a_\ell,\overline{b_1,b_2,\dots,b_m}\right]$$

عندئذ فإن A يساوي عدداً على الشكل $A=\dfrac{r+s\sqrt{D}}{t}$، حيث *r,s,t,D أعداد صحيحة و $D>0$.*

(b) ليكن r,s,t,D أعداداً صحيحة و $D>0$، فإن العدد:

$$\frac{r+s\sqrt{D}}{t}$$

له كسر مستمر دوري.

البرهان

(a) لنبدأ بالكسر المستمر الدوري تماماً :

$$B=\left[\overline{b_1,b_2,\ldots,b_m}\right]$$

إذا قمنا بكتابة أول m خطوة ، فسنجد أن :

$$B=b_1+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{b_m+\cfrac{1}{\left[\overline{b_1,b_2,\ldots,b_m}\right]}}}}=b_1+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{b_m+\cfrac{1}{B}}}}$$

نبسط الآن الطرف أيمن من خلال تكرار عملية تجميع الحدود وقلب الكسور ، حيث إننا نتعامل مع B كمتغير ومع القيم $b_1,\ldots,b_m$ كأعداد.

بعد الكثير من الجبر تصبح معادلتنا على الشكل :

$$B=\frac{uB+v}{wB+z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (*)$$

حيث u,v,w,z أعداد صحيحة تعتمد قيمها على القيم $b_1,b_2,\ldots,b_m$. كما أنه من الواضح أن الأعداد u,v,w,z جميعها موجبة ؛ لأن القيم $b_1,b_2,\ldots,b_m$ موجبة.

لتوضيح هذا الإجراء ، سوف ننجز الحالة $m=2$.

$$b_1+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{B}}=b_1+\cfrac{1}{\cfrac{b_2B+1}{B}}=b_1+\frac{B}{b_2B+1}$$
$$=\frac{(b_1b_2+1)B+b_1}{b_2B+1}$$

بالعودة إلى الحالة العامة ، نضرب طرفي المعادلة (*) في وسطيها ونجعل جميع الحدود في طرف واحد ، نحصل على المعادلة

$$w\,B^2+(z-u)B-v=0$$

نحصل من الصيغة التربيعية العامة على :

$$B=\frac{-(z-u)+\sqrt{(z-u)^2+4v\,w}}{2w}$$

إذن B على الشكل :

$B=\dfrac{i+j\sqrt{D}}{k}$ ، حيث i,j,k,D أعداد صحيحة و $D>0$.

بالعودة إلى عددنا الأصلي $A=\left[a_1,a_2,\ldots,a_\ell,\overline{b_1,b_2,\ldots,b_m}\right]$ ، يمكننا كتابة A على الشكل :

$$A=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_\ell+\cfrac{1}{B}}}}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_\ell+\cfrac{1}{\cfrac{i+j\sqrt{D}}{k}}}}}$$

مرة أخرى، بتكرار القلب والتجميع والتبسيط ، يمكننا كتابة A على الشكل :

$A=\dfrac{e+f\sqrt{D}}{g+h\sqrt{D}}$ ، حيث $e,f\,,g\,,h$ أعداد صحيحة.

أخيراً، نضرب كل من البسط والمقام بالمقدار $g-h\sqrt{D}$. بذلك ننطق المقام ونعبر عن A كعدد على الشكل $A=\dfrac{r+s\sqrt{D}}{t}$ ، حيث r,s,t أعداد صحيحة.

بذلك نكون قد أكملنا برهان الجزء (a) من نظرية 40.2 نظرية الكسر المستمر الدوري. برهان الجزء (b) يترك لك كتمرين (تحدي) تمرين 40.10.

الكسر المستمر للعدد $\sqrt{D}$ ومعادلة بَلْ

الأعداد المتقاربة لكسر مستمر شكلت قائمة من أعداد نسبية تصبح أقرب فأقرب للعدد الأصلي. على سبيل المثال، العدد $\sqrt{71}$ له الكسر المستمر:

$$\sqrt{71}=\left[8,\ \overline{2,2,1,7,1,2,2,16}\ \right]$$

وأعداد المتقاربة القليلة الأولى هي:

$$\frac{17}{2},\frac{42}{5},\frac{59}{7},\frac{455}{54},\frac{514}{61},\frac{1483}{176},\frac{3480}{413},\frac{57163}{6784},\frac{117806}{13981},\frac{292775}{34746}$$

إذا كان p/q متقارباً للعدد $\sqrt{D}$ ، فإن:

$$\frac{p}{q}\approx\sqrt{D}\ \text{، إذن}\ \ \frac{p^2}{q^2}\approx\sqrt{D}$$

الجدول رقم (٤٠,٢). المتقاربات p/q للعدد $\sqrt{71}$.

p	q	p^2-71q^2
17	2	5
42	5	−11
59	7	2
455	54	−11
514	61	5
1483	176	−7
3480	413	1
57163	6784	−7
117806	13981	5
292775	34746	−11

بالضرب في q^2 ، نتوقع أن يكون p^2 قريباً جدًّا من Dq^2. جدول 40.2 يُدرج قيم الفرق p^2-Dq^2 للأعداد المتقاربة القليلة الأولى للعدد $\sqrt{71}$.

من بين العديد من الميزات التي تُميز البيانات في جدول 40.2 ، نجد ظهور العدد 1 في العمود الأخير. وهو يظهر في الصف السابع ويعكس الحقيقة التالية:

$$3480^2-71\cdot 413^2=1$$

لذلك؛ فالمتقارب 3480/413 للعدد $\sqrt{71}$ يعطي الحل (3480,413) لمعادلة بَلْ:

$$x^2-71y^2=1$$

إن هذا يشير إلى صلة بين المتقاربات للعدد $\sqrt{D}$ ومعادلة بَلْ $x^2 - 71y^2 = 1$.

في الفصلين الثلاثون والثاني والثلاثون برهنا أن معادلة بَلْ :

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

دائماً لها حل. لكن إذا نظرت للوراء في الفصل الثاني والثلاثون، سترى أن برهاننا لم يزودنا بطريقة فعَّالة لإيجاد حل. لذلك فمن المفيد جدًّا إذا أمكن استخدام متقاربات $\sqrt{D}$ لنحسب بطريقة فاعلة حل لمعادلة بَلْ.

الكسر المستمر للعدد $\sqrt{71}$:

$$\sqrt{71} = \left[\overline{8, 2, 2, 1, 7, 1, 2, 2, 16}\right]$$

دورته 8 ، والمتقارب الذي يعطي حلاً لمعادلة بَلْ هو :

$$[8, 2, 2, 1, 7, 1, 2, 2] = \frac{3480}{413}$$

فحص بسيط لجدول 40.1 يبين أن الكسور المستمرة للجذور التربيعية $\sqrt{D}$ فيه الكثير من الميزات الخاصة[١] . هنا بعض الأمثلة الإضافية لكسور مستمرة دوراتها كبيرة إلى حد ما.

$$\sqrt{73} = \left[8, \overline{1, 1, 5, 5, 1, 1, 16}\right] \qquad \text{دورته} = 7$$

$$\sqrt{89} = \left[9, \overline{2, 3, 3, 2, 18}\right] \qquad \text{دورته} = 5$$

$$\sqrt{97} = \left[9, \overline{1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18}\right] \qquad \text{دورته} = 11$$

---

(١) تمرين 40.9 يصف خصائص خاصة ومتنوعة للكسر المستمر للعدد $\sqrt{D}$ ، لكن قبل أن تنظر إلى ذلك التمرين، يجب أن تحاول اكتشاف بعض هذه الخصائص بنفسك.

بالنسبة للعدد $D = 71$ ، المتقارب الذي حل معادلة بَلْ كان المتقارب الذي حصلنا عليه بإزالة ما فوقه خط وإسقاط آخر مُدْخل. لنحاول عمل نفس الشيء للأعداد $D = 73$, $D = 89$, $D = 97$. النتائج مبينة في الجدول 40.3.

الجدول رقم (٤٠,٣). متقاربات للعدد $\sqrt{D}$ ومعادلة بَلْ.

$\sqrt{D}$	$[a,b_1,b_2,\ldots,b_{m-1}]=\frac{p}{q}$	p^2-Dq^2
$\sqrt{71}$	$[8,2,2,1,7,1,2,2]=\frac{3480}{413}$	$3480^2-71\cdot 413^2=1$
$\sqrt{73}$	$[8,1,1,5,5,1,1]=\frac{1068}{125}$	$1068^2-73\cdot 125^2=-1$
$\sqrt{79}$	$[8,1,7,1]=\frac{80}{9}$	$80^2-79\cdot 9^2=1$
$\sqrt{97}$	$[9,1,5,1,1,1,1,1,1,5,1]=\frac{5604}{569}$	$5604^2-97\cdot 569^2=-1$

إن هذا يَعِد بالكثير. صحيح أننا لم نحصل على حلول لمعادلة بَلْ في جميع الحالات، لكننا إما أن نحصل على حل لمعادلة بَلْ $p^2-Dq^2=1$ وإما حل للمعادلة المشابهة $p^2-Dq^2=-1$. علاوة على ذلك، حصلنا على إشارة موجبة عندما تكون دورة $\sqrt{D}$ زوجية، وعلى إشارة سالبة عندما تكون دورة $\sqrt{D}$ فردية. سنوجز ملاحظتنا في النظرية الرائعة التالية.

نظرية (٤٠,٣)

ليكن D عدداً صحيحاً موجباً ليس مربعاً كاملاً. اكتب الكسر المستمر للعدد $\sqrt{D}$ على الشكل

$$\frac{p}{q}=[a,b_1,b_2,\ldots,b_{m-1}] \quad \text{وليكن} \quad \sqrt{D}=\left[a,\overline{b_1,b_2,\ldots,b_{m-1},b_m}\right]$$

عندئذ فإن (p,q) هو أصغر حل في الأعداد الصحيحة للمعادلة.

$$p^2-Dq^2=(-1)^m$$

لن نعطي البرهان على نظرية (٤٠,٣)، لأننا بذلك سننهي نقاشنا عن الكسور المستمرة ونتحول لمناقشة مواضيع أخرى. إذا كنت مهتمًّا بقراءة البرهان، فستجده في الفصل 4 من كتاب "الحساب الأعلى" (The Higher Arithmetic) لمؤلفه "Davenport" وفي الكثير من كتب نظرية الأعداد الأخرى. وبدلاً من إعطاء برهان سوف نختم بملاحظة ومثال.

ملاحظتنا تقوم على مسألة حل $x^2-Dy^2=1$ عندما تتحقق شروط نظرية 40.3 لإعطاء حل للمعادلة $x^2-Dy^2=-1$. بكلمات أخرى، ماذا يمكننا أن نعمل عندما $\sqrt{D}=\left[a,\overline{b_1,b_2,\ldots,b_{m-1},b_m}\right]$ و m فردي؟ لقد مر معنا الجواب خلال عملنا السابق. تَذَكَّر أن نظرية معادلة بَلْ 30.1 تقول إنه إذا كان (x,y) هو أصغر حل للمعادلة $x^2-Dy^2=1$ في مجموعة الأعداد الصحيحة، فإن أي حل آخر (x_k,y_k) يمكن حسابه من أصغر حل من خلال الصيغة

$$x_k+y_k\sqrt{D}=\left(x_1+y_1\sqrt{D}\right)^k \quad , \quad k=1,2,3,\ldots \qquad (*)$$

السبب وراء أن هذه الصيغة قابلة للتطبيق هو لأن:

$$\begin{aligned} x_k^2-D\,y_k^2 &= \left(x_k+y_k\sqrt{D}\right)\left(x_k-y_k\sqrt{D}\right) \\ &= \left(x_1+y_1\sqrt{D}\right)^k\left(x_1-y_1\sqrt{D}\right)^k \\ &= \left(x_1^2-D\,y_1^2\right)^k \end{aligned}$$

لأن $x_1^2 - Dy_1^2 = 1$ $\qquad =1$

بدلاً من ذلك افرض أن (x_1, y_1) هو حل للمعادلة $x^2 - Dy^2 = -1$ ونريد حساب (x_k, y_k) باستخدام الصيغة (*). عندئذ نحصل على :

$$x_k^2 - D\,y_k^2 = \left(x_1^2 - Dy_1^2\right)^k = (-1)^k$$

لذلك إذا كان k زوجيًّا، فإننا نحصل على حل لمعادلة بَلْ $x^2 - Dy^2 = 1$.

هل رأيت كيف أن هذا يحل مسألتنا؟ افرض أن m فردي في نظرية 40.3، إذن (p,q) يحقق المعادلة $p^2 - Dq^2 = -1$، ثم ببساطة نحسب التربيع :

$$\left(p + q\sqrt{D}\right)^2 = \left(p^2 + q^2 D\right) + 2pq\sqrt{D}$$

لإيجاد الحل المطلوب $\left(p^2 + q^2 D, 2pq\right)$ للمعادلة $x^2 - Dy^2 = 1$. يعطينا هذا في النهاية طريقة فعَّالة لحل معادلة بَلْ في جميع الحالات.

نظرية (٤٠,٤). (نظرية الكسور المستمرة ومعادلة بَلْ)

اكتب الكسر المستمر للعدد $\sqrt{D}$ على الشكل:

$$\sqrt{D} = \left[a, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}, b_m}\right] \quad \text{وليكن} \quad \frac{p}{q} = [a, b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}]$$

عندئذ فإن أصغر حل في الأعداد الصحيحة لمعادلة بَلْ $x^2 - Dy^2 = 1$ يُعطى من خلال :

$$(x_1, y_1) = \begin{cases} (p, q) & , \ if \ \ m \ \ is\, even \\ \\ \left(p^2 + q^2 D, 2pq\right) & , \ if \ \ m \ \ is\, odd \end{cases}$$

جميع الحلول الأخرى تُعطى من خلال الصيغة

$$x_k + y_k\sqrt{D} = \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^k \quad , \quad k = 1,2,3,\ldots$$

سوف ننهي اكتشافنا لعالم الكسور المستمرة بحل معادلة بَلْ :

$$x^2 - 313y^2 = 1$$

الكسر المستمر للعدد $\sqrt{313}$ هو

$$\sqrt{313} = \left[17, \overline{1,2,4,11,1,1,3,2,2,3,1,1,11,4,2,1,34}\right]$$

باتباع الإجراء الموصوف في نظرية 40.4 ، سوف نرمي آخر عدد في الجزء المكرر ، وهو في هذه الحالة العدد 34 ، ونحسب الكسر :

$$\frac{126862368}{7170685} = [17,1,2,4,11,1,1,3,2,2,3,1,1,11,4,2,1]$$

الدورة m تساوي 17 ، إذن الزوج

$(p,q) = (126862368, 7170685)$ يُعطي حل :

$$126862368^2 - 313 \cdot 7170685^2 = -1$$

لإيجاد أصغر حل لمعادلة بَلْ ، فإن نظرية 40.4 تخبرنا أن نحسب :

$$p^2 + q^2D = 126862368^2 + 7170685^2 \cdot 313 = 32188120829134849$$
$$2pq = 2 \cdot 126862368.7170685 = 1819380158564160$$

لذلك فإن الحل الأصغر للمعادلة $x^2 - 313y^2 = 1$ هو(١)

---

(١) كما لاحظنا في الفصل الثلاثون ، الذي أوجد هذا الحل هو Brouncker عام 1657 ، الآن لك أن تتخيل كيف يمكن أن يستطيع شخص إيجاد حل كبير مثل هذا في زمن لا يوجد فيه كمبيوترات !

$$(x,y)=(32188120829134849,1819380158564160)$$

وإذا أردنا إيجاد الحل الأصغر التالي، فإننا ببساطة نُربع :

$$32188120829134849+1819380158564160\sqrt{313}$$

وإليك الإجابة :

$$(x,y)=(2072150245021969438104715652505601,117124856755987405647781716823680)$$

تمارين

(٤٠.١) أوجد قيمة كل من الكسور المستمرة الدورية التالية. ضع إجابتك على الشكل $\dfrac{r+s\sqrt{D}}{t}$ ، حيث r,s,t,D أعداد صحيحة، تماماً كما فعلنا في هذا الفصل عندما حسبنا قيمة $[1,2,3,\overline{4,5}]$ لتكون $\dfrac{80-\sqrt{30}}{52}$.

(a) $[\overline{1,2,3}]=[1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,3,\ldots]$

(b) $[1,1,\overline{2,3}]=[1,1,2,3,2,3,2,3,2,3,2,3,2,3,2,\ldots]$

(c) $[1,1,1,\overline{3,2}]=[1,1,1,3,2,3,2,3,2,3,2,3,2,\ldots]$

(d) $[3,\overline{2,1}]=[3,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,\ldots]$

(e) $[\overline{1,3,5}]=[1,3,5,1,3,5,1,3,5,1,3,5,1,3,5,\ldots]$

(f) $[1,2,\overline{1,3,4}]=[1,2,1,3,4,1,3,4,1,3,4,1,3,4,\ldots]$

(٤٠,٢) لكل عدد من الأعداد التالية ، أوجد كسره المستمر (الدوري). وما هي دورته؟

$(a)\ \frac{16-\sqrt{3}}{11} \qquad (b)\ \frac{1+\sqrt{293}}{2} \qquad (c)\ \frac{3+\sqrt{5}}{7} \qquad (d)\ \frac{1+2\sqrt{5}}{3}$

(٤٠,٣) خلال برهاننا لنظرية الكسر المستمر الدوري 40.2 ، بَسَّطنا الكسر المستمر $[b_1,b_2,B]$ وأوجدنا أنه يساوي $\frac{(b_1b_2+1)B+b_1}{b_2B+1}$.

(a) اعمل نفس الحسابات على $[b_1,b_2,b_3,B]$ واكتبه على الشكل :

$$[b_1,b_2,b_3,B]=\frac{uB+v}{wB+z}$$

حيث u,v,w,z معطاه بصيغ مكتوبة بدلالة b_3,b_2,b_1.

(b) أعد حل (a) للكسر $[b_1,b_2,b_3,b_4,B]$.

(c) أنظر إلى إجابتك في (a) و (b). هل صيغ u,v,w,z مألوفة بالنسبة لك؟

(مساعدة : قارنهم بالكسور $[b_1,b_2]$, $[b_1,b_2,b_3]$, $[b_1,b_2,b_3,b_4]$.

هذه متقاربات الكسر $[b_1,b_2,b_3,\ldots]$. انظر أيضاً للجدول 39.2).

(d) بشكل عام ، عندما يُبسَّط الكسر المستمر $[b_1,b_2,\ldots,b_m,B]$ ليكتب على الشكل :

$$[b_1,b_2,b_3,\ldots,b_m,B]=\frac{u_mB+u_m}{w_mB+z_m}$$

اشرح كيف أن الأعداد u_m,v_m,w_m,z_m يمكن وصفها بدلالة المتقاربات $[b_1,b_2,b_3,\ldots,b_{m-1}]$ و $[b_1,b_2,b_3,\ldots,b_m]$. برهن أن وصفك صحيح.

(٤٠,٤) نتيجة (٤٠,١) تصف العدد الذي كسره المستمر الممتد هو $\left[a,\overline{b}\right]$.

(a) اعمل نفس الحسابات لإيجاد العدد الذي كسره المستمر الممتد هو $\left[a,\overline{b,c}\right]$.

(b) إذا جعلت $b=c$ في صيغتك، هل تحصل على نفس النتيجة الواردة في نتيجة (٤٠,١)؟

(إذا كانت إجابتك "لا"، إذن فقد ارتكبت خطأ في (a)!).

(c) ما هي قيم a,b,c التي تجعل العدد في (a) على الشكل $\dfrac{s\sqrt{D}}{t}$ حيث s,t,D أعداد صحيحة؟

(d) ما هي قيم a,b,c التي تجعل العدد في (a) يساوي الجذر التربيعي $\sqrt{D}$ حيث D عدد صحيح؟

(٤٠,٥) تخبرنا نظرية 40.3 أنه إذا كانت دورة الكسر المستمر للعدد $\sqrt{D}$ فردية فإنه بإمكاننا إيجاد حل للمعادلة $x^2-Dy^2=-1$.

(a) من بين الأعداد $2\le D\le 20$ حيث D ليس مربعاً كاملاً، أي الأعداد $\sqrt{D}$ دورته فردية وأيها دورته زوجية. هل لاحظت أي نمط؟

(b) نفس السؤال بالنسبة للعدد $\sqrt{p}$ للأعداد الأولية $2\le p\le 40$ (انظر الجدول رقم ٤٠,١).

(c) اكتب عدداً لا نهائيًّا من الأعداد الصحيحة الموجبة D بحيث تكون دورة $\sqrt{D}$ فردية. لكل قيمة من قيم D، أعطِ حلاًّ للمعادلة $x^2-Dy^2=-1$. (مساعدة: انظر إلى نتيجة ٤٠,١).

(d) اكتب عدداً لا نهائيًّا من الأعداد الصحيحة الموجبة D بحيث تكون دورة $\sqrt{D}$ زوجية.

(مساعدة : استخدم حلك لتمرين (d) 40.4).

(٤٠,٦) اكتب برنامجاً يأخذ عدداً صحيحاً موجباً D كَمُدخل و يُعطي كَمُخرج قائمة من الأعداد $[a,b_1,\ldots,b_m]$ بحيث يكون الكسر المستمر الممتد للعدد $\sqrt{D}$ هو $\left[a,\overline{b_1,\ldots,b_m}\right]$. استخدم برنامجك لطباعة جدول للكسور المستمرة للعدد $\sqrt{D}$ لجميع الأعداد غير المربعة D الواقعة بين 2 , 50.

(b) عمم عملك في (a) بكتابة برنامج يأخذ أعداد صحيحة r,s,t,D كَمُدخلات، حيث $D>0$, $t>0$ ويُعطي كَمُخرج قائمة من الأعداد $[a_1,\ldots,a_\alpha,b_1,\ldots,b_m]$ بحيث $\frac{r+s\sqrt{D}}{t}=\left[a_1,\ldots,a_\alpha,\overline{b_1,\ldots,b_m}\right]$.

استخدم برنامجك لطباعة جدول للكسور المستمرة للعدد $\left(3+2\sqrt{D}\right)\big/5$ لجميع الأعداد غير المربعة D بين 2 و 50.

(٤٠,٧) (a) اكتب برنامجاً يأخذ قائمة $[b_1,\ldots,b_m]$ كَمُدخل ، ويُعطي كَمُخرج قيمة الكسر المستمر الدوري تماما $\left[\overline{b_1,b_2,\ldots,b_m}\right]$. يجب أن يكون المخُرج على الشكل (r,s,t,D) ، حيث قيمة الكسر المستمر هي $\left(r+s\sqrt{D}\right)\big/t$.

(b) استخدم برنامجك من (a) لحساب قيم كل كسر من الكسور المستمرة التالية :

$$\left[\overline{1}\right],\left[\overline{1,2}\right],\left[\overline{1,2,3}\right],\left[\overline{1,2,3,4}\right],\left[\overline{1,2,3,4,5}\right],\left[\overline{1,2,3,4,5,6}\right]$$

(c) وسع نطاق برنامجك في (a) ليتعامل مع الكسور المستمرة الدورية التي ليست دورية تماماً. بمعنى آخر، ليأخذ برنامجك قائمتين $[a_1,\ldots,a_\alpha]$, $[b_1,\ldots,b_m]$ كَمُدخل ، ويُعطي قيمة $\left[a_1,\ldots,a_\alpha,\overline{b_1,b_2,\ldots,b_m}\right]$ كمخرج.

(d) استخدم برنامجك من (c) لحساب قيم كل كسر من الكسور المستمرة التالية:

$$\left[6,5,4,3,2,\overline{1}\right] \quad , \quad \left[6,5,4,3,\overline{1,2}\right] \quad , \quad \left[6,5,4,\overline{1,2,3}\right],$$
$$\left[6,5,\overline{1,2,3,4}\right] \quad , \quad \left[6,\overline{1,2,3,4,5}\right].$$

(٤٠,٨) اكتب برنامجك لحل معادلة بَلْ $x^2 - Dy^2 = 1$ باستخدام طريقة الكسور المستمرة. إذا بيّن البرنامج أن هناك حلاً للمعادلة $x^2 - Dy^2 = -1$ ، فأوجد حل هذه المعادلة أيضاً.

(a) استخدم برنامجك لحل معادلة بَلْ لجميع القيم غير المربعة D الواقعة بين 2 و 20 ، اختبر صحة إجابتك بمقارنتها بجدول 30.1.

(b) استخدم برنامجك لتوسيع الجدول وذلك بحل معادلة بَلْ لجميع القيم غير المربعة D الواقعة بين 76 و 99.

(٤٠,٩) (سؤال صعب) ليكن D عدداً صحيحاً موجباً ليس مربعاً كاملاً.

(a) برهن أن الكسر المستمر للعدد $\sqrt{D}$ ليس دوريًّا.

(b) بشكل أدق، برهن أن الكسر المستمر للعدد $\sqrt{D}$ يبدو على الشكل:

$$\sqrt{D} = \left[a,\overline{b_1,b_2,\ldots,b_m}\right]$$

(c) برهن أن $b_m = 2a$.

(d) برهن أن قائمة الأعداد $b_1,b_2,\ldots,b_{m-1}$ متناظرة ، أي بمعنى، أنها من اليسار إلى اليمين نفسها من اليمين إلى اليسار.

(٤٠,١٠) (سؤال صعب) ليكن r,s,t,D أعداداً صحيحة ، حيث $D>0$, $t \neq 0$

وليكن $A=\frac{r+s\sqrt{D}}{t}$.

برهن أن الكسر المستمر للعدد A دوري. (هذا هو الجزء (b) من نظرية الكسر المستمر الدوري (٤٠,٢)).