الله

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة في نظرية الأعداد

الجزء الثاني

تأليــف

جــوزيف ســيلفرمان

ترجمــــة

محمد مطاوع محمد خشان

قسم الرياضيات – كلية المعلمين

جامعة الملك سعود

النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

هذه ترجمة عربية مصرح بها من مركز الترجمة بالجامعة لكتاب :

A Friendly Introduction to Number Theory, Third Edition
Published in the United States by New Jersey 07458
By : Joseph H. Silverman

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

سيلفرمان، جوزيف

مقدمة في نظرية الأعداد /جوزيف سيلفرمان ؛ محمد مطاوع محمد خشان

– الرياض، ١٤٣٤هـ

٢مج

٣٧١ ص، ١٧ × ٢٤سم

ردمك : ٠ – ١٩٧ – ٥٠٧ – ٦٠٣–٩٧٨ (مجموعة)

ردمك : ٤ – ٢٠١ – ٥٠٧ – ٦٠٣–٩٧٨ (ج٢)

١- نظرية الأعداد أ. خشان، محمد مطاوع محمد (مترجم) ب- العنوان

ديوي ٥١٢,٧ ١٤٣٤/١٠٣٩٠

رقم الإيداع ١٤٣٤/١٠٣٩٠

ردمك : ٠ – ١٩٧ –٥٠٧ – ٦٠٣–٩٧٨ (مجموعة)

ردمك : ٤ – ٢٠١ – ٥٠٧ – ٦٠٣–٩٧٨ (ج٢)

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة، وقد وافق المجلس على نشره بعد اطلاعه على تقارير المحكمين في اجتماعه العشرين للعام الدراسي ١٤٣٣/١٤٣٤هـ المعقود في تاريخ ١٤٣٤/٧/٣٠هـ الموافق ٩ /٦/ ٢٠١٣م.

يعتذر النشر العلمي عن عدم وضوح بعض الرموز والأشكال لهذا الكتاب لعدم وضوحها من الأصل

النشر العلمي والمطابع ١٤٣٥هـ

إهداء

إلى معلمي الأول أمي

إلى رفيق العمر زوجتي

إلى قرة العين أولادي:

زينة   سمر   عمار   مطاوع

مقدمة المترجم

لقد بدأ الإنسان بالتعرف على العدد من خلال مفهوم ملموس فرضته عليه بيئته واحتياجاته، ثم ساقه الفضول والنزعة للمعرفة إلى أن يُجرّد هذا المفهوم، ويلاحظ خصائص الأعداد، ويصنفها إلى أنواع، فكل نوع يجمع بين أعداده خصائص مشتركة، ثم ما لبث أن بدأ باكتشاف أنماط، وعلاقات تربط بين أعداد كل نوع وأعداد النوع الآخر. وفي الحقيقة، فإن دراسة هذه العلاقات هي جوهر دراسة نظرية الأعداد، كما سترى ذلك لاحقاً خلال قراءتك لصفحات هذا الكتاب. لهذا يمكننا القول إن التفاعل الأول بين الإنسان والرياضيات كان من خلال العدد، فلقد لعب العدد دور حلقة الوصل بين البشرية وعالم الرياضيات. إن هذا يجعل لنظرية الأعداد مكانة مرموقة بين كل أفرع الرياضيات الأخرى، ويعطيها دوراً ريادياً تستحقه. ويُمْكننا أن نتخيل من ذلك مقدار ما قدّم هذا العلم للعلوم الرياضية الأخرى، ولا أدل على ذلك من تعبير أمير الرياضيات **كارل فريدريك جاوس** حين قال: "الرياضيات مَلِكة العلوم، ونظرية الأعداد تاج على رأس هذه الملكة". وبالرغم من أن جاوس كان يحب جميع أفرع الرياضيات، إلا أنه كان يفضل دائماً العمل في نظرية الأعداد. وبالطبع، لم يقتصر ذلك على جاوس، فلا يكاد عَلَم من أعلام الرياضيات إلا واشتغل في نظرية الأعداد وله إسهامات فيها، ومنهم على سبيل المثال لا الحصر، **فيرما**، **أويلر**، **لجندر**.

إن نظرية الأعداد من العلوم الأصيلة التي تتفاعل بشكل مستمر مع أفرع الرياضيات الأخرى، مؤثرة فيها ومتأثرة بها. وستجد في صفحات الكتاب الكثير الكثير من أدوات الجبر، الهندسة، التحليل، والتفاضل والتكامل التي تساعدنا في برهنة بعض النظريات أو في تطوير بعض الطرق والإجراءات لحل بعض المشكلات. وقد يَظُن من لم يسبق له دراسة نظرية الأعداد أن دراسة هذا الفرع هي دراسة رياضية نظرية بحته، وأنها بعيدة كل البعد عن واقع التطبيق، وأقول لمن ظن ذلك، اقرأ الفصل الثامن عشر الذي يُحَدثك عن الأعداد الأولية الضخمة التي يصعب تحليلها، وكيف أدى هذا إلى إنشاء شيفرات سرية لا يمكن فكها. كما أن نظرية الأعداد أرض خصبة جداً للبحث العلمي، فهي تحوي على الكثير من التخمينات والمسائل المفتوحة التي تنتظر من لديه الجلد والشجاعة لبرهنتها أو حلها. وأفضل مثال على ما نقول هو ما تضمنته صفحات هذا الكتاب التي تحكي قصة نظرية فيرما الأخيرة، وكيف أن هذه النظرية ظلت ما يزيد عن ثلاثمائة وخمسين سنة دون برهان حتى قام الرياضي الإنجليزي "**أندرو ويلز**" ببرهانها عام ١٩٩٤ بعد أن كرّس ست سنوات من حياته ليحقق هذا الإنجاز الرائع.

من معرفتي بما سبق، فقد أحببت أن أقترب من نظرية الأعداد بعمل أخدم فيه من أراد دراسة هذا العلم العظيم، عملاً أرجو الله فيه أن يجعله في ميزان حسناتي، فلم أجد أفضل من تقديم كتاب رائع، من خلال ترجمة أمينة لكتاب له الكثير مما يميزه. فهو مكتوب للمبتدئين، حيث اعتبر المؤلف أن القارئ ليس لديه خلفية رياضية قوية، فلم يترك شيئاً للوضوح التلقائي بل قام بتوضيح الواضح. وفي نفس الوقت، شمَل الكتاب على موضوعات متعددة لا تتضمنها الكثير من كتب نظرية الأعداد، وعُرضت بأسلوب سلس متتالٍ متراكم مترابط، يدل على خبرة طويلة وعلم راسخ وحرفية عالية واحترافية نادرة، ناهيك عن زخم وشمولية التمارين الموضوعة في نهاية كل

فصل، والتي لم يغفل الكاتب فيها عن وضع عبارات مساعدة تعتبر كمفاتيح للحل. كذلك ضَمّن التمارين مساحة واسعة لاستخدام الكمبيوتر في دراسة نظرية الأعداد، وهذا مهم جداً في كثير من الأحيان. إن ذلك يجعل من هذا الكتاب بيئة مناسبة للمبتدئ ولمن أراد أن يستزيد من نظرية الأعداد على حد سواء.

أعزائي القراء، لن أطيل عليكم في وصف هذا الكتاب، ليكمل عني هذه المهمة مؤلفه **جوزيف سيلفرمان**، من خلال مقدمته التي يصف فيها محتوى الكتاب، ويقترح فيها خطة لدراسة فصوله، كما يوضح أن موضوعات هذا الكتاب تكفي لدراسة مقررين جامعيين أو أكثر في نظرية الأعداد.

"رحم الله امرأً أهدى إلي عيوبي". كم أتطلع بشوق واعتزاز لإبداء ملاحظاتك أخي القارئ على هذا الكتاب المترجم على بريدي الإلكتروني drmohammedr@yahoo.com، من ملاحظات على الترجمة، ملاحظات عن أخطاء مطبعية، ملاحظات متعلقة بالتنسيق، أو أي ملاحظات أخرى مهما كانت بسيطة، نصل من خلالها إلى تطوير هذا الكتاب، وتعميده كمرجع رياضي عربي يُعتمد عليه، ووضعه في مصاف الكتب التي تفتخر مكتبتنا العربية بانتمائه إليها. "إن الله يحب إذا عمل أحدكم عملاً أن يتقنه".

المترجم

الرياض، الإثنين ١٠-١٠-٢٠١٢م

الموافق ٢٤-١١-١٤٣٣هـ

مقدمة الكتـــاب

مـع مـرور الوقـت لم نعـد نعـرف علـى وجـه الدقـة كيـف نشـأت الأعـداد الطبيعيـة $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$. ولا نعلـم مـن هـو أول مـن أدرك أن هنـاك مفهومـاً محـدداً عـن "الثلاثية"، كثلاثة صخور، ثلاثة نجوم، وثلاثـة أشـخاص. لقـد كانـت الأعـداد ملهمـة وساحرة ومستخدمة من بدايات التاريخ، وبالطبع لم يكن المفهوم المجرد للأعداد نفسها هو الذي يثير الاهتمام. إن المثير للاهتمام هـو طبيعـة العلاقـات الـتي تظهـر بـين الأعـداد أحدها مع الآخر. وفي كثير من الأحيان يجد المرء الجمال في عمق هذه العلاقات ودقتها. وهنـا يصـف أحـد مشـاهير فلاسـفة القـرن العشـرين الرياضـيات فيقـول " الرياضـيات ، وبنظرة واقعية صحيحة، لا تمتلك الحقيقة فقط، وإنما تمتلك أعلى مراتب الجمال، جمالاً بارداً قاسياً كجمال فن النحت، فناً لا يتماشى مع ضعفنا الطبيعي، فناً يخلو من زخارف الرسومات ومحسنات الموسيقى، فناً لا يـزال نقيـاً رفيعـاً كامـل الإتقـان كـأعظم فن يمكنك أن تراه ". (بيرتراند راسل Bertrand Russel ، 1902).

إن نظرية الأعداد هي ذلك الجزء مـن الرياضيات الـذي يهـدف إلى اكتشـاف العديد من العلاقات العميقة والدقيقة التي تربط بين أنواع مختلفة مـن الأعـداد. وكمثـال بسـيط، نـرى أن كـثيراً مـن النـاس في مختلـف العصـور مهتمـون بالأعـداد المربعـة $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$. إذا قمنا بتجربة جمع عددين مربعين، سنجد أحياناً أننا نحصل على عدد مربع آخر. أكثر الأمثلة شهرة على هذه الظاهرة هو :

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

ولكن هناك أمثلة كثيرة أخرى ، مثل :

$$5^2 + 12^2 = 13^2 \quad , \quad 20^2 + 21^2 = 29^2 \quad , \quad 28^2 + 45^2 = 53^2$$

الثلاثيات مثل $(3,4,5)$, $(5,12,13)$, $(20,21,29)$, $(28,45,53)$ تسمى ثلاثيات فيثاغورية[١]. بناءاً على هذه التجربة ، فإن أي شخص لديه فضول في طرح عدة أسئلة ، مثل :

" هل هناك عدد لا نهائي من الثلاثيات الفيثاغورية ؟ " و " إذا كان هناك عدد لا نهائي منها ، فهل يمكننا إيجاد صيغة تصف جميع هذه الثلاثيات ؟ " هذه النوعية من الأسئلة تُعالج من خلال نظرية الأعداد.

كمثال آخر ، لنعتبر مسألة إيجاد الباقي عندما نقسم العدد الضخم :

$$32478543^{743921429837645}$$

على العدد 54817263 . إحدى طرق حل هذه المسألة هي : خذ العدد 32478543 ، واضربه في نفسه 743921429837645 مرة ، ثم استخدم القسمة الطويلة لتقسم الناتج على 54817263 ، وبعد ذلك نأخذ الباقي. من ناحية تطبيقية ، فإن ذلك سيستغرق وقتاً أطول بكثير من عُمْر من سينفذ هذه الطريقة ، حتى وإن استخدام أسرع أجهزة الكمبيوتر. نظرية الأعداد تزودنا بطرق لحل مثل هذه المسائل أيضاً. " انتظر دقيقة " ، إني أسمعك تقول ، " الثلاثيات الفيثاغورية فيها من الأناقة ما يُدخل السرور إلى العين ، ولكن أين الجمال في القسمة الطويلة والبواقي ؟ ". الجواب هو أن الجمال ليس في البواقي نفسها ولكن في كيفية استخدام هذه البواقي. لقد بين الرياضيون كيف أن حل مسألة الباقي البسيطة هذه (وعكسها) يقود إلى خلق شيفرات بسيطة غاية في السرية لا تقدر حتى

---

(١) للإنصاف ، يجب الإشارة هنا إلى أن البابليين عملوا جداول كبيرة للثلاثيات " الفيثاغورية " قبل ولادة فيثاغورس بعدة قرون.

وكالـة الأمـن القـومي[1] علـى فكهـا. لـذلك حملـت ملاحظـة G. H. Hardy تنبـؤاً خاطئـاً تماماً عندما قال " لم يكتشف أحد بعد أي هدف عسكري يمكـن أن تخدمه نظريـة الأعـداد، ويبدو أن أحداً لن يتمكن من ذلك لسنوات عديدة ".

إن أرض نظرية الأعداد مليئة بالكائنات الغريبـة المتنوعـة. فهنـاك الأعـداد المربعـة والأعداد الأولية، والأعداد الفردية والأعداد الكاملة (لكن ليس هناك أعـداد مربعـة — أولية أو أعـداد كاملـة – فرديـة). وهنـاك معـادلات فيرمـا Fermat و معـادلات بِـلْ Pell، الثلاثيات الفيثاغورية والمنحنيات الناقصية، أرانـب فيبوناتشـي Fibonacci ، الشـيفرات غير القابلة للفك، والكثير الكثير.

سوف تقابل كل هذه الكائنات ، وكائنات أخرى كثيرة، خلال رحلتنا في نظرية الأعداد.

دليل المُعلم

هذا الكتاب مُعَدٌّ ليستخدم كمقرر لفصل دراسي واحـد أو سنة جامعيـة كاملـة لدراسـة نظريـة الأعـداد أو للدراسـة المسـتقلة. إن هـذا الكتـاب يضـم موضـوعات غنيـة تكفي تقريباً لفصلين دراسيين؛ لذلك فالـذي يُـدرس هـذا المقـرر لفصـل دراسـي واحـد سيكون عنده بعض المرونة في اختيار الموضوعات التي سيُدرسها. الفصول الأحـد عشـر الأولى هـي فصـول أساسـية، وربمـا سـيرغب معظـم المدرسـين بالاسـتمرار حتـى نظـام التعمية RSA الوارد في الفصل الثامن عشر؛ لأنه حسب خبرتي فـإن هـذا الموضـوع مـن أكثر الموضوعات التي يُفَضِلُها الطلاب.

---

(١) وكالـة الأمـن القـومي (NSA) هـي ذراع لحكومـة الولايـات المتحـدة تهـتم بجمـع البيانـات، عمـل الشيفرات، وفك الشيفرات. إن ميزانية الـ NSA أكبر من ميزانية الـ CIA، وهي أكبر مؤسسـة لتوظيـف علماء الرياضيات في العالم.

هناك الآن عدة طرق للمضي قُدُماً. هنا بعض التصورات التي تبدو مناسبة لفصل دراسي واحد، لكن تصرف بحرية في تجزيء الفصول الأخيرة حتى تتلاءم مع رغبتك.

الفصول 20 – 32

الجذور البدائية Primitive roots، التعاكس التربيعي Quadratic reciprocity، مجاميع مربعات Sums of squares، معادلة بَلْ Pell's equation، والتقريب الديوفانتيني Diophantine approximation. (أضف الفصلين 39 و 40 عن الكسور المستمرة Continued fractions إذا أسعفك الوقت).

الفصول 28 – 32 و 43 – 48

معادلة فيرما للأس 4 (Fermat equation for exponent 4)، معادلة بَلْ، التقريب الديوفانتيني، المنحنيات الناقصية Elliptic curves، ونظرية فيرما الأخيرة Fermat's last theorem.

الفصول 29 – 37 و 39 – 40

معادلة بَلْ، التقريب الديوفانتيني، أعداد جاوس الصحيحة Gaussian integers، الأعداد المتسامية Transcendental numbers، معاملات ذو الحدين Binomial coefficients، الصيغ الارجاعية الخطية Linear recurrences، والكسور المستمرة.

الفصول 19 – 25 و 36 – 38

اختبار الأولية Primality test، الجذور البدائية، التعاكس التربيعي، معاملات ذو الحدين، الصيغ الإرجاعية الخطية. رمز O الكبيرة Big-Oh notation (هذا المحتوى مصمم بشكل خاص للطلاب الذين يريدون متابعة الدراسة في علم الكمبيوتر أو التشفير).

وفي جميع الحالات، من الأفضل أن يقرأ الطلاب بعض الفصول التي لم نوردها، وأن يقوموا بحل التمارين.

معظم التمارين غير العددية والتي ليس لها علاقة بالبرمجة، الواردة في هذا الكتاب، صممت لإثراء المناقشة والتجربة. وليس من الضروري الإجابة عنها بشكل "صحيح" أو "كامل". سيجد معظم الطلبة هذه التمارين صعبة في البداية؛ لذلك يجب أن تمتاز الدراسة بالجدية. يمكنك جعل طلابك يشعرون أن المادة أسهل من خلال جعل أسئلتك تبدأ بعبارة مثل "أخبرني بقدر ما تستطيع عن ...". أبلغ طلابك أن جمع البيانات وحل حالات خاصة ليست مجرد طريقة مقبولة وإنما ضرورية. من جهة أخرى، أخبرهم أنه لا يوجد شيء اسمه حل كامل؛ لأن حل مسألة جيدة دائماً ما يطرح أسئلة جديدة، لذلك إذا كانوا يستطيعون إعطاء إجابة كاملة عن سؤال ما، فإن هدفهم القادم هو البحث عن تعميمات وقيود هذه الحلول.

إن التفاضل والتكامل مطلوب فقط في الفصلين 38 (رمز O الكبيرة) و 41 (توليد الدوال Generating functions). إذا لم يكن الطلاب قد درسوا التفاضل والتكامل فمن الممكن حذف هذين الفصلين دون أن يؤثر ذلك على تسلسل المادة.

إن نظرية الأعداد ليست سهلة، ولهذا لا توجد طريقة لإقناع الطلاب بذلك. لكن بدلاً من ذلك، فإن هذا الكتاب سيبين لطلابك أنهم راضون تمام الرضى عن طريقتهم في التفكير الاستكشافي. إن مكافأتك كمدرس هي أنك تنير لهم طريقهم وتوجه مساعيهم ومجهوداتهم.

الحواسيب، نظرية الأعداد، وهذا الكتاب

هنا أرغب في قول بعض الكلمات عن استخدام الحواسيب (الكمبيوترات) في هذا الكتاب. أنا لا أتوقع ولا أطلب من القارئ استخدام برامج كمبيوتر ذات مستوى عالٍ مثل Maple ، Mathematica، PART أو Derive ، وإن معظم التمارين (ما عدا

المشار لها) يمكن الإجابة عنها باستخدام آلة حاسبة بسيطة. لا شك أن الكمبيوترات تمكننا من التعامل مع أعداد كبيرة، لكن هدفنا الأساسي دائماً هو استيعاب المفاهيم والعلاقات. لذلك إذا كان لي أن أُصدر حكماً بقبول أو رفض استخدام أجهزة الكمبيوتر، فلا شك أنني سأمنع استخدامها.

على كل حال، كأي قاعدة جيدة، فإن لها شواذ. أولاً، أن إحدى أفضل الطرق لفهم موضوع معين هي شرحها لشخص آخر؛ لذا إذا كنت تعرف القليل عن كيفية كتابة برامج الكمبيوتر، فسوف تجد أنه من المفيد للغاية أن تشرح للكمبيوتر كيف ينجز الخوارزميات الموصوفة في هذا الكتاب. بتعبير آخر، لا تعتمد على برامج الكمبيوتر الجاهزة، بل اعمل البرنامج بنفسك. أفضل الموضوعات لتنفيذ هذا الأسلوب هي الخوارزمية الإقليدية Euclidean algorithm (الفصلين 5,6)، نظام التعمية RSA (الفصول 18 - 16)، التعاكس التربيعي (الفصل 25)، كتابة الأعداد كمجموع مربعين (الفصلين 26,27)، اختبار الأولية (الفصل 19)، وتوليد نقاط نسبية على منحنيات ناقصية (الفصل 43).

الاستثناء الثاني لقاعدة " لا للكمبيوتر " هو توليد البيانات. الاكتشاف في نظرية الأعداد دائماً ما يعتمد على التجربة، والتي قد تستلزم فحص رزمة من البيانات لاكتشاف أنماط.

إن الكمبيوترات مفيدة جداً في توليد مثل هذه البيانات، وأيضاً تساعد أحياناً في البحث عن أنماط؛ لذلك أنا لا أعارض استخدامها لخدمة هذه الأهداف.

لقد ضَمَّنت التمارين بعدد من التمارين الحاسوبية والمشاريع الحاسوبية لتشجيعك على استخدام الكمبيوتر كأداة لمساعدتك على الفهم ولتبحث في نظرية الأعداد. بعض هذه التمارين يمكن تنفيذها على كمبيوتر صغير (أو حتى على حاسبة قابلة للبرمجة)، بينما الأخرى تتطلب أجهزة متطورة و/أو لغات برمجة.

بالنسبة للكثير من البرامج، لم أقم بإعطاء صياغة دقيقة لها، حيث إن جزءاً من البرنامج هو ماذا يجب على المستخدم أن يقوم بإدخاله بالضبط وما هو الشكل الذي يجب أن يأخذه الناتج بالضبط. لاحظ أن برنامج الكمبيوتر الجيد يجب أن يتضمن الميزات التالية:

- مكتوب بشكل واضح يشرح ماذا يعمل البرنامج، كيفية استخدامه، ما هي مدخلاته، وما هي مخرجاته.
- تعليقات داخلية شاملة تشرح طبيعة عمل البرنامج.
- معالجة الخطأ بشكل كامل مع وجود رسائل معلوماتية عن الخطأ.

على سبيل المثال، إذا كان $a = b = 0$ ، فإن $\gcd\left(a,b\right)$ يجب أن يُعطي رسالة الخطأ " $\gcd\left(0,0\right)$ is undefined " ($\gcd\left(0,0\right)$ غير مُعَرَّف) بدلاً من أن يَدْخُل البرنامج في حلقة لا نهائية (infinite loop)، أو يُعطي رسالة الخطأ (division by zero) (قسمة على صفر).

عندما تقوم بكتابة برامجك الخاصة، حاول أن تجعلها سهلة ومتعددة الاستخدام قدر الإمكان؛ لأنك سترغب في نهاية المطاف بربط القطع مع بعضها لتشكيل مجموعتك الخاصة بنظرية الأعداد الروتينية.

إن المغزى هو أن الكمبيوتر مفيد كأداة للتجربة، ويمكنك أن تتعلم الكثير بتدريس الكمبيوتر كيف يُنجز حسابات نظرية الأعداد، ولكن عندما تكون قد تعلمت واستوعبت الموضوع أولاً، بينما البرمجيات الجاهزة ما هي إلا مجرد عُكَّاز يمنعك من أن تتعلم المشي بمفردك.

جوزيف سيلفرمان

المحتويات

Contents

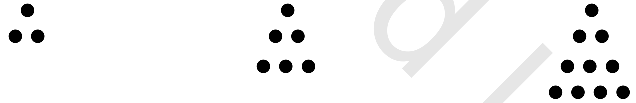
الجــزء الثــاني

الفصل التاسع والعشرون

الأعداد المربعة – المثلثية

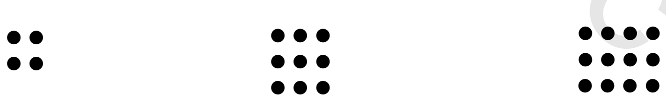
Square-Triangular Numbers Revisited

بعض الأرقام "شكلية"، بمعنى يمكن وضعها في شكل منتظم ما. فمثلاً، العدد المربع n^2 يمكن ترتيبه على شكل مربع n في n. نفس الشيء، الرقم المثلثي هو رقم يمكن ترتيبه على شكل مثلث. الأشكال التالية تبين بعض الأعداد المثلثية وبعض الأعداد المربعة.



$1+2=3$ $\quad 1+2+3=6 \quad$ $1+2+3+4=10$

أعداد مثلثية



$2^2=4 \quad 3^2=9 \quad 4^2=16$

أعداد مربعة

الأعداد المثلثية تشكل عن طريق الإضافة

$$1+2+3+\cdots+m$$

لقيم مختلفة للعدد m. لقد أوجدنا صيغة للعدد المثلثي m^{th} في الفصل الأول،

$$1+2+3+\cdots+m=\frac{m(m+1)}{2}$$

هنا قائمة لأولى الأعداد المثلثية والمربعة.

أعداد مثلثية:

$$1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,66,78,91,105$$

أعداد مربعة:

$$1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169$$

في الفصل الأول ناقشنا مسألة "تربيع المثلث"، ووجدنا أرقاماً مربعة هي أيضاً أرقام مثلثية. وأظهرت قائمتنا القصيرة مثالين، 1 (والذي لا يعد ذا أهمية كبيرة) و 36. هذا يعني أن 36 قطعة يمكن ترتيبها على شكل مربع 6 في 6، ويمكن ترتيبها أيضاً على شكل مثلث بثماني صفوف. لقد طلب منك أحد تمارين الفصل الأول إيجاد مثال أو مثالين إضافيين عن أعداد مربعة – مثلثية وطلب منك التفكير في إجابة السؤال عن عدد هذه الأعداد. باستخدام العمق الرياضي قمنا بإنجاز الفصول العشرين اللاحقة، وسنشرع الآن بتطوير طريقة لإيجاد جميع الأعداد المربعة – المثلثية. الأعداد المثلثية تأتي على الشكل $m(m+1)/2$ والأعداد المربعة تأتي على الشكل n^2، لذلك فإن الأعداد المربعة – المثلثية هي حلول المعادلة $n^2=\frac{m(m+1)}{2}$ حيث m , n أعداد صحيحة موجبة. إذا ضربنا الطرفين بالعدد 8 وبقليل من الجبر نحصل على:

$$8n^2 = 4m^2 + 4m = (2m+1)^2 - 1$$

وبعمل التعويض :

$$x = 2m+1 \quad , \quad y = 2n$$

نحصل على المعادلة :

$$2y^2 = x^2 - 1$$

والتي سنكتبها على الشكل :

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

حلول هذه المعادلة تعطي الأعداد المربعة – المثلثية لتكون على الشكل :

$$m = \frac{x-1}{2} \quad , \quad n = \frac{y}{2}$$

بالمحاولة والخطأ نلاحظ أن أحد الحلول هو $(x,y)=(3,2)$ ، والتي تعطي العدد المربع – المثلثي $(m,n)=(1,1)$. بقليل من التجربة (أو بمعرفة حقيقة أن 36 عدد مربع - مثلثي)، سنجد حلاً آخر $(x,y)=(17,12)$ والذي يقابل $(m,n)=(8,6)$. باستخدام الكمبيوتر ، يمكننا البحث عن حلول أكثر بالتعويض بالقيم $y=1,2,3,\ldots$ ومن ثم فحص فيما إذا كان $1+2y^2$ مربعاً. إن الحل الثالث هو $(x,y)=(99,70)$ والذي يعطينا العدد المربع – المثلثي الجديد $(m,n)=(49,85)$. بكلمات أخرى، 1225 هو عدد مربع – مثلثي ، حيث :

$$35^2 = 1225 = 1+2+3+\cdots+48+49$$

ما هي الأدوات التي يمكن أن نستخدمها لحل المعادلة ؟

$$x^2 - 2y^2 = 1 \quad ?$$

إحدى الطرق التي قمنا باستخدامها سابقاً بشكل متكرر هي طريقة التحليل. نجد أن :

$$x^2 - 2y^2 = \left(x + y\sqrt{2}\right)\left(x - y\sqrt{2}\right)$$

على سبيل المثال ، الحل $(x, y) = (3,2)$ يمكن كتابته على الشكل :

$$1 = 3^2 - 2 \cdot 2^2 = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$$

الآن انظر ماذا يحدث إذا ربعنا طرفي هذه المعادلة :

$$\begin{aligned} 1 = 1^2 &= \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2 \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^2 \\ &= \left(17 + 12\sqrt{2}\right)\left(17 - 12\sqrt{2}\right) \\ &= 17^2 + 2 \cdot 12^2 \end{aligned}$$

لذلك من خلال "تربيع" الحل $(x, y) = (3,2)$ ، نكون قد أنشأنا الحل اللاحق $(x, y) = (17,12)$.

هذا الإجراء يمكن تكراره لإيجاد حلول أكثر. لذلك ؛ تكعيب الحل $(x, y) = (3,2)$ يعطي :

$$\begin{aligned} 1 = 1^3 &= \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^3 \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^3 \\ &= \left(99 + 70\sqrt{2}\right)\left(99 - 70\sqrt{2}\right) \\ &= 99^2 - 2 \cdot 70^2 \end{aligned}$$

وبأخذ القوة الرابعة نحصل على :

$$\begin{aligned}1=1^4&=\left(3+2\sqrt{2}\right)^4\left(3-2\sqrt{2}\right)^4\\&=\left(577+408\sqrt{2}\right)\left(577-408\sqrt{2}\right)\\&=577^2-2\cdot 408^2\end{aligned}$$

لاحظ أن القوة الرابعة تعطينا عدداً مربعاً – مثلثياً جديداً، $(m,n)=(288,204)$. عندما نجري الحسابات بهذا الشكل فليس من الضروري أن يظهر الحل الأصلي في القوى الكبيرة. بدلاً من ذلك يمكننا فقط أن نضرب الحل الأصلي بالحل الحالي لنحصل على عدد لاحق. لذلك لإيجاد حل القوة الخامسة ؛ نضرب الحل الأصلي $3+2\sqrt{2}$ بحل القوة الرابعة $577+408\sqrt{2}$. هذا يعطي :

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(577+408\sqrt{2}\right)=3363+2378\sqrt{2}$$

نقرأ من أن الحل الخامس هو $(x,y)=(3363,2378)$. بالاستمرار بهذا الأسلوب، يمكننا بناء قائمة للأعداد المربعة – المثلثية.

x	y	m	n	$n^2=\dfrac{m(m+1)}{2}$
3	2	1	1	1
17	12	8	6	36
99	70	49	35	1225
577	408	288	204	41616
3363	2378	1681	1189	1413721
19601	13860	9800	6930	48024900
114243	80782	57121	40391	1631432881
665857	470832	332928	235416	55420693056

كما ترى فإن هذه الأعداد المربعة – المثلثية تصبح كبيرة جدًّا.

برفع $3+2\sqrt{2}$ لقوى أعلى فأعلى، يمكننا إيجاد حلول أكثر للمعادلة:

$$x^2-2y^2=1$$

والتي تعطينا أعداداً غير منتهية من الأعداد المربعة – المثلثية. لذلك؛ فهناك عدد لا نهائي من الأعداد المربعة – المثلثية، وهذه هي إجابة سؤالنا الأصلي، ولكننا نسأل الآن فيما إذا كان هذا الإجراء ينتج جميع هذه الأعداد. والجواب هو نعم، ولن نستغرب إذا قمنا بتعلم أسلوب الانحدار لنتحقق من هذه الحقيقة.

نظرية (٢٩,١) (نظرية الأعداد المربعة – المثلثية)

(a) كل حل من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة للمعادلة

$$x^2-2y^2=1$$

يُستنتج من خلال رفع العدد $3+2\sqrt{2}$ لقوى مختلفة. أي أن الحلول (x_k,y_k) يمكن إيجادها جميعاً كما يلي:

$$x_k+y_k\sqrt{2}=\left(3+2\sqrt{2}\right)^k \qquad , \qquad k=1,2,3,\ldots$$

(b) كل عدد مربع – مثلثي $n^2=\frac{1}{2}m(m+1)$ يُعطى من خلال:

$$m=\frac{x_k-1}{2} \quad , \quad n=\frac{y_k}{2} \quad , \quad k=1,2,3,\ldots$$

حيث الأزواج (x_k,y_k) هي الحلول الناتجة من (a).

البرهان

الشيء الوحيد الذي يجب أن نتحقق منه هو: إذا كان (u,v) أي حل للمعادلة $x^2-2y^2=1$ ، فهل هذا الحل ناتج من رفع الحل $(3,2)$ لقوة ما. بكلمات أخرى، يجب أن نبين أن $u+v\sqrt{2}=\left(3+2\sqrt{2}\right)^k$ لقيمة ما للمتغير k. إننا نثبت ذلك باستخدام أسلوب الانحدار. إليك خارطة الطريق. إذا كانت $u=3$ ، فإن $v=2$ ، لذلك لا يوجد شيء حقيقي لنتحقق منه؛ لذلك سنفرض أن $u>3$ ، وسنبين أنه يوجد تبعاً لذلك حل آخر (s,t) من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث:

$$u+v\sqrt{2}=\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(s+t\sqrt{2}\right) \quad , \quad s<u$$

لماذا يساعدنا هذا في البرهان؟ حسناً، إذا كان $(s,t)=(3,2)$ ، نكون قد أنجزنا المطلوب، خلاف ذلك، يجب أن يكون s أكبر من 3؛ لذلك يمكننا عمل الشيء نفسه مبتدئين من (s,t) لإيجاد حل جديد (q,r) ، حيث:

$$s+t\sqrt{2}=\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(q+r\sqrt{2}\right) \quad , \quad q<s$$

هذا يعني أن:

$$u+v\sqrt{2}=\left(3+2\sqrt{2}\right)^2\left(q+r\sqrt{2}\right)$$

الآن، إذا كان $(q,r)=(3,2)$ ؛ فإن البرهان ينتهي، وإذا كان لا، فإننا سوف نطبق الإجراء مرة أخرى، بالاستمرار بهذه الطريقة، نلاحظ أن هذه العلمية لا يمكن أن تستمر إلى المالانهاية؛ لأننا في كل مرة نحصل على حل جديد، تكون فيه قيمة x أصغر. لكن جميع هذه القيم هي أعداد صحيحة موجبة، لذلك لا يمكنها التناقص بشكل لا نهائي، لذلك نحصل في النهاية على $(3,2)$ كحل، مما يعني أننا في النهاية نختم بكتابة $u+v\sqrt{2}$ كقوة للعدد $3+2\sqrt{2}$.

لذلك سنبدأ الآن بحل (u,v) عندما $u>3$ ، وسنبحث عن حل (s,t) له الخاصية :

$$u+v\sqrt{2}=\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(s+t\sqrt{2}\right) \quad , \quad s<u$$

بإجراء عملية الضرب للطرف الأيمن في المعادلة ، نكون بحاجة لحل المعادلة :

$$u+v\sqrt{2}=(3s+4t)+(2s+3t)\sqrt{2}$$

للمجهولين s , t. بعبارة أخرى نحن بحاجة لحل :

$$u=3s+4t \qquad , \qquad v=2s+3t$$

وبسهولة يكون الجواب :

$$s=3u-4v \qquad , \qquad t=-2u+3v$$

دعنا نتحقق من أن (s,t) هذه تعطي حلاً فعلاً.

$$\begin{aligned} s^2-2t^2 &= (3u-4v)^2-2(-2u+3v)^2 \\ &= \left(9u^2-24uv+16v^2\right)-2\left(4u^2-12uv+9v^2\right) \\ &= u^2-2v^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

إذاً (u,v) حل ، وهذا جيد. هناك شيئان آخران نحن بحاجة لنتحقق منهما. أولهما ، أننا بحاجة للتأكد من أن s , t كليهما موجب. ثانيهما إننا بحاجة للتأكد من أن $s<u$ ، لأننا نريد حل جديد يكون "أصغر" من الحل الأصلي.

من السهل أن نرى أن s موجب من خلال حقيقة أن : $u^2=1+2v^2>2v^2$ ، إذاً $u>\sqrt{2}\,v$.

ثم :

$$s = 3u - 4v > 3\sqrt{2}\,v - 4v = \left(3\sqrt{2} - 4\right)v > 0$$

لأن $3\sqrt{2} \approx 4\cdot 242$ أكبر من 4.

إثبات أن t موجب يتم بعمل لعبة بسيطة. وهذه إحدى طرق عمل ذلك :

$u > 3$ فَرض.

$u^2 > 9$ بتربيع الطرفين.

$9u^2 > 9 + 8u^2$ بإضافة $8u^2$ للطرفين.

$9u^2 - 9 > 8u^2$ بطرح 9 من الطرفين.

$u^2 - 1 > \frac{8}{9}u^2$ بقسمة الطرفين على 9.

$2v^2 > \frac{8}{9}u^2$ لأن $u^2 - 2v^2 = 1$.

$v > \frac{2}{3}u$ بالقسمة على 2 وبأخذ الجذور التربيعية.

باستخدام المتباينة الأخيرة ، يكون الآن من السهل أن نتحقق من أن t عدد موجب.

$$t = -2u + 3v > -2u + 3\cdot\frac{2}{3}u = 0$$

نحن نعلم الآن أن s , t موجبان ، ومن ذلك ينتج أن $s < u$ ؛ لأن $u = 3s + 4t$. وهذا يكمل تحققنا من أن عملية الانحدار تعمل وبذلك يكتمل برهاننا على نظرية الأعداد المربعة – المثلثية.

إن نظرية العدد المربع – المثلثي تقول إن كل حل $\left(x_k, y_k\right)$ في مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة للمعادلة :

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

يمكن استنتاجه من خلال إجراء الضرب :

$$x_k + y_k\sqrt{2} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^k \quad \text{حيث} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

الجدول الوارد في بداية هذا الفصل يبين أن حجم الحلول ينمو بشكل سريع جدًّا مع تزايد قيمة k. نود هنا أن نحصل على فكرة أكثر دقة تزودنا بمقدار كبر الحل k^{th}. لعمل ذلك، نلاحظ أن الصيغة الأخيرة تبقى صحيحة إذا استبدلنا العدد $\sqrt{2}$ بالعدد $-\sqrt{2}$. أي أنه أيضاً صحيح أن :

$$x_k - y_k\sqrt{2} = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^k \quad \text{حيث} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

الآن إذا أضفنا هاتين الصيغتين لبعضهما وقسمنا على 2 ، نحصل على الصيغة التالية :

$$x_k = \frac{\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2 + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^2}{2}$$

نفس الشيء ، إذا طرحنا الصيغة الثانية من الصيغة الأولى وقسمنا على $2\sqrt{2}$ ، نحصل على الصيغة :

$$x_k = \frac{\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2 + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^2}{2}$$

هاتان الصيغتان للعددان x_k , y_k مفيدة لأن

$$3 + 2\sqrt{2} \approx 5.82843 \qquad , \qquad 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.17157$$

إن حقيقة أن $3 - 2\sqrt{2}$ أقل من 1 تعني أننا عندما نأخذ قوة كبيرة للعدد $3 - 2\sqrt{2}$ سوف نحصل على عدد صغير جدًّا جدًّا ، مثلاً :

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)^{10} \approx 0.0000000221$$

لذلك :

$$x_{10} \approx \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{10}}{2} \approx 22619536.99999998895$$

$$y_{10} \approx \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{10}}{2\sqrt{2}} \approx 15994428.000000007815$$

لكننا نعلم أن x_{10} , y_{10} عددان صحيحان ؛ لذلك الحل 10^{th} (العاشر) هو :

$$\left(y_{10}, x_{10}\right) = (22619537,15994428)$$

من ذلك يمكننا إيجاد العدد المربع – المثلثي العاشر $n^2 = m(m+1)/2$ والتي تعطي :

$$n = 7997214 \quad , \quad m = 11309768$$

أيضاً يظهر من صيغتي x_k , y_k لماذا تكبر الحلول بشكل سريع ، حيث :

$$x_k \approx \frac{1}{2}(5.82843)^k \quad , \quad y_k \approx \frac{1}{2\sqrt{2}}(5.82843)^k$$

لذلك فإن كل حل لاحق أكبر بخمس مرات من الحل السابق. رياضيًّا ، نقول إن حجم الحلول يتزايد بشكل أسي. لاحقاً ، عندما ندرس المنحنيات الناقصية في الفصل 43 ، سنرى بعض المعادلات التي حلولها تتزايد بشكل أسرع من ذلك !

تمارين

(٢٩.١) أوجد أربعة حلول صحيحة موجبة للمعادلة $x^2 - 5y^2 = 1$

[مساعدة : استخدم المحاولة والخطأ لإيجاد حل صغير (a,b) ومن ثم خذ قوى للعدد $a + b\sqrt{5}$.]

(٢٩,٢) (a) في الفصلين 26 و 27 أي الأعداد يمكن كتابتها كمجموع مربعين. جمّع بعض البيانات وحاول عمل تخمين عن أي الأعداد يمكن كتابتها كمجموع عددين مثلثيين. مثال، $6+1=7$ و $15+10=25$ كل منهما عبارة عن مجموع عددين مثلثيين، بينما 19 لا.

(b) برهن أن تخمينك في (a) صحيح.

(c) أي الأعداد يمكن كتابتها كمجموع عددين، أو ثلاثة أعداد مثلثية؟.

(٢٩,٣) (a) لتكن (x_k, y_k) حيث $k=0,1,2,3,\dots$ هي حلول المعادلة $x^2-5y^2=1$ المشار إليها في النظرية 29.1. املأ الفراغات بأعداد موجبة بحيث تكون الصيغ التالية صحيحة، ثم برهنها.

$$x_{k+1} = \_\_\, x_k + \_\_\, y_k \quad , \quad y_{k+1} = \_\_\, x_k + \_\_\, y_k$$

(b) املأ الفراغات بأعداد موجبة بحيث تكون الجملة التالية صحيحة: إذا كان (m,n) يعطي عدداً مربعاً – مثلثيًّا، أي، إذا كان الزوج (m,n) يحقق الصيغة $n^2 = m(m+1)$ فإن:

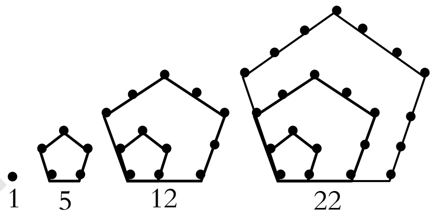
$$\left(1 + \_\_\, m + \_\_\, n \,,\, 1 + \_\_\, m + \_\_\, n\right)$$

أيضاً تعطي عدداً مربعاً – مثلثيًّا.

(c) إذا كان L عدداً مربعًّا – مثلثي، اشرح لماذا $1+17L+6\sqrt{L+8L^2}$ هو العدد المربع – المثلثي الأكبر اللاحق.

(٢٩,٤) يسمى عدد n عدد خماسي إذا أمكن ترتيب n من القطع على شكل خماسي. أول أربعة أعداد خماسية هي 1 , 5 , 12 و 22 ، كما هو مبين في الشكل 29.1 . يجب عليك أن تتصور كل خماسي يجلس في داخل الخماسي

الأكبر اللاحق. العدد الخماسي النوني $\left(n^{th}\right)$ يُشَكَّل باستخدام الخماسي الخارجي الذي يحوي كل ضلع من أضلاعه n قطعة.



الشكل رقم (٢٩,١). أول أربعة أعداد خماسية.

(a) ارسم صورة العدد الخماسي الخامس 5^{th}.

(b) اكتشف النمط وأوجد صيغة بسيطة للعدد الخماسي النوني 5^{th} .

(c) ما هو العدد الخماسي 10^{th} ؟ ما هو العدد الخماسي 100^{th} ؟