الفصل التاسع والثلاثون

العالم المقلوب للكسور المستمرة

The Topsy-Turvy World of Continued Fractions

ذكر لويس كارول " Lewis Caroll " في روايته " أليس في بلاد العجائب " الحوار التالي :

قال الشاب : أبي ويليام ؛ أنت رجل كبير وشعرك أصبح شديد البياض ، وما زلت تقف على رأسك. هل تعتقد أن هذا فعل صحيح في عُمْرٍ مثل عمرك؟

رد الأب ويليام على ابنه قائلاً :

في شبابي خِفْتُ أن يؤثر هذا الفعل على دماغي ؛
لكني متأكدُ جدًّا الآن أنه ليس بي عِلة ،
ولذلك فأنا أعيد هذا الفعل مرات ومرات.

العدد المشهور π هو عدد عشري غير منتهي وغير دوري :

$$\pi = 3.14159265358979323846264 33\cdots$$

إذا كنا راغبين بالتضحية بالدقة من أجل الإيجاز ، فيمكننا القول :

" عدد صغير " $\pi = 3 +$

"العدد الصغير" هو عدد بين 0 , 1. سنتّبع مثال الأب ويليام ونجعل "العدد الصغير" يقف على رأسه. عندما يقف العدد الصغير $0.14159\cdots$ على رأسه ، يصبح المقلوب عدد أكبر من 1. أي :

$$\begin{aligned}
\pi &= 3 + 0.14159265358979323846264 33\cdots \\
&= 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0.14159265358979323846264 33\cdots}} \\
&= 3 + \frac{1}{7.0625133059310457697930051\cdots} \\
&= 3 + \frac{1}{7 + 0.0625133059310457697930051\cdots} \\
&= 3 + \frac{1}{7 + \text{" عدد صغير "}}
\end{aligned}$$

لاحظ أننا إذا أهملنا "العدد الصغير" في هذه المعادلة الأخيرة ، سنجد أن π يساوي تقريباً $3 + \frac{1}{7}$ ، أي يساوي تقريباً $\frac{22}{7}$. لقد تعلمت في المرحلة الثانوية أن $\frac{22}{7}$ هو تقريب ممتاز للعدد π.

دعنا نعيد هذا الإجراء. نأخذ "العدد الصغير" في المعادلة الأخيرة ونقلبه على رأسه :

$$\begin{aligned}
0.0625133059310457697930051\cdots &= \cfrac{1}{\cfrac{1}{0.0625133059310457697930051\cdots}} \\
&= 15.9965944066857198889230 60\cdots
\end{aligned}$$

نعوض الآن هذا في الصيغة السابقة ، فنحصل على كسر من طابقين :

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15.996594406685719888923060\cdots}}$$

المستوى الأسفل لهذا الكسر هو $15.99659\cdots$ ، وهو قريب جدًّا من 16 ، إذا استبدلناه بالعدد 16 ، سنحصل على عدد نسبي قريب جدًّا من π .

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}} = \frac{355}{113} = 3.1415929203539823008849557\cdots$$

الكسر $\frac{355}{113}$ يتفق مع π بست خانات عشرية.

إذا استمرينا بتطبيق طريقتنا المسلية ، نحسب :

$$0.996594406685719888923060\cdots = \frac{1}{1.0034172310133726034641468\cdots}$$

لنحصل على كسر من ثلاثة طوابق :

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + 0.0034172310133726034641468\cdots}}}$$

ثم :

$$0.0034172310133726034641468\cdots = \frac{1}{292.63459101439547237857177\cdots}$$

لنضيف طبقة أخرى إلى كسرنا ،

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + 0.63459101439547237857177\cdots}}}}$$

دعنا الآن نرى ماذا يحدث لو أننا قربنا المقام الأخير إلى 293. سوف نحصل على العدد النسبي:

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{293}}}}=\frac{104348}{33215}=3.14159265392142104470871 59\cdots$$

إذن الكسر $\frac{104348}{33215}$ يتفق مع π بتسع خانات عشرية. ما مدى دقة التسع خانات عشرية؟ افرض أننا أُعطينا أن المسافة من الأرض إلى الشمس تساوي تقريباً $145,000,000$ كيلومتر، ونريد أن نحسب طول مدار الأرض باستخدام الصيغة[١]

نصف القطر $\times\pi\times 2=$ **المحيط**

عندئذ يكون الخطأ في حساب المحيط إذا استخدمنا $\frac{104348}{33215}$ بدلاً من π أقل بقليل من عُشر كيلومتر. لذلك فإنه من المناسب استخدام التقريب $\pi\approx\frac{104348}{33215}$.

هذه الكسور متعددة الطوابق المقلوبة لها اسم. إنها تسمى:

$$\boxed{\text{الكسور المستمرة}}$$

نستطيع كتابة أي عدد على شكل كسر مستمر(Continued Fraction) من خلال تكرار عملية القلب وفصل الجزء الصحيح. أولى خطوات حساب الكسر المستمر للجذر التكعيبي للعدد 2 تُعطى بشكل كامل في الشكل رقم (٣٩,١). بنفس الطريقة

---

(١) حسناً، حسناً، لقد أمسكتني ، مدار الأرض هو قطع ناقص وليس دائرة. في الحقيقة نحن حسبنا المحيط لدائرة وهمية نصف قطرها يساوي تقريباً $145,000,000$ كيلومتر.

يمكن أن نحسب الكسر المستمر للعدد $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

والكسر المستم

ر للعدد $e = 2.7182818\cdots$ (أساس اللوغاريتم الطبيعي)،

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}}}}$$

واضح أن الكسور المستمرة تمتد إلى الأسفل باتجاه اليمين، ولكن كتابتها ككسور يستهلك الكثير من الحبر والكثير من الورق؛ لذلك يجب أن تكون هناك طريقة ملائمة أكثر لوصف الكسر المستمر. إن أي بسط فيها هو 1، لذلك فكل ما نحتاج عمله هو تسجيل المقامات (جمع مقام). نكتب:

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots]$$

كاختزال للكسر المستمر.

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{a_5+\cfrac{1}{a_6+\ddots}}}}}}$$

باستخدام هذا الرمز الجديد، يمكننا كتابة مفكوكات الكسور المستمرة السابقة بشكل موجز كما يلي:

$$\pi=[3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,\cdots]$$
$$\sqrt[3]{2}=[1,3,1,5,1,1,4,1,1,8,1,14,1,10,2,1,4,12,2,3,2,\cdots]$$
$$\sqrt{2}=[1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,\cdots]$$
$$e=[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,1,1,14,\cdots]$$

الآن بعد أن رأينا أمثلة متعددة للكسور المستمرة، حان الوقت لعمل النظرية العامة. إذا كان α عدداً له مفكوك كسر مستمر.

$$\alpha=[a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots]$$

$$\sqrt[3]{2} = 1.259921\cdots$$

$$= 1 + \cfrac{1}{3.847322\cdots}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1.180189\cdots}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5.549736\cdots}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1.819053\cdots}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1.220922\cdots}}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4.526491\cdots}}}}}}$$

الشكل رقم (١,٣٩). مفكوك الكسر المستمر للعدد $\sqrt[3]{2}$.

عندئذ رأينا أن القَطْع بعد عدد قليل من الحدود يعطي عدداً نسبيًّا قريباً جدًّا من α. المتقارب *Convergent* النوني لـ $\left(n^{th}\right)$ هو العدد النسبي:

$$\frac{p_n}{q_n}=\left[a_0,a_1,\ldots,a_n\right]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

الذي نحصل عليه باستخدام الحدود حتى a_n. على سبيل المثال، الأعداد المتقاربة الأولى للعدد

$\sqrt{2}=[1,2,2,2,2,\ldots]$ هي :

$$\frac{p_0}{q_0}=1,$$

$$\frac{p_1}{q_1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$\frac{p_2}{q_2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=1+\frac{2}{5}=\frac{7}{5},$$

$$\frac{p_3}{q_3}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{5}}=1+\frac{5}{12}=\frac{17}{12}.$$

قائمة أطول للأعداد المتقاربة للعدد $\sqrt{2}$ معطاه في الجدول 39.1 .

الجدول رقم (٣٩,١). الأعداد المتقاربة للعدد $\sqrt{2}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{p_n}{q_n}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{239}{169}$	$\frac{577}{408}$	$\frac{1393}{985}$	$\frac{3363}{2378}$	$\frac{8119}{5741}$

البداية بقائمة الأعداد المتقاربة للعدد $\sqrt{2}$ ليست هي الأساس، ولكنها مفيدة في كونها توضح كيف أن الأعداد المتقاربة اللاحقة تُولَّد من السابقة. من الأسهل اكتشاف النمط إذا نظرنا إلى $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$ باستخدام الرموز، منه إذا نظرنا إلى أي مثال محدد.

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1},$$
$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1},$$
$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0}{a_2 a_1 + 1},$$
$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3 a_2 a_1 a_0 + a_3 a_2 + a_3 a_0 + a_1 a_0 + 1}{a_3 a_2 a_1 + a_3 + a_1},$$

دعنا في هذه اللحظة نركز على البسوط (جمع بسط) $p_0, p_1, p_2, \ldots$.

الجدول رقم (٣٩،٢). يعطي قيم $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$.

للوهلة الأولى تبدو الصيغ في الجدول 39.2 مرعبة، لكنك قد تلاحظ أن p_0 يظهر في نهاية p_2، و p_1 يظهر في نهاية p_3،

الجدول رقم (٣٩،٢). بسط الكسر المستمر $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

n	p_n
p_0	a_0
p_1	$a_1 a_0 + 1$
p_2	$a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0$
p_3	$a_3 a_2 a_1 a_0 + a_3 a_2 + a_3 a_0 + a_1 a_0 + 1$
p_4	$a_4 a_3 a_2 a_1 a_0 + a_4 a_3 a_2 + a_4 a_3 a_0 + a_4 a_1 a_0 + a_2 a_1 a_0 + a_4 + a_2 + a_0$
p_5	$a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0 + a_5 a_4 a_3 a_2 + a_5 a_4 a_3 a_0 + a_5 a_4 a_1 a_0 + a_5 a_2 a_1 a_0$ $+ a_3 a_2 a_1 a_0 + a_5 a_4 + a_5 a_2 + a_3 a_2 + a_5 a_0 + a_3 a_0 + a_1 a_0 + 1$

و p_2 يظهر في نهاية p_4 ، و p_3 يظهر في نهاية p_5 . بكلمات أخرى ، يبدو أن p_n يساوي p_{n-2} زائد "أشياء أخرى". هنا قائمة "بالأشياء الأخرى" للقيم القليلة الأولى لـ n :

$$
\begin{aligned}
p_2 - p_0 &= a_2a_1a_0 + a_2 \\
&= a_2\left(a_1a_0 + 1\right) \\
p_3 - p_1 &= a_3a_2a_1a_0 + a_3a_2 + a_3a_0 \\
&= a_3\left(a_2a_1a_0 + a_2 + a_0\right) \\
p_4 - p_2 &= a_4a_3a_2a_1a_0 + a_4a_3a_2 + a_4a_3a_0 + a_4a_1a_0 + a_4 \\
&= a_4\left(a_3a_2a_1a_0 + a_3a_2 + a_3a_0 + a_1a_0 + 1\right)
\end{aligned}
$$

بإعادة النظر في جدول 39.2 ، يبدو أن "الأشياء الأخرى" للمقدار $p_n - p_{n-2}$ هو ببساطة a_n مضروباً في الكمية p_{n-1} . يمكن وصف هذه الملاحظة من خلال الصيغة :

$$p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2}$$

هذا مثال على صيغة إرجاعية recursion formula ؛ لأنها تعطي القيم اللاحقة لـ $p_0, p_1, p_2, \ldots$ بتكرار استخدام القيم السابقة. إنها تشبه إلى حد كبير الصيغة الإرجاعية لأعداد فيبوناتشي التي بحثناها في الفصل 37[(١)]. طبعاً، تحتاج هذه الصيغة في البداية إلى قيمتين ابتدائيتين :

$$p_1 = a_1a_0 + 1 \quad , \quad p_0 = a_0$$

بحث مماثل في المقامات $q_0, q_1, q_2, \ldots$ يكشف عن صيغة إرجاعية مناظرة. في الحقيقة إذا عملت جدولاً لـ $q_0, q_1, q_2, \ldots$ بنفس أسلوب الجدول 39.2 ، سوف تجد أن $q_0, q_1, q_2, \ldots$ تخضع لنفس الصيغة الإرجاعية التي تخضع لها $p_0, p_1, p_2, \ldots$ لكن

(١) في الحقيقة ، إذا كانت جميع القيم a_n مساوية لـ 1 ، عندئذ متتالية قيم p_n هي بالضبط متتالية فيبوناتشي. يمكنك دراسة العلاقة بين الكسور المستمرة وأعداد فيبوناتشي بحل التمرين 39.7.

$q_0, q_1, q_2, \ldots$ تُستخدّم قيم ابتدائية مختلفة لكل من q_1, q_0. سوف نلخص ما سبق في النظرية المهمة التالية.

نظرية (١, ٣٩). (الصيغة الإرجاعية للكسر المستمر).

ليكن:

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

حيث نتعامل مع $a_0, a_1, a_2, \ldots$ على أنها متغيرات، وليست أعداداً محددة.
عندئذ فإن البسوط (جمع بسط) تُعطى من خلال الصيغة الإرجاعية:

$p_0 = a_0 \quad , \quad p_1 = a_1 a_0 + 1 \quad , \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ ، حيث $n \geq 2$.

وتعطى المقامات $q_0, q_1, q_2, \ldots$ من خلال الصيغة

$q_0 = 1 \quad , \quad q_1 = a_1 \quad , \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ حيث $n \geq 2$.

البرهان

عندما تُعرف المتتالية من خلال صيغة إرجاعية، يكون من السهل غالباً استخدام الاستقراء لإثبات بعض الحقائق المتعلقة بالمتتالية. لنبدأ الاستقراء نحتاج أن نتأكد أن:

$$\frac{p_0}{q_0} = [a_0] \quad , \quad \frac{p_1}{q_1} = [a_0, a_1]$$

معطى أن $p_0 = a_0 \ , \ q_0 = 1$ ، إذن $p_0/q_0 = a_0$ ، وهذا يثبت المعادلة الأولى.
كذلك، معطى أن $p_1 = a_1 a_0 + 1 \ , \ q_1 = a_1$ ، إذن :

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

وهذا يثبت المعادلة الثانية.

الآن نفرض أن النظرية صحيحة عندما $n = N$ ، ونستخدم الفرض لإثبات أنها صحيحة عندما $n = N + 1$. مفتاح الحل يكمن في ملاحظة أن الكسر المستمر .

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N, a_{N+1}]$$

يمكن كتابته ككسر مستمر بحد أقل من خلال دمج آخر حدين[(١)].

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N, a_{N+1}] = \left[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N + \frac{1}{a_{N+1}}\right]$$

لتبسيط هذه الملاحظة ، دعنا نستخدم أحرفاً مختلفة للحدود في الكسر المستمر الواقع في الطرف الأيمن ، ولنقل :

$$[b_0, b_1, \ldots, b_N]$$

حيث :

$$b_N = a_N + \frac{1}{a_{N+1}} \ , \ \ b_{N-1} = a_{N-1}, \ldots, b_1 = a_1 \ , \ \ b_0 = a_0$$

لاحظ أن $[b_0, b_1, \ldots, b_N]$ هو كسر مستمر حدوده أقل بحد واحد من حدود الكسر $[a_0, a_1, \ldots, a_{N+1}]$ ، إذن فرضيتنا الاستقرائية تنص على أن النظرية صحيحة للكسر المستمر $[b_0, b_1, \ldots, b_N]$. لإزالة اللبس ، سوف نستخدم حروفاً كبيرة P_n/Q_n للتقارب لـ $[b_0, b_1, \ldots, b_N]$. عندئذ تخبرنا فرضية الاستقراء أن

(١) لا تجعل صعوبة الحد الأخير تسبب بعض اللبس لديك. إذا فكرت في كتابة كل شيء على شكل كسر ، فسوف ترى مباشرة أن الطرفين متساويان. إذا ما زالت الأمور غير واضحة حاول عندما $N = 3$, $N = 2$.

P_n’s , Q_n’s تحقق الصيغ الإرجاعية التالية :

$$P_N = b_n P_{n-1} + P_{n-2} \quad , \quad Q_N = b_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \quad \forall \ \ 2 \le n \le N$$

إذن :

$$\left[b_0, b_1, \ldots, b_N\right] = \frac{P_N}{Q_N} = \frac{b_N P_{N-1} + P_{N-2}}{b_N Q_{N-1} + Q_{N-2}} \qquad (*)$$

كيف ترتبط الأعداد المتقاربة للكسر $\left[a_0, a_1, \ldots, a_{N+1}\right]$ والأعداد المتقاربة للكسر $\left[b_0, b_1, \ldots, b_N\right]$ مع بعضهما البعض؟

نحن نعلم أن $b_n = a_n$ لكل $0 \le n \le N-1$ ، إذن الأعداد المتقاربة النونية $\left(n^{th}\right)$ هي نفسها لكل $0 \le n \le N-1$. هذا يعني أننا نستطيع عمل التعويضات التالية في الصيغة (*) :

$$P_{N-1} = p_{N-1},\ P_{N-2} = p_{N-2} \quad , \quad Q_{N-1} = q_{N-1},\ \ Q_{N-2} = q_{N-2}$$

ولأننا نعلم أيضاً أن :

$$\left[b_0, b_1, \ldots, b_N\right] = \left[a_0, a_1, \ldots, a_{N+1}\right] \quad , \quad b_N = a_N + \frac{1}{a_{N+1}}$$

نجد أن :

$$\begin{aligned}\left[a_0, a_1, \ldots, a_N\right] &= \frac{b_N P_{N-1} + P_{N-2}}{b_N Q_{N-1} + Q_{N-2}} \\ &= \frac{\left(a_N + \dfrac{1}{a_{N+1}}\right) p_{N-1} + p_{N-2}}{\left(a_N + \dfrac{1}{a_{N+1}}\right) q_{N-1} + q_{N-2}} \\ &= \frac{a_{N+1}\left(a_N p_{N-1} + p_{N-2}\right) + p_{N-1}}{a_{N+1}\left(a_N q_{N-1} + q_{N-2}\right) + q_{N-1}} \qquad (**)\end{aligned}$$

فرضية الاستقراء المطبقة على الكسر المستمر $[a_0, a_1, \dots, a_N]$ تخبرنا أن متقارباتها تحقق

$$p_N = a_N p_{N-1} + p_{N-2} \quad , \quad q_N = a_N q_{N-1} + q_{N-2}$$

وهذا يسمح لنا بتبسيط الصيغة (**) لتُصبح :

$$[a_0, a_1, \dots, a_{N+1}] = \frac{a_{N+1} p_N + p_{N-1}}{a_{N+1} q_N + q_{N-1}}$$

لكن من التعريف، المتقارب $(N+1)^{st}$ (الأول) هو :

$$[a_0, a_1, \dots, a_{N+1}] = \frac{p_{N+1}}{q_{N+1}}$$

بمقارنة هاتين العبارتين للكسر $[a_0, a_1, \dots, a_{N+1}]$ نجد أن :

$$p_{N+1} = a_{N+1} p_N + p_{N-1} \quad , \quad q_{N+1} = a_{N+1} q_N + q_{N-1}$$

بذلك نكون قد بينا أنه إذا كانت العلاقات الإرجاعية صحيحة عند $n = N$ فإنها أيضاً صحيحة عند $n = N + 1$. وبذلك يكتمل برهاننا الاستقرائي على أن العلاقات الإرجاعية صحيحة لجميع قيم n.

نحن نتوقع أن الأعداد المتقاربة لعدد مثل $\sqrt{2}$ يجب أن تصبح أقرب فأقرب لـ $\sqrt{2}$ ؛ لذلك قد يكون من المهم أن نرى مدى قرب المتقاربات إحداهما للأخرى :

$$\frac{p_0}{q_0}-\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{1}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$
$$\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}=\frac{3}{2}-\frac{7}{5}=\frac{1}{10}$$
$$\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_3}{q_3}=\frac{7}{5}-\frac{17}{12}=-\frac{1}{60}$$
$$\frac{p_3}{q_3}-\frac{p_4}{q_4}=\frac{17}{12}-\frac{41}{29}=\frac{1}{348}$$
$$\frac{p_4}{q_4}-\frac{p_5}{q_5}=\frac{41}{29}-\frac{99}{70}=-\frac{1}{2030}$$
$$\frac{p_5}{q_5}-\frac{p_6}{q_6}=\frac{99}{70}-\frac{239}{169}=\frac{1}{11830}$$

" الفرق بين المتقاربات المتتالية للعدد $\sqrt{2}$"

الفرق بين المتقاربات المتتالية تبدو في الحقيقة أنها تصبح أصغر فأصغر، لكن يظهر نمط مهم آخر. يبدو أن كل بسط يساوي 1 ، وأن القيم تتغير بين الموجب والسالب.

دعنا نحاول مع مثال آخر، وليكن مفكوك الكسر المستمر للعدد π. نجد أن:

$$\frac{p_0}{q_0}-\frac{p_1}{q_1}=\frac{3}{1}-\frac{22}{7}=-\frac{1}{7}$$
$$\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}=\frac{22}{7}-\frac{333}{106}=\frac{1}{742}$$
$$\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_3}{q_3}=\frac{333}{106}-\frac{355}{113}=-\frac{1}{11978}$$
$$\frac{p_3}{q_3}-\frac{p_4}{q_4}=\frac{355}{113}-\frac{103993}{33102}=\frac{1}{3740526}$$
$$\frac{p_4}{q_4}-\frac{p_5}{q_5}=\frac{103993}{33102}-\frac{104348}{33215}=-\frac{1}{1099482930}$$
$$\frac{p_5}{q_5}-\frac{p_6}{q_6}=\frac{104348}{33215}-\frac{208341}{66317}=\frac{1}{2202719155}$$

" الفرق بين المتقاربات المتتالية للعدد π"

يظهر نفس النمط بالضبط ؛ لذلك دعنا نُشَمِّر عن سواعدنا ونبرهن النظرية التالية.

نظرية (٣٩,٢). (نظرية الفرق بين المتقاربات المتتالية)

كالمعتاد، لتكن $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$ الأعداد المتقاربة للكسر المستمر $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$. فإن

$$p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n \qquad \forall\, n = 1, 2, 3, \ldots$$

بشكل مكافئ، بقسمة الطرفين على $q_{n-1}q_n$ ،

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n} \qquad \forall\, n = 1, 2, 3, \ldots$$

البرهان

من السهل جدًّا إثبات هذه النظرية باستخدام الاستقراء والصيغة الإرجاعية للكسر المستمر (نظرية 39.1) . سنتأكد أولاً من أنها صحيحة عند $n = 1$:

$$p_0 q_1 - p_1 q_0 = a_0 \cdot a_1 - (a_1 a_0 + 1) \cdot 1 = -1$$

بذلك يكون قد بدأ استقراؤنا.

سنفرض الآن أن النظرية صحيحة عند $n = N$ ، ونحتاج إلى أن نثبت أنها صحيحة عند $n = N + 1$. نحسب :

$$p_N q_{N+1} - p_{N+1} q_N = p_N (a_{N+1} q_N + q_{N-1}) - (a_{N+1} p_N + p_{N-1}) q_N$$

باستخدام نظرية الصيغة الإرجاعية للكسر المستمر ،

$$= p_N q_{N-1} - p_{N-1} q_N$$

لأن $a_{N+1} p_N q_N$ حدان مشطوبان ؛ لأن أحدهما سالب والآخر موجب.

$$= -\left(p_{N-1} q_N - p_N q_{N-1} \right)$$

$$= -(-1)^N$$ من فرضية الاستقراء عند $n = N$.

$$= (-1)^{N+1}$$

بينا الآن أن الصيغة المطلوبة صحيحة عند $n = 1$ ، وأنها إذا كانت صحيحة عند $n = N$ فإنها صحيحة أيضاً عند $n = N + 1$. لذلك فهي صحيحة لكل القيم $n \geq 1$ ، وبهذا يكتمل برهان النظرية.

تماريـــــن

(٣٩,١) (a) احسب الحدود العشرة الأولى في الكسور المستمرة للعددين $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

(b) هل الحدود في الكسر المستمر للعدد $\sqrt{3}$ تتبع نمطاً تكراريًّا؟ إذا كان الجواب نعم، أثبت ذلك.

(c) هل الحدود في الكسر المستمر للعدد $\sqrt{5}$ تتبع نمطاً تكراريًّا؟ إذا كان الجواب نعم، أثبت ذلك.

(٣٩,٢) الكسر المستمر للعدد π^2 هو:

$$[\_,\_,\_,1,2,47,1,8,1,1,2,2,1,1,8,3,1,10,5,1,3,1,2,1,1,3,15,1,1,2,\ldots]$$

(a) أوجد الأعداد الثلاثة الأولى المفقودة.

(b) هل ترى أي نمط في الكسر المستمر للعدد π^2 ؟

(c) استخدم الحدود الخمسة الأولى في الكسر المستمر لإيجاد عدد نسبي قريب من π^2 . ما مدى قربه؟

(d) نفس السؤال (c) ، لكن استخدم ستة حدود.

(٣٩،٣) الكسر المستمر للعدد $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ هو:

$$[\_,\_,\_,5,7,1,1,4,1,38,43,1,3,2,1,1,1,1,2,4,1,4,5,1,5,1,7,\ldots]$$

(a) أوجد الأعداد الثلاثة الأولى المفقودة.

(b) هل ترى أي نمط في الكسر المستمر للعدد $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ؟

(c) لكل $n=1,2,3,\ldots,7$ ، احسب المتقارب النوني $\left(n^{th}\right)$

$$\frac{p_n}{q_n}=\left[a_0,a_1,\ldots,a_n\right]$$

للعدد $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

(d) الكسور التي حسبتها في (b) يجب أن تعطي تقريباً أفضل وأفضل للعدد $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. تحقق من ذلك بعمل جدول للقيم:

$$\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{1}{10^{\text{قوة ما}}}$$

للقيم $n=1,2,3,\ldots,7$.

(٣٩،٤) ليكن p_n/q_n هو المتقارب النوني $\left(n^{th}\right)$ للعدد α . لكل من القيم التالية لـ α ، اعمل جدولاً تبين فيه قيمة المقدار $q_n\left|p_n-q_n\alpha\right|$ لـ $n=1,2,3,\ldots,N$.

(مفكوك الكسر المستمر لكل عدد من الأعداد $\sqrt{2},\sqrt[3]{2}$ و π واردة في إحدى صفحات هذا الفصل ؛ لذلك يمكنك استخدام هذه المعلومات لحساب الأعداد المتقاربة المرتبطة).

(a) $\alpha=\sqrt{2}$ حتى $N=8$.

(b) $\alpha=\sqrt[3]{2}$ حتى $N=7$.

(c) $\alpha=\pi$ حتى $N=5$.

(d) بياناتك من (a) تشير إلى أن المقدار $\left|p_n-q_n\sqrt{2}\right|$ ليس فقط محدوداً، بل هو يقترب من قيمة عندما $n\longrightarrow\infty$.

حاول تخمين ماذا تساوي هذه القيمة، ثم برهن أن تخمينك صحيح.

(e) تذكر أن نظرية التقريب الديوفانتيني لديرشله 31.2 (Dirichlet's Diophantine Approximation Theorem) تنص على أنه لأي عدد غير نسبي α، يوجد عدد لا نهائي من أزواج أعداد صحيحة x , y تحقق:

$$|x-y\alpha|<\frac{1}{y} \quad \text{............................} \quad (39.1)$$

بياناتك من (a)، (b) و (c) تشير إلى أنه إذا كان p_n/q_n متقارباً للعدد α فإن $\left(p_n,q_n\right)$ تمثل حلاً للمتباينة (39.1). برهن أن هذا صحيح.

(٣٩,٥) الصيغة الإرجاعية للكسر المستمر (نظرية 39.1) تعطي إجراء لتوليد قائمتين من الأعداد $p_0,p_1,p_2,p_3,\ldots$ و $q_0,q_1,q_2,q_3,\ldots$ من قيمتين ابتدائيتين a_0 , a_1.

عندئذ يكون الكسر p_n/q_n هو المتقارب النوني $\left(n^{th}\right)$ لعدد α.

برهن أن الكسر p_n/q_n في أبسط صورة، أي برهن أن $\gcd\left(p_n,q_n\right)=1$.

(مساعدة: استخدم نظرية الفرق بين المتقاربات المتتالية (نظرية 39.2)).

(٣٩,٦) برهنّا أن المتقاربين المتتاليين p_n/q_n و p_{n-1}/q_{n-1} يحققان:

$$p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1}=(-1)^n$$

في هذا التمرين سوف تقوم باكتشاف ماذا يحدث إذا أخذنا أي متقارب آخر.

(a) احسب المقدار:

$$p_{n-2}q_n-p_nq_{n-2} \quad \text{......................} \quad (*)$$

لمتقاربات الكسر المستمر $\sqrt{2} = [1,2,2,2,2,\ldots]$. اعمل هذا للقيم $n = 2,3,\ldots,6$.

(b) احسب المقدار (*) للقيم $n = 2,3,\ldots,6$ لمتقاربات الكسر المستمر:

$$\pi = [3,7,15,1,292,1,1,1,2,\ldots]$$

(c) استخدم النتائج التي حصلت عليها من (a) و (b) (وأي بيانات أخرى تحتاج إليها)، لعمل تخمين لقيمة المقدار (*) لأي كسر مستمر $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$.

(d) برهن أن تخمينك في (c) صحيح.

(مساعدة: قد تكون الصيغة الارجاعية للكسر المستمر مفيدة).

(٣٩,٧) الكسر المستمر "الأبسط" هو الكسر المستمر $[1,1,1,\ldots]$ الذي يتضمن فقط 1.

(a) احسب أول عشرة أعداد متقاربة لـ $[1,1,1,\ldots]$.

(b) هل تعرف الأعداد التي تظهر في بسوط (جمع بسط) ومقامات الكسور التي حسبتها في (a)؟ (إذا لم تعرف، انظر الفصل رقم الثلاث والسبعون).

(c) ما هي القيمة المضبوطة للنهاية:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{p_n}{q_n}$$

لمتقاربات الكسر المستمر $[1,1,1,\ldots]$؟

(٣٩,٨) سردنا في الجدول 39.2 البسوط p_n للكسر المستمر $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ للقيم القليلة الأولى لـ n.

(a) كيف يرتبط بسطاً $[a,b]$, $[b,a]$ الواحد بالآخر؟

(b) كيف يرتبط بسطاً $[a,b,c]$, $[c,b,a]$ الواحد بالآخر؟

(c) بشكل عام، كيف يرتبط بسطاً.

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] \quad , \quad [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0]$$

الواحد بالآخر؟

(d) برهن أن تخمينك في (c) صحيح.

(٣٩,٩) أكتب برنامجاً يأخذ كَمُدخل عدد عشري A وعدد صحيح n ويعطي القيم التالية:

(a) أول $n+1$ حد $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ للكسر المستمر للعدد A.

(b) المتقارب النوني (n^{th}) p_n/q_n للعدد A ككسر.

(c) الفرق بين A و p_n/q_n ككسر عشري.

(٣٩,١٠) استخدم برنامجك من التمرين 39.9 لعمل جدول لأول عشرة حدود (على الأقل) لمفكوك الكسر المستمر للعدد $\sqrt{D}$ للقيم $2 \le D \le 30$. ما نوع النمط (الأنماط) التي يمكن أن تجدها؟

(يمكنك أن تختبر مخرجاتك بالمقارنة مع جدول 40.1 في الفصل القادم).

(٣٩,١١) نفس سؤال تمرين 39.10، لكن بجذور تكعيبية. بمعنى آخر، اعمل جدولاً لأول عشرة حدود (على الأقل) لمفكوك الكسر المستمر للعدد $\sqrt[3]{D}$ لكل قيمة للعدد D يحقق $2 \le D \le 20$. هل ترى أي أنماط؟

(٣٩,١٢) (للذين درسوا تفاضل وتكامل متقدم) ليكن $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ متتالية أعداد حقيقية تحقق $a_i \ge 1$. عندئذ، لكل $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ يمكننا حساب العدد الحقيقي:

$$u_n = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

برهن أن النهاية $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n$ موجودة.

(مساعدة: استخدم نظرية 39.1 و 39.2 لإثبات أن المتتالية $u_1,u_2,u_3,\ldots$ هي متتالية كوشي).

(٣٩.١٣) افرض أننا نستخدم الصيغة الإرجاعية لـ p_n بطريقة خلفية لكي نعرف p_n لقيم سالبة لـ n.

ما هي قيم p_{-1} , p_{-2} ؟ ما هي قيم q_{-1} , q_{-2} ؟