الباب الثاني

التقدير

- تقدير المعلمة
- التقدير غير المعلمي

الفصل الخامس

تقدير المعلمة
Parametric Estimation

(٥,١) مقدمة
Introduction

سنعرض في هذا الفصل تقنيات تقدير المعالم المجهولة. يتم عادة تقدير هذه المعالم باستخدام البيانات المتوفرة والتي يتم تجميعها من نماذج الموثوقية قيد الدراسة. وعموما تكون البيانات المتاحة في دراسات الموثوقية مكونة من أزمنة حياة ومجموعة البيانات البسيطة التي يمكن الحصول عليها تكون عبارة عن عينة عشوائية بسيطة (بمعنى أنها مستقلة ومتطابقه ومأخوذة من نفس التوزيع) ونرمز لها بالرمز $\boldsymbol{T} = \left(T_1, T_2, \cdots, T_n\right)$ حيث n هو حجم العينة.

سنرمز بالمتغير العشوائي T لزمن حياة عنصر ما أو نظام ما وأنه يتبع توزيعا إحتماليا دالة كثافة إحتماله $f(t;\theta)$ ، حيث $\theta = \left(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m\right)$ ، $m \geq 1$ يرمز إلى متجه من المعالم المجهولة والمراد تقديرها.

سنبدأ أولاً ببعض خصائص مقدرات النقطة. وحيث أن مقدرات النقطة نادرا ما يعطي القيمة الحقيقية للمعالم المجهولة فإننا نستخدم مقدرات الفترة لدراسة دقة المقدرات النقطية. سنهتم في هذا الفصل بمقدري النقطة والفترة باستخدام الطرق الكلاسيكية Classical وطريقة بييز Bayes.

يعتبر الجدل الدائر بين الإحصائيين في الإحصاء حول التقدير هـو نفس الجـدل الدائر حول معنى الاحتمال ، التفسير الكلاسيكي للاحتمال مقابـل المعنـى الشخـصي للاحتمال. يعتقد بعض الإحصائيون أنه يجب أن نفترض أن المعالم المجهولة عبارة عن مـتغيرات عـشوائية ومـن ثـم فيكـون لهـا توزيعـات قبليـة prior distributions يجـب اختيارها في كل مشكلة إحصائية. ويعتقد هـذا الـصنف بـأن التوزيعـات القبليـة تكـون توزيعات شخصية بمعنى أنهـا تعكـس رؤيـة الإحـصائي بالمشكلة قيـد الدراسـة والـتي يعتمد فيها على خبرته بالمشكلة التي يدرسها والتي تمده ببعض المعلومات عن ما هـي القيمة الحقيقية للمعلمة المجهولة المراد تقديرها. كمـا أنهـم يعتقـدون أيـضاً أن التوزيـع الاحتمالي القبلي لا يتغير عـن أي توزيـع إحتمـالي أسـتخدم في مجـال الإحـصاء وأنـه يحقـق جميـع قـوانين الاحتمـالات المـستخدمة فـي نظريـة الاحتمـالات. يطلـق علـى الإحـصائيين الـذين يتبنـون هـذه الفكـرة بالإحـصائيين الـذين يتبنـون فلـسفة بييـز فــي الإحصاء.

يعتقد إحصائيون آخرون أنه ليس مـن المناسـب أن نفـترض أن المعـالم المجهولـة عبارة عن متغيرات عشوائية ومن ثـم لا داعـي لفـرض توزيعـات إحتمايـة لهـا وذلـك لأن هذه المعالم ما هي إلا قيم مجهولة وليست مـتغيرات عـشوائية وان قيمهـا الحقيقيـة غير معلومة للإحصائي المهتم بمعرفة قيم المعالم. يعتقد هؤلاء الإحصائيون بأنـه يمكـن إفتراض التوزيع القبلبي للمعالم المجهولة فقـط عنـدما تتـوفر معلومـات واسـعة سـابقة حول التكرارات النسبية والـتي بهـا يمكـن تحديـد القـيم الماضـية لهـذه المعـالم المجهولـة. وبالتالي فإنه يمكن لإحصائيين مـختلفين أن يـختارا نفس التوزيع الاحتمالي الصحيح الذي يمكن استخدامه. يتفق الفريقان فـي أنه عندما يمكـن إختيـار التوزيـع الاحتمـالي الصحيح السابق للمعالم المجهولة فإن تقريب بييز يكون أفـضل مـن الناحيـة التطبيقيـة ومفيد.

(٥,٢) التقريب الكلاسيكي
Classical Approach

سنقدم في هذا الجزء التقريب الكلاسيكي المستخدم في تقدير مجموعة من المعالم المجهولة وفي هذا التقريب لا نفترض توزيعات إحتمالية قبلية لهذه المعالم المجهولة. سنبدأ بتقدير النقطة ثم بعد ذلك سنتعرض لتقدير الفترة.

(٥,٢,١) تقدير النقطة

(٥,٢,١,١) تعاريف

تعريف (٥,١)

١- تقدير النقطة هو إحصاءة تستخدم لتقدير معلمة مجتمع.

٢- يسمى توزيع الإحصاءة بتوزيع المعاينة.

من المعلوم أن الإحصاءة عبارة عن دالة في العينة العشوائية ومن ثم فإن قيمتها يمكن أن تختلف من عينة لأخرى وذلك لأنه ليس من الضروري أن نحصل على نفس القيمة التي يمكن الحصول عليها للإحصاءة عندما نستخدم عينات عشوائية مختلفة. يطلق على الإحصاءة بتقدير النقطة point estimator أما قيمتها فتسمى مقدر النقطة point estimate للمعلمة المجهولة.

سنذكر فيما يلي بعض خواص المقدر الجيد.

تعريف (٥,٢)

١- يكون مقدر النقطة غير متحيز unbiased estimator للمعلمة θ إذا وفقط إذا كان $E[\theta]=\theta$.

٢- بالمثل تكون الإحصاءة $\hat{\theta}$ مقدرا غير متحيز للمعلمة $q(\theta)$ إذا وفقط إذا كان $E\left[\hat{\theta}\right]=q(\theta)$.

تفسير

لا يمكن في أي مشكلة من مشاكل الإحصاء أن نحصل عبى مقدر لمعلمة ما تساوي القيمة الفعلية للمعلمة المجهولة. ومن ثم فإنه من الخواص المرغوب فيها عندما

نختار مقدرا لمعلمة مجهولة أن تكون قيمه المتوقعة تساوي القيمة الحقيقية للمعلمة المجهولة. وللتحقق من أنه المقدر يتمتع بهذه الخاصية يجب إما أن نحسب القيمة المتوقعة للمقدر باستخدام خواص التوقع أو بحساب توزيع المعاينة للمقدر.

مثال (٥,١)

ليكن لدينا عينة عشوائية بسيطة $T_1, T_2, \cdots, T_n$ مأخوذة من توزيع ذي الحدين بالمعلمتين p، n ، إصطلاحا سنكتبها بالصورة $T_i \sim B(n,p), i = 1,2,\cdots,n$ ونفترض أن لدينا الإحصاءة التالية :

$$\hat{\theta} = \tfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} T_i$$

من السهل أن نتحقق هذه الإحصاءة تكون مقدر غير متحيز للمعلمة p. لدينا :

$$\begin{aligned} E\left[\hat{\theta}\right] &= E\left[\tfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} T_i\right] \\ &= \tfrac{1}{n^2} E\left[\sum_{i=1}^{n} T_i\right] \\ &= \tfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E\left[T_i\right] \\ &= \tfrac{1}{n^2} nE\left[T_1\right] \\ &= \tfrac{1}{n} n\,p \\ &= \tfrac{1}{n} n\,p \end{aligned}$$

والآن سنوضح أنه في نفس المثال أن المقدر غير المتحيز غير موجود. ليكن $q(\theta) = \frac{1}{p}$ ، هل يوجد مقدر غير متحيز لـ $q(\theta)$ ؟ وللإجابة على هذا السؤال نفرض أن هذا المقدر موجود ونرمز له بالرمز δ. وحيث أن δ مقدرا غير متحيز لـ $q(\theta)$ ، إذن لدينا :

$$E\left[\delta\right] = q(\theta) = \frac{1}{p}$$

ومن ناحية أخرى وباستخدام التعريف لدينا :

$$E[\delta] = \sum_{k=0}^{n} \delta(k)\, P(T=k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \delta(k) \binom{n}{k} p^k\, (1-p)^{n-k}$$

بتجميع هذا التعبير نحصل على :

$$\sum_{k=0}^{n} \delta(k) \binom{n}{k} p^k\, (1-p)^{n-k} = \frac{1}{p}$$

والآن نأخذ النهاية عندما $p \to 0$ في العلاقة السابقة نجد أن الطرف الأيسر يؤول إلى $\delta(0)$ ، وهي قيمة محدودة ، بينما يؤول الطرف الأيمن إلى اللانهاية ، وهذا يقودنا إلى تعارض وذلك بسبب الفرض الخاطئ من البداية وهو إفتراض أن المقدر غير المتحيز موجود ومن هنا نستطيع الجزم بأنه لا يوجد مقدر غير متحيز للمعلمة $q(\theta) = \frac{1}{p}$.

مثال (٥,٢)

ليكن لدينا عينة عشوائية بسيطة $T_1, T_2, \cdots, T_n$ مأخوذة من توزيع منتظم على الفترة (a,b) حيث أن $a=0$ ، $b=\theta$ ، إصطلاحا سنكتبها بالصورة $T_i \sim U(0,\theta), i=1,2,\cdots,n$.

سنوضح في هذا المثال كيفية الحصول على مقدر غير متحيز للمعلمة المجهولة θ وذلك باستخدام مقدر متحيز لـ θ. سنبدأ أولاً بتوضيح أن الإحصاءة $T_{(n)} = \max\{T_1, T_2, \cdots, T_n\}$ تكون مقدر متحيز للمعلمة θ. ولإثبات ذلك نوجد أولاً توزيع هذه الإحصاءة. حيث أن $T_i \sim U(0,\theta), i=1,2,\cdots,n$ إذن دالة كثافة احتمال ودالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي T_i هما على الترتيب :

$$f_{T_i}(t;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \le t \le \theta, \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

و

$$F_{T_i}(t;\theta)=\begin{cases}0 & t<0,\\ \frac{t}{\theta}, & 0\le t\le\theta,\\ 1 & t>\theta.\end{cases}$$

والآن نستنتج دالة التوزيع التراكمية للإحصاءة $T_{(n)}$:

$$\begin{aligned}F_{T_{(n)}}(t;\theta)&=P\left(T_{(n)}\le t\right)\\&=P\left(\max\{T_1,T_2,\cdots,T_n\}\le t\right)\\&=P\left(T_1\le t,T_2\le t,\cdots,T_n\le t\right)\end{aligned}$$

وحيث أن المتغيرات العشوائية $T_1,T_2,\cdots,T_n$ مستقلة ، إذن :

$$\begin{aligned}F_{T_{(n)}}(t;\theta)&=P\left(T_1\le t\right)P\left(T_2\le t\right)\cdots P\left(T_n\le t\right)\\&=F_{T_1}(t)\,F_{T_2}(t)\cdots F_{T_n}(t)\\&=\left[F_{T_1}(t)\right]^n\end{aligned}$$

ومن ثم فإنه وباستخدام العلاقة بين كل من دالة التوزيع التراكمية ودالة كثافة الاحتمال يمكن الحصول على دالة كثافة احتمال $T_{(n)}$ كالآتي :

$$\begin{aligned}f_{T_{(n)}}(t;\theta)&=\frac{d}{dt}F_{T_{(n)}}(t;\theta)\\&=n\left[F_{T_1}(t;\theta)\right]^{n-1}\frac{d}{dt}F_{T_1}(t;\theta)\\&=n\left[F_{T_1}(t;\theta)\right]^{n-1}f_{T_1}(t;\theta)\\&=\begin{cases}n\left[\frac{t}{\theta}\right]^{n-1}\frac{1}{\theta}, & 0\le t\le\theta,\\ 0, & o.w.\end{cases}\end{aligned}$$

وبالتالي يمكن حساب توقع الإحصاءة $T_{(n)}$ كالآتي :

$$E\left[T_{(n)}\right]=\int_0^\infty t\,f_{T_{(n)}}(t;\theta)\,dt$$

$$= \int_0^\infty t\ n\left[\tfrac{t}{\theta}\right]^{n-1} \tfrac{1}{\theta}\ dt$$
$$= \int_0^\infty n\theta \tfrac{t}{\theta}\left[\tfrac{t}{\theta}\right]^{n-1} \tfrac{1}{\theta}\ dt$$
$$= \tfrac{n\theta}{(n+1)}\int_0^\infty\ (n+1)\ \left[\tfrac{t}{\theta}\right]^{n} \tfrac{1}{\theta}\ dt$$
$$= \tfrac{n\theta}{(n+1)}\left[\tfrac{t}{\theta}\right]^{n+1}\Big|_{t=0}^{\theta}$$
$$= \tfrac{n}{(n+1)}\theta$$

يتضح من العلاقة السابقة توقع الإحصاءة $T_{(n)}$ مختلف عن المعلمة θ ، وبالتالي فإن الإحصاءة $T_{(n)}$ لا تكون مقدر غير متحيز للمعلمة θ. والآن نعرف الإحصاءة التالية :

$$T^* = \tfrac{n+1}{n}T_{(n)}$$

ومن ثم يمكن إيجاد توقع هذه الإحصاءة كالآتي :

$$E\left[T^*\right] = E\left[\tfrac{n+1}{n}T_{(n)}\right]$$
$$= \tfrac{n+1}{n}E\left[T_{(n)}\right]$$
$$= \tfrac{n+1}{n}\tfrac{n}{(n+1)}\theta$$
$$= \theta$$

وبالتالي فإن الإحصاءة T^* تكون مقدر غير متحيز للمعلمة θ.

مثال (٥,٣)

ليكن لدينا عينة عشوائية بسيطة $T_1, T_2, \cdots, T_n$ مأخوذة من توزيع أسي دالة كثافة احتماله :

$$f(t;\theta) = \tfrac{1}{\theta}\exp\{-\tfrac{1}{\theta}t\}; t > 0; \theta > 0$$

حيث θ معلمة مجهولة. سنوضح في هذا المثال أن متوسط العينة المعرف بالعلاقة

$$\hat{\theta} = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_i$$

يكون مقدر غير متحيز للمعلمة θ. لإثبات أن $\hat{\theta}$ مقدر غير متحيز للمعلمة θ ، يكفينا إثبات أن $E\left[\hat{\theta}\right]=\theta$. لدينا :

$$\begin{aligned}
E\left[\hat{\theta}\right] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_i\right] \\
&= \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}T_i\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[T_i\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[T_1\right] \\
&= \frac{1}{n}nE\left[T_1\right] \\
&= \frac{1}{n}n\theta \\
&= \theta
\end{aligned}$$

وهذا يوضح أن $\hat{\theta}$ مقدر غير متحيز للمعلمة θ. والآن نريد حساب تباين المقدر $\hat{\theta}$. لدينا :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[\hat{\theta}\right] &= \mathrm{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_i\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n}T_i\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\left[T_i\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\left[T_1\right] \\
&= \frac{1}{n^2}n\,\mathrm{Var}\left[T_1\right] \\
&= \frac{1}{n^2}n\theta^2 \\
&= \frac{1}{n}\theta^2
\end{aligned}$$

وتشير هذه النتيجة إلى أن تباين المقدر يتناقص كلما زاد حجم العينة.

يمكن الحصول على العديد من المقدرات غير المتحيزة لنفس المعلمة. والآن نفترض أن لدينا عددا من المقدرات غير المتحيزة لمعلمة ما θ ، ونريد إختيار أحد هذه المقدرات لنقدر به المعلمة θ. بالطبع يجب أن نختار المقدر الأفضل، وسيكون المقدر الأفضل من بين هذه المقدرات غير المتحيزة هو ذلك المقدر ذو أصغر تباين وذلك لأن قيمته في المتوسط ستكون الأقرب للقيمة الحقيقية للمعلمة.

عموما عندما يكون لدينا مقدران غير متحيزين لمعلمة ما فإننا نختار المقدر الذي تباينه أصغر.

تعريف (٥,٣)

ليكن $\hat{\theta}_1$ ، $\hat{\theta}_2$ مقدرين غير متحيزين للمعلمة θ. تسمى النسبة التالية :

$$\frac{Var(\hat{\theta}_1)}{Var(\hat{\theta}_2)}$$

بفاعلية efficiency $\hat{\theta}_1$ بالنسبة لـ $\hat{\theta}_2$.

تفسير

إذا كانت الفعالية أقل من 1 ، فإن المقدر غير المتحيز $\hat{\theta}_1$ يكون أفضل نسبيا من المقدر غير المتحيز $\hat{\theta}_2$ وذلك لأن تغاير $\hat{\theta}_1$ يكون أقل من تغاير $\hat{\theta}_2$. بالمثل إذا كانت الفعالية أكبر من 1 ، فإن المقدر $\hat{\theta}_2$ يكون أفضل نسبيا من المقدر $\hat{\theta}_1$.

مثال (٥,٤)

ليكن لدينا عينة عشوائية بسيطة مكونة من ثلاث مشاهدات T_1, T_2, T_3 مأخوذة من توزيع أسي بمتوسط θ وأن لدينا المقدران التاليان للمعلمة θ :

$$\hat{\theta}_2 = \tfrac{1}{6}(T_1 + 4T_2 + T_3) \ ، \ \hat{\theta}_1 = \tfrac{1}{3}(T_1 + T_2 + T_3)$$

ونريد حساب فاعلية $\hat{\theta}_1$ بالنسبة لـ $\hat{\theta}_2$. أولا سنوضح أن كل من المقدرين يكون مقدرا غير متحيز للمعلمة θ.

$$
\begin{aligned}
E\left[\hat{\theta}_1\right] &= E\left[\tfrac{1}{3}\left(T_1+T_2+T_3\right)\right] \\
&= \tfrac{1}{3}E\left[T_1+T_2+T_3\right] \\
&= \tfrac{1}{3}\left(E[T_1]+E[T_2]+E[T_3]\right) \\
&= \tfrac{1}{3}\left(3\theta\right) \\
&= \theta
\end{aligned}
$$

إذن المقدر $\hat{\theta}_1$ يكون غير متحيز للمعلمة θ.

والآن نثبت أن المقدر $\hat{\theta}_2$ أيضا غير متحيز للمعلمة θ

$$
\begin{aligned}
E\left[\hat{\theta}_2\right] &= E\left[\tfrac{1}{6}\left(T_1+4T_2+T_3\right)\right] \\
&= \tfrac{1}{6}E\left[T_1+4T_2+T_3\right] \\
&= \tfrac{1}{6}\left(E[T_1]+E[4T_2]+E[T_3]\right) \\
&= \tfrac{1}{6}\left(6\theta\right) \\
&= \theta
\end{aligned}
$$

والآن نحسب التباين،

نبدأ بتباين $\hat{\theta}_1$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[\hat{\theta}_1\right] &= \mathrm{Var}\left[\tfrac{1}{3}\left(T_1+T_2+T_3\right)\right] \\
&= \tfrac{1}{9}\mathrm{Var}\left[T_1+T_2+T_3\right] \\
&= \tfrac{1}{6}\left(\mathrm{Var}[T_1]+\mathrm{Var}[T_2]+\mathrm{Var}[T_3]\right) \\
&= \tfrac{1}{9}\left(3\theta^2\right) \\
&= \tfrac{1}{3}\theta^2
\end{aligned}
$$

نحسب تباين $\hat{\theta}_2$ كالآتي:

$$
\mathrm{Var}\left[\hat{\theta}_2\right] = \mathrm{Var}\left[\tfrac{1}{6}\left(T_1+4T_2+T_3\right)\right]
$$

$$= \tfrac{1}{36}\operatorname{Var}[T_1 + 4T_2 + T_3]$$
$$= \tfrac{1}{36}\left(\operatorname{Var}[T_1] + 16\operatorname{Var}[T_2] + \operatorname{Var}[T_3]\right)$$
$$= \tfrac{1}{36}\left(18\theta^2\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\theta^2$$

إذن فاعلية $\hat{\theta}_1$ بالنسبة لـ $\hat{\theta}_2$ هي :

$$\frac{\operatorname{Var}(\hat{\theta}_1)}{\operatorname{Var}(\hat{\theta}_2)} = \frac{\tfrac{1}{3}\theta^2}{\tfrac{1}{2}\theta^2} = \frac{2}{3}$$

ومن ثم فإن المقدر $\hat{\theta}_1$ يكون مفضل عن المقدر $\hat{\theta}_2$ وذلك لأن تباين $\hat{\theta}_1$ أصغر من تباين $\hat{\theta}_2$.

تعطي كتباينة كرامر–راو Cramer-Rao inequality الحد الأدنى لتباين مقدر غير متحيز لمعلمة ما θ. وقبل أن نعرض هذه المتباينة سنعرض تعريف معلومات فيشر Fisher information وبعض خصائصه.

تعريف (٥,٤)

ليكن لدينا عينة عشوائية بسيطة $\boldsymbol{T} = (T_1, T_2, \cdots, T_n)$ مأخوذة من توزيع معتمد على معلمة مجهولة θ دالة كثافة إحتماله $f(t;\theta)$ ، تعرف معلومات فيشر لهذه العينة، عندما تكون موجود، بالعلاقة التالية

$$I_n(\theta) = E\left[\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\boldsymbol{T};\theta)\right]^2$$

خصائص (٥,١)

١- $$I_n(\theta) = \operatorname{Var}\left[\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\boldsymbol{T};\theta)\right]$$
$$= -E\left[\tfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(\boldsymbol{T};\theta)\right]$$

٢- $$I_n(\theta) = n\,E\left[\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f(t;\theta)\right]^2$$
$$= n\,I_1$$

عرض (٥,١): (متباينة كرامر–راو)

ليكن T متغير عشوائي دالة كثافة أحتماله $f(t;\theta)$ وأن $\boldsymbol{T}=\left(T_1,T_2,\cdots,T_n\right)$ عينة عشوائية بسيطة من المتغير العشوائي T. تحت بعض شروط الإنتظام (أنظر الملحوظة ٥,١ الموضحة أدناه)، متباينة كرامر– راو تحقق العلاقة التالية:

$$\operatorname{Var}(\theta)\geq\frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}E\left[\hat{\theta}\right]\right)}{I_n(\theta)}\qquad(٥,١)$$

حيث أن $\hat{\theta}$ مقدر غير متحيز للمعلمة θ.

ملحوظة (٥,١)

١– عندما يتساوى تباين المقدر $\hat{\theta}$ مع الطرف الأيمن للمتباينة (٥,١)، فإن المقدر $\hat{\theta}$ يكون مقدر غير متحيز بأصغر تباين minimum-variance unbiased estimator للمعلمة θ. يمكن تطبيق المتباينة (٥,١) فقط عندما تكون المشتقة الجزئية الأولى للدالة $f(t;\theta)$ بالنسبة لـ θ موجودة، وأن مجال تعريف هذه الدالة لا يعتمد على المعلمة المجهولة θ.

٢– باستخدام خواص معلومات فيشر، يمكن إعادة كتابة متباينة كرامر– راو في الصورة التالية:

$$\operatorname{Var}(\theta)\geq\frac{1}{n\,E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(t;\theta)\right)^2\right]}\qquad(٥,٢)$$

مثال (٥,٥)

ليكن لدينا عينة عشوائية بسيطة ليكن لدينا عينة عشوائية بسيطة $T_1,T_2,\cdots,T_n$ مأخوذة من توزيع أسي دالة كثافة إحتماله $f(t;\theta)=\frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}t\right\};t>0;\theta>0$ حيث θ معلمة مجهولة. سنوضح في هذا المثال أن متوسط العينة المعرف بالعلاقة:

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_i$$

يكون مقدر غير متحيز بأصغر تباين للمعلمة θ. أثبتنا في مثال (٥,٣) أن $\hat{\theta}$ مقدر غير متحيز للمعلمة θ والآن نريد إثبات أن تباين هذا المقدر يكون أصغر تباين. لدينا للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيعا أسيا بدالة كثافة الاحتمال الموضحة أعلاه ما يلي :

$$\begin{aligned}\ln f(t;\theta) &= \ln\tfrac{1}{\theta}-\tfrac{1}{\theta}t\\ &= -\ln\theta-\tfrac{1}{\theta}t\end{aligned}$$

ومن ثم فإن :

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f(t;\theta) &= \tfrac{\partial}{\partial\theta}\left(-\ln\theta-\tfrac{1}{\theta}t\right)\\ &= -\tfrac{1}{\theta}+\tfrac{t}{\theta^2}\\ &= \tfrac{1}{\theta^2}\left(-\theta+t\right)\end{aligned}$$

وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned}E\left[\left(\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f(T;\theta)\right)^2\right] &= E\left[\left(\tfrac{1}{\theta^2}\left(-\theta+T\right)\right)^2\right]\\ &= E\left[\tfrac{1}{\theta^4}\left(\theta^2-2\theta T+T^2\right)\right]\\ &= \tfrac{1}{\theta^4}E\left[\left(\theta^2-2\theta T+T^2\right)\right]\\ &= \tfrac{1}{\theta^4}\left[E\left[\theta^2\right]-2\theta E\left[T\right]+E\left[T^2\right]\right]\\ &= \tfrac{1}{\theta^4}\left[\theta^2-2\theta E\left[T\right]+E\left[T^2\right]\right]\end{aligned}$$

وحيث أن للمتغير الأسي يكون لدينا :

$$E\left[T\right]=\theta \quad ، \quad \mathrm{Var}\left[T\right]=\theta^2 \, ،$$

$$E\left[T^2\right]=\mathrm{Var}\left[T\right]+\left(E\left[T\right]\right)^2=\theta^2+\theta^2=2\theta^2$$

وبالتالي فإن :

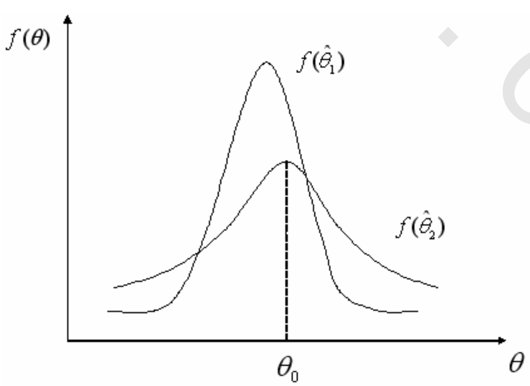
$$\begin{aligned}E\left[\left(\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f(T;\theta)\right)^2\right] &= \tfrac{1}{\theta^4}\left[\theta^2-2\theta^2+2\theta^2\right]\\ &= \tfrac{1}{\theta^2}.\end{aligned}$$

ومن ثم فإن الطرف الأيمن لمتباينة كرامر- راو يصبح :

$$\frac{1}{n\,E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(T;\theta)\right)^2\right]}=\frac{1}{\frac{n}{\theta^2}}=\frac{\theta^2}{n}$$

وهو نفس تباين المقدر $\hat{\theta}$ والذي حصلنا عليه في المثال (٥,٣). وبالتالي فإن المقدر $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_i$ يكون مقدر غير متحيز بأصغر تباين للمعلمة θ.

قدمنا حتى الآن خاصيتان من خواص مقدر النقطة وهما : التحيز والتغاير. وحيث أننا نبحث عن المقدر الجيد والذي يكون له مقدار كل من التحيز والتغاير صغيرا ، فإننا يجب أن نتخلص من المقدرات غير الجيدة. يوضح الشكل رقم (٥,١) دالتي كثافة احتمال مقدران $\hat{\theta}_1$ ، $\hat{\theta}_2$ للمعلمة θ حيث أن θ_0 هي القيمة الحقيقية للمعلمة θ. يتضح من الرسم أن تباين المقدر $\hat{\theta}_1$ أصغر من تباين المقدر $\hat{\theta}_2$ ولكن $\hat{\theta}_1$ مقدر متحيز ، وأن تباين المقدر $\hat{\theta}_2$ أكبر من تباين المقدر $\hat{\theta}_1$ ولكن $\hat{\theta}_2$ مقدر غير متحيز. للمفاضلة بين هذين المقدرين سنتبع خاصية التخلص من بين التحيز والتغاير. متوسط مربع الخطأ mean squared error لمقدر ما هو مقياس يدمج التحيز والتغاير.



الشكل رقم (٥,١). دالتي كثافة إحتمال مقدرين لمعلمة مجهولة θ .

تعريف (٥,٥)

إذا كان $\hat{\theta}$ مقدر للمعلمة θ ، إذن متوسط مربع الخطأ يعرف بالعلاقة التالية :

$$E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right]$$

يمكن تقسيم متوسط مربع الخطأ إلى عنصري التغاير والتحيز كالآتي :

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right] &= E\left[\hat{\theta}^2-2\hat{\theta}\theta+\theta^2\right] \\
&= E\left[\hat{\theta}^2\right]-2\,\theta E\left[\hat{\theta}\right]+\theta^2 \\
&= E\left[\hat{\theta}^2\right]-\left(E\left[\hat{\theta}\right]\right)^2+\left(E\left[\hat{\theta}\right]\right)^2-2\,\theta E\left[\hat{\theta}\right]+\theta^2 \\
&= \mathrm{Var}\left[\hat{\theta}^2\right]+\left(E\left[\hat{\theta}\right]-\theta\right)^2
\end{aligned}$$

من الواضح أن المقدار الأول يمثل تغاير (تباين) المقدر وأن المقدار الثاني فهو مربع التحيز. ومن ثم فإن متوسط مربع الخطأ للمقدر غير المتحيز يساوي تباينه.

توجد خاصية أخرى للمقدر الجيد وهي خاصية التماسك Consistency. يقال للمقدر أنه متماسك إذا كان يقترب من القيمة الحقيقية للمعلمة عندما يكون حجم العينة كبيرا.

تعريف (٥,٦)

يقال لمقدر النقطة $\hat{\theta}$ أنه مقدر متماسك consistent للمعلمة θ ، إذا كان لأي ثابت موجب ε فإن :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left|\hat{\theta}-\theta\right|<\varepsilon\right]=1.$$

يؤكد هذا التعريف على أن المقدر يقترب للقيمة الحقيقية للمعلمة عندما يزداد حجم العينة.

ملحوظة (٥,٢)

بدلاً من أن نستخدم التعريف السابق لإثبات أن مقدرا ما يكون متماسك أم لا.

فإنه يمكن وبسهولة استخدام طريقة بديلة وهي أن نثبت أن المقدرات غير متحيزة وأن تباينه يحقق أن:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(\hat{\theta}\right) = 0.$$

التحقق من هذين الشرطين يكفي لتوضيح أن المقدر متماسك.

مثال (٥,٦)

سنوضح في هذا المثال أنه إذا كان لدينا عينة عشوائية بسيطة $T_1, T_2, \cdots, T_n$ مأخوذة من توزيع أسي دالة كثافة احتماله $f(t;\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\{-\frac{1}{\theta}t\}; t > 0; \theta > 0$ حيث θ معلمة مجهولة، فإن متوسط العينة:

$$\hat{\theta} = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$$

يكون مقدر متماسك للمعلمة θ. كما ذكرنا في الملاحظة (٥,١) سالفة الذكر، يوجد طريقتان يمكن إتباعهما حتى نحل هذه المشكلة. الطريقة الأولى تكون باستخدام التعريف وحساب $\lim_{n\to\infty}\left[\left|\hat{\theta}-\theta\right| < \varepsilon\right]$ ونوضح أن هذه الكمية تساوي الواحد. يمكن عمل ذلك للمسلأل قيد الدراسة وذلك لأن المقدر $\hat{\theta}$ يتبع توزيع إيرلنج بالمعلمتين $\frac{n}{\theta}$ ، n. في الطريقة الثانية نوضح أن تباين المقدر يقترب من الصفر عندما يزداد حجم العينة. تذكر أنه من المثال (٥,٣) لدينا:

$$\mathrm{Var}\left[\hat{\theta}\right] = \frac{\theta^2}{n} \text{ ، } E\left[\hat{\theta}\right] = \theta$$

والتي توضح أن المقدر $\hat{\theta}$ غير متحيز لأي حجم للعينة n وأن $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left[\hat{\theta}\right] = 0$ ، هاتين النتيجتين تعنيان أن المقدر $\hat{\theta}$ يقترب من القيمة الحقيقية للمعلمة وذلك عندما تقترب قيمة حجم العينة إلى مالانهاية، ومن ثم فإن المقدر $\hat{\theta}$ يكون متماسك.

توجد خاصية أخرى للمقدر الجيد وهي خاصية الكفاية Sufficiency. يقدم التعريف التالي تعريفا لذلك المقدر.

تعريف (٥,٧)

يقال للإحصاءة $\hat{\theta}$ أنها مقدر كافي للمعلمة θ ، إذا كان:

$$P\left(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \cdots, T_n = t_n \middle| \hat{\theta} = \theta_0\right) \text{ أو } f\left(t_1, t_2, \cdots, t_n \middle| \hat{\theta} = \theta_0\right)$$

مستقلة عن θ.

تفسير

لتوضح هذا التعريف، دعنا نفترض أن إحصائيين A، B يريدان أن يقدران معلمة مجهولة θ. الإحصائي A قرر أن يأخذ عينة عشوائية $T_1, T_2, \cdots, T_n$ بالحجم n.

أما الإحصائي B فلم يستطيع من مشاهدة جميع مفردات العينة، ولكنه تمكن فقط من حساب قيمة إحصاءة $\hat{\theta}(T_1, T_2, \cdots, T_n)$. أحيان تعطي الإحصاءة $\hat{\theta}(T_1, T_2, \cdots, T_n)$ نفس المعلومات التي تقدمها العينة $T_1, T_2, \cdots, T_n$ حول المعلمة. في هذه الحالة يقال لإحصاءة $\hat{\theta}(T_1, T_2, \cdots, T_n)$ أنها مقدر كاف للمعلمة θ.

مثال (٥,٧)

ليكن $T_1, T_2, \cdots, T_n$ عينة عشوائية من توزيع برنوللي بالمعلمة المجهولة θ ، وضح أن $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} T_i$ يكون مقدرا كافيا للمعلمة θ ، بمعنى أن $P\left(T = t \mid \hat{\theta} = \theta_0\right)$ مستقل عن θ . لدينا:

$$\begin{aligned}
P\left(T = t \mid \hat{\theta} = \theta_0\right) &= \frac{P\left(T = t, \hat{\theta} = \theta_0\right)}{P\left(\hat{\theta} = \theta_0\right)} \\
&= \frac{P\left(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \cdots, T_n = t_n, \sum_{i=1}^{n} T_i = \theta_0\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{n} T_i = \theta_0\right)} \\
&= \frac{P\left(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \cdots, T_n = t_n\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{n} T_i = \theta_0\right)}
\end{aligned}$$

وذلك لأن $\left(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \cdots, T_n = t_n\right) \subset \left(\sum_{i=1}^{n} t_i = \theta_0\right)$.

من المعلوم لدينا أن: $\sum_{i=1}^{n} T_i$ يتبع توزيع ذي الحين بالمعلمتين θ_0 ، n ، لذلك فإن

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} T_i = \theta_0\right) = \binom{n}{\theta_0} \theta^{\theta_0} (1-\theta)^{n-\theta_0}$$

ولدينا أيضا:

$$P(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \cdots, T_n = t_n) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{t_i} (1-\theta)^{1-t_i}$$

وبالتالي فإن:

$$P\left(T = t \mid \hat{\theta} = \theta_0\right) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \theta^{t_i} (1-\theta)^{1-t_i}}{\binom{n}{\theta_0} \theta^{\theta_0} (1-\theta)^{n-\theta_0}}$$

$$= \frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} t_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} t_i}}{\binom{n}{\theta_0} \theta^{\theta_0} (1-\theta)^{n-\theta_0}}$$

$$= \frac{\theta^{\theta_0} (1-\theta)^{n-\theta_0}}{\binom{n}{\theta_0} \theta^{\theta_0} (1-\theta)^{n-\theta_0}}$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{\theta_0}}$$

من الواضح أن $P\left(T = t \mid \hat{\theta} = \theta_0\right)$ مستقل عن المعلمة θ ، ومن ثم فإن المقدر $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} T_i$ يكون كافيا لتقدير المعلمة θ.

نظرية (٥,١) (التحليل المعاملي factorization theorem)

ليكن $T_1, T_2, \cdots, T_n$ عينة عشوائية من توزيع دالة كثافة احتماله $f(t,\theta)$ ، حيث أن θ معلمة مجهولة. المقدر $\hat{\theta}$ يكون مقدرا كافيا لتقدير المعلمة θ إذا كان وفقط إذا كان أمكن كتابة الدالة $f(t,\theta)$ على الصورة التالية:

$$f(t,\theta) = g\left(\hat{\theta}(t),\theta\right)\cdot h(t),$$

حيث أن $h(t)$ دالة غير سالبة ومستقلة عن المعلمة θ ، وأن $g\left(\hat{\theta}(t),\theta\right)$ تعتمد على العينة $t_1,t_2,\cdots,t_n$ فقط من خلال الدالة $\hat{\theta}(t)$.

مثال (٥,٨)

بالعودة ثانية للمثال (٥,٧)، وحيث أن $T_1,T_2,\cdots,T_n$ عينة عشوائية من توزيع برنوللي بالمعلمة المجهولة θ ، فيكون لدينا:

$$f(t,\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^{n} t_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} t_i}$$

دع $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} T_i$ ، إذن:

$$\begin{aligned} f(t,\theta) &= \theta^{\hat{\theta}}(1-\theta)^{n-\hat{\theta}} \\ &= g\left(\hat{\theta}(t),\theta\right)\cdot h(t) \end{aligned}$$

حيث

$$g\left(\hat{\theta}(t),\theta\right) = \theta^{\hat{\theta}}(1-\theta)^{n-\hat{\theta}}\text{ ،}$$

$$h(t) = 1$$

وبالتالي فإنه من نظرية التحليل المعاملي يتضح أن المقدر $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} T_i$ كاف للمعلمة θ.

لاحظ أن متوسط العينة $\overline{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$ يكون أيضا مقدرا كافيا لتقدير المعلمة θ ، وذلك لأن:

$$f(t,\theta) = \theta^{n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\right)}(1-\theta)^{n-n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\right)}$$

وفي هذه الحالة يكون:

$$g\left(\hat{\theta}(t),\theta\right) = \theta^{n\hat{\theta}}(1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}\text{ ،}$$

$$h(t) = 1$$

مثال (٥,٩)

ليكن $T_1,T_2,\cdots,T_n$ عينة عشوائية من توزيع بواسون بالمعلمة المجهولة θ ونريد إيجاد مقدر كاف للمعلمة θ.

حيث أن العينة مأخوذة من توزيع بواسون بدالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(t,\theta)=\frac{\theta^t}{t!}e^{-\theta},\ \theta=0,1,2,\cdots$$

إذن لدينا :

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^{t_i}}{t_i!}e^{-\theta}$$
$$=\frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n}t_i}}{\prod_{i=1}^{n}t_i!}e^{-n\theta}$$

لو أخذنا :

$$h(t)=1/\prod_{i=1}^{n}t_i!\ \text{،}\ g\left(\hat{\theta},\theta\right)=\theta^{\hat{\theta}}e^{-n\theta}$$

حيث أن $\hat{\theta}=\sum_{i=1}^{n}t_i$ ، إذن يمكن كتابة :

$$f(t,\theta)=g\left(\hat{\theta}(t),\theta\right)\cdot h(t)$$

وهذا يقود إلى أن المقدر $\hat{\theta}=\sum_{i=1}^{n}t_i$ يكون مقدرا كافيا لتقدير المعلمة θ ، وهذا ما كنا نبحث عنه.

تمرين (٥,١)

ليكن $T_1,T_2,\cdots,T_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي بالمتوسط θ والتباين 1. أوجد مقدر كاف للمعلمة θ.

في المثال التالي، سنوضح كيف يمكن استنتاج مقدر كاف لمعلمة ما لتوزيع يعتمد مجال تعريفه على هذه المعلمة.

مثال (٥,١٠)

ليكن $T_1,T_2,\cdots,T_n$ عينة عشوائية من توزيع منتظم على الفترة $(0,\theta)$ ونريد إيجاد مقدر كاف للمعلمة θ.

حيث أن العينة مأخوذة من توزيع منتظم على الفترة $(0,\theta)$ بدالة كثافة الاحتمال التالية:

$$f(t,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0<t<\theta\\ 0, & o.w.\end{cases}$$

إذن لدينا:

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n,\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}, & 0<t_1,t_2,\cdots,t_n<\theta\\ 0, & o.w.\end{cases}$$

والتي يمكن كتابتها في الصورة التالية:

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n,\theta)=\begin{cases}\left(\frac{1}{\theta}\right)^n, & 0<max\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}<\theta\\ 0, & o.w.\end{cases}$$

$$=\left(\tfrac{1}{\theta}\right)^n \mathbf{1}_{\{max\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}<\theta\}}(t)$$

حيث أن $\mathbf{1}_{\{max\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}<\theta\}}(t)$ تعرف بالصيغة التالية:

$$\mathbf{1}_{\{max\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}<\theta\}}(t)=\begin{cases}1, & max\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}<\theta\\ 0, & o.w.\end{cases}$$

بأخذ:

$$g(\hat{\theta},\theta)=\left(\tfrac{1}{\theta}\right)^n \mathbf{1}_{\{\hat{\theta}<\theta\}}(t) \text{ ، } \hat{\theta}=max\{t_1,t_2,\cdots,t_n\} \text{ ، } h(t)=1$$

إذن يمكن كتابة:

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n,\theta)=g(\hat{\theta}(t),\theta)\cdot h(t)$$

وهذا يقود إلى أن $\hat{\theta}=max\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}$ مقدر كاف للمعلمة θ.

نظرية (٥,٢)

ليكن f دالة ١-١ ، إذن الإحصاءة T تكون مقدرا كافيا لتقدير المعلمة θ إذا كان وفقط إذا كان الدالة $f(T)$ مقدراً كافياً.

سنختم هذا الجزء بذكر الإحصاءات الكافية المشترك والتي تعرف عندما يكون التوزيع الإحتمالي معتمد على متجه من المعالم المجهولة بدلا من معلمة واحدة، ولكن هذا الموضوع خارج نطاق الهدف الرئيسي من هذا الكتاب.

(٥,٢,١,٢) الطرق Methods

سنعرض في هذا الجزء طريقتان من طرق استنتاج مقدرات معالم توزيع مجتمع ما. هاتان الطريقتان هما: (١) طريقة العزوم Moment technique، (٢) طريقة الإمكان الأكبر Maximum likelihood technique.

طريقة العزوم

تتلخص هذه الطريقة في أننا نساوي بين عزوم المجتمع وعزوم العينة. ولتوضيح ذلك نفرض أن لدينا عينة عشوائية $T_1,T_2,\cdots,T_n$ عينة عشوائية من مجتمع دالة كثافة احتماله $f(t,\theta)$ تعتمد على متجه من المعالم θ مكون من p معلمة، حيث $p \geq 1$. إذن نوجد p من العزوم المجتمع حول الصفر θ و p من عزوم العينة حول الصفر.

يعرف العزم رقم r للمجتمع حول الصفر بالصيغة التالية:

$$\mu_r = \int_0^\infty t^r \; f(t,\theta)\,dt\,, r = 1,2,\cdots$$

أما العزم رقم r للعينة حول الصفر فيعرف بالصيغة التالية:

$$M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^{\,r}\,, r = 1,2,\cdots$$

ثم نساوي عدد p من عزوم المجتمع حول الصفر بنظائرهم من عزوم العيتة حول الصفر، أي أن:

$$M_r = \mu_r\,, r = 1,2,\cdots, p \qquad (٥,٣)$$

فنحصل على نظام مكون من p معادلة في p من المجاهيل (المعالم). ثم نحل هذه المعادلات لنحصل على مقدرات المعالم والتي سنسميها بمقدرات العزوم moment estimators.

سنوضح هذه الطريقة من خلال المثال التالي.

مثال (٥,١١)

في هذا المثال نريد إيجاد مقدر العزوم لمعلمة التوزيع الأسي بالمتوسط θ. وكمثال تطبيقي سنعتبر العينة التالية والتي تمثل زمن حياة (بالساعة) 25 مصباحاً كهربياً:

47	81	127	183	188
221	253	331	323	360
489	496	511	725	772
880	1509	1675	1806	2008
2026	2040	2869	3104	3205

سنعتبر أن زمن حياة المصباح الكهربي يتبع توزيع أسي بالمتوسط θ، هذا يقود إلى أن دالة كثافة احتمال المجتمع تأخذ الصيغة التالية:

$$f(t,\theta) = \theta e^{-\theta t}, t \geq 0, \theta > 0.$$

وبالتالي فإن:

$$\mu_1 = \int_0^\infty t\, f(t,\theta)\, dt$$

$$= \int_0^\infty t\,\theta e^{-\theta t}\, dt = \theta$$

ولدينا:

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$$

بمساواة M_1 بـ μ_1، نحصل على مقدر العزوم لـ θ في الصورة التالية:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$$

من البيانات المعطاة في المثال نجد أن :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{25}(47 + \cdots + 3205) = \frac{1}{25}(26209) \approx 1048.36 \text{ hours}$$

مثال (٥,١٢)

في هذا المثال نريد إيجاد مقدري العزوم لمعلمتي توزيع جاما :

$$f(t,\theta) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}(\lambda t)^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, t \geq 0, \lambda, \alpha > 0$$

وكمثال تطبيقي سنعتبر العينة التالية والتي تمثل زمن حياة (بالساعة) 20 شريحة جهاز كمبيوتر :

130	150	180	40	90
125	99	128	55	162
126	77	95	43	170
130	112	106	93	71

بفرض أن زمن حياة الشريحة يتبع توزيع جاما بالمعلمتين λ, α. والآن سنحسب مقدري العزوم للمعلمتين λ, α وسنقدر أيضا متوسط زمن حياة الشريحة. وحيث أن عدد المعالم 2، إذن فإننا نحتاج إلى معادلتين، ومن ثم فإننا نحتاج إلى العزمين الأول والثاني للمجتمع وللعينة.

العزمين الأول والثاني للمجتمع هما :

$$\mu_1 = \int_0^\infty t \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}(\lambda t)^{\alpha-1} e^{-\lambda t}\, dt$$
$$= \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\mu_2 = \int_0^\infty t^2 \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}(\lambda t)^{\alpha-1} e^{-\lambda t}\, dt$$
$$= \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

ومن ثم فإن المعادلات (٥,٣) في هذه الحالة تصبح :

$$\frac{\alpha}{\lambda} = M_1$$

$$\frac{\alpha}{\lambda^2} = M_2$$

بحل هاتين المعادلتين نحصل على :

$$\hat{\alpha} = \frac{{M_1}^2}{M_2}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{M_1}{M_2}$$

من بيانات المثال، لدينا :

$$\sum_{i=1}^{n} {t_i}^2 = 244823 \ \text{،} \ \sum_{i=1}^{n} t_i = 2067 \ \text{،} \ n = 20$$

ولذلك :

$$M_2 = \frac{244823}{20} = 1224.115 \ \text{،} \ M_1 = \frac{2067}{20} = 103.35$$

ومن ثم فإن تقدير المعلمتين λ, α باستخدام طريقة العزوم هما :

$$\hat{\alpha} = \frac{(103.35)^2}{1224.115} = 8.725 \ \text{،} \ \hat{\lambda} = \frac{(103.35)}{1224.115} = 0.0844$$

وباستخدام تقديري المعلمتين الذين حصلنا عليهما وباستخدام صيغة متوسط زمن حياة الشريحة نحصل على تقدير متوسط زمن الحياة كالآتي :

$$\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\lambda}} = \frac{8.725}{0.0844} = 103.39 \text{ hours}$$

تمرين (٥,٢)

ليكن $T_1, T_2, \cdots, T_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي بالمتوسط μ والتباين σ^2. أوجد مقدري العزوم للمعلمتين μ و σ^2.

طريقة الإمكان الأكبر Maximum likelihood method

بفرض أن لدينا عينة عشوائية بسيطة $T_1,T_2,\cdots,T_n$ من مجتمع دالة كثافة إحتمالة $f(t,\theta)$ تعتمد على متجه من المعالم θ مكون من p معلمة، حيث $p \geq 1$. وحيث أن عناصر العينة العشوائية البسيطة تكون مستقلة إذن يمكن حساب دالة كثافة الاحتمال المشترك للعينة باستخدام العلاقة التالية:

$$f(\mathbf{t},\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(t_i,\theta)$$

حيث أن $\mathbf{t}=(t_1,t_2,...,t_n)$، سنرمز بـ $L(\mathbf{t},\theta)$ للدالة $f(\mathbf{t},\theta)$ والتي تسمى بدالة الإمكان likelihood function.

يعرف مقدر الإمكان الأكبر لمتجه المعالم θ بأنه المتجه $\hat{\theta}$ الذي يجعل دالة الإمكان أكبر قيمة ممكنة وذلك عند القيم المشاهدة $\mathbf{t}=(t_1,t_2,...,t_n)$ للعينة العشوائية $T_1,T_2,\cdots,T_n$.

إنه من السهل عندما نبحث عن القيم التي تكبر حاصل ضرب عدد من المقادير أن نبحث عن القيم التي تجعل اللوغاريتم أكبر ما يمكن، وذلك لأن الدالة اللوغاريتمية دالة مطردة. إذن نوجد لوغاريتم دالة الإمكان ثم نبحث قيم المعالم التي تجعلها قيمة عظمى. لوغاريتم دالة الإمكان هو

$$\ell(\mathbf{t},\theta)=\ln L(\mathbf{t},\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(t_i,\theta) \qquad (٥,٤)$$

وباستخدام نظرية النهاية المركزية يمكن إثبات أن هذه الدالة $\ell(\mathbf{t},\theta)$ تقاربياً تتبع توزيعاً طبيعياً، وذلك لأنها مكونة من عدد n من الحدود المستقلة.

حيث أن $L(\mathbf{t},\theta)$ دالة كثافة احتمال مشترك، فبفرض أن المتغيرات العشوائية $T_1,T_2,\cdots,T_n$ متصلة، إذن يجب أن يكون تكاملها مساوي للواحد

$$1=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}...\int_0^{\infty} L(t,\theta)\,dt_1 dt_2 ... dt_n \qquad (٥,٥)$$

بفرض أن $L(\mathbf{t},\theta)$ دالة الإمكان دالة متصلة، ومن ثم فإنها قابلة للاشتقاق واشتقاقها يمكن أن يتبادل مع تكاملها. باشتقاق الطرف الأيمن للمعادلة (٥,٥) بالنسبة للمعلمة θ_i ، $i=1,2,\dots,p$ ، نحصل على

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta_i}\int_0^\infty\int_0^\infty\dots\int_0^\infty L(t,\theta)\,dt_1dt_2\dots dt_n &= \int_0^\infty\int_0^\infty\dots\int_0^\infty \frac{\partial L(t,\theta)}{\partial\theta_i}dt_1dt_2\dots dt_n\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty\dots\int_0^\infty \frac{1}{L(t,\theta)}\frac{\partial L(t,\theta)}{\partial\theta_i}L(t,\theta)\,dt_1dt_2\dots dt_n\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty\dots\int_0^\infty \frac{\partial \ln L(t,\theta)}{\partial\theta_i}L(t,\theta)\,dt_1dt_2\dots dt_n\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty\dots\int_0^\infty \frac{\partial \ell(t,\theta)}{\partial\theta_i}L(t,\theta)\,dt_1dt_2\dots dt_n\\ &= E\left[\frac{\partial \ell(t,\theta)}{\partial\theta_i}\right]\end{aligned}$$

أي أن:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\int_0^\infty\int_0^\infty\dots\int_0^\infty L(t,\theta)\,dt_1dt_2\dots dt_n = E[U_i(\theta)] \tag{٥,٦}$$

حيث:

$$U_i(\theta)=\frac{\partial \ell(t,\theta)}{\partial\theta_i},\ \mathrm{i}=1,2,\dots,p$$

يسمى المتجه $\mathbf{U}=\left(U_1(\theta),U_2(\theta),\dots,U_p(\theta)\right)^T$ بمتجه النتيجة score vector. للتبسيط قمنا بإسقاط متجه المشاهدات $\mathbf{t}$ أثناء كتابة U_i . باشتقاق الطرف الأيسر للعلاقة (٥,٥) بالنسبة للمعلمة θ_i ، نحصل على النتيجة التالية:

$$0=E[U_i(\theta)],i=1,2,\dots,p \tag{٥,٧}$$

والتي يمكن إعادة كتابتها في شكل مصفوفي كالآتي:

$$\mathbf{0}=E[U(\theta)]$$

تسمى مجموعة المعادلات (٥,٧) بمعادلات الإمكان likelihood equations والتي بحلها نحصل على مقدرات الإمكان الأكبر لمتجه المعالم.

باشتقاق الطرف الأيسر العلاقة (٥,٦) بالنسبة للمعلمة θ_j ، باستخدام قاعدة السلسلة، نحصل على:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_i}\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty L(t,\theta)\,dt_1dt_2\ldots dt_n$$

$$=\frac{\partial}{\partial\theta_j}\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty\frac{\partial\ell(t,\theta)}{\partial\theta_i}L(t,\theta)\,dt_1dt_2\ldots dt_n$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left[\frac{\partial\ell(t,\theta)}{\partial\theta_i}L(t,\theta)\right]dt_1dt_2\ldots dt_n$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left[\frac{\partial\ell(t,\theta)}{\partial\theta_i}\right]L(t,\theta)+\frac{\partial\ell(t,\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial}{\partial\theta_j}L(t,\theta)\right\}dt_1dt_2\ldots dt_n$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty\left\{\frac{\partial^2\ell(t,\theta)}{\partial\theta_j\partial\theta_i}L(t,\theta)+\frac{\partial\ell(t,\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial L(t,\theta)}{\partial\theta_j}\right\}dt_1dt_2\ldots dt_n$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty\frac{\partial^2\ell(t,\theta)}{\partial\theta_j\partial\theta_i}L(t,\theta)\;dt_1dt_2\ldots dt_n$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty\frac{\partial\ell(t,\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial L(t,\theta)}{\partial\theta_j}dt_1dt_2\ldots dt_n$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty\frac{\partial^2\ell(t,\theta)}{\partial\theta_j\partial\theta_i}L(t,\theta)\;dt_1dt_2\ldots dt_n$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty\frac{\partial\ell(t,\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial\ell(t,\theta)}{\partial\theta_j}L(t,\theta)\;dt_1dt_2\ldots dt_n$$

$$=E\left[\frac{\partial^2\ell(t,\theta)}{\partial\theta_j\partial\theta_i}\right]+E\left[\frac{\partial\ell(t,\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial\ell(t,\theta)}{\partial\theta_j}\right]$$

$$=E\left[\frac{\partial^2\ell(t,\theta)}{\partial\theta_j\partial\theta_i}\right]+E\left[U_i(\theta)U_j(\theta)\right],\ i,j=1,2,\ldots,p$$

وحيث أن هذه النتيجة هي المشتقة الجزئية الثانية للطرف الأيمن للعلاقة (٥,٥) وأن مشتقة الطرف الأيمن يساوي صفر، إذن نحصل على النتيجة التالية:

$$E\left[-\frac{\partial^2 \ell(t,\theta)}{\partial\theta_j \partial\theta_i}\right] = E\left[U_i(\theta) U_j(\theta)\right],\ i, j = 1,2,\dots, p$$

باستخدام المعادلة (٥,٧) لدينا:

$$E\left[U_i(\theta)\right] = E\left[U_j(\theta)\right] = 0,\ i, j = 1,2,\dots, p$$

ومن ثم فإن:

$$E\left[-\frac{\partial^2 \ell(t,\theta)}{\partial\theta_j \partial\theta_i}\right] = Cov\left[U_i(\theta), U_j(\theta)\right],\ i, j = 1,2,\dots, p \quad (٥,٨)$$

تعطي العلاقات (٥,٨) عناصر مصفوفة مربعة $p \times p$ تسمى بمصفوفة معلومات فيشر Fisher information matrix والتي عادة يرمز لها بالرمز $\mathbf{I}[\theta]$، والتي يتكون عناصر قطرها الرئيسي من متجة النتيجة وعناصر ما فوق القطر الرئيسي تكون تغايرات المقدرات covariances. يعطي التعريف التالي عرضا يلخص النتائج التي عرضناها حتى الآن في طريقة الإمكان الأكبر.

تعريف (٥,٨)

يتكون متجه النتيجة من العناصر التالية:

$$U_i(\theta) = \frac{\partial \ell(t,\theta)}{\partial\theta_i},\ i=1,2,\dots,p$$

والتي عندما نساويه بالصفر ونحل مجموعة المعادلات الناتجة، نحصل على متجه مقدرات الإمكان الأكبر للمعالم المجهولة. القيمة المتوقعة لمتجه النتيجة عبارة عن متجه صفري:

$$E\left[U_i(\theta)\right] = 0,\ \ i = 1,2,\dots, p$$

ومصفوفة التباينات والتغايرات (مصفوفة معلومات فيشر) هي:

$$I(\theta) = E\left[U(\theta)\, U^T(\theta)\right]$$

عناصر هذه المصفوفة هي :

$$I_{ij}=E\left[-\frac{\partial^2\ell(t,\theta)}{\partial\theta_j\partial\theta_i}\right],\ i,j=1,2,\ldots,p$$

مثال (٥,١٣)

لتكن $\mathbf{t}=(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية بسيطة من توزيع أسي بالمعلمة θ والتي تمثل متوسط المجتمع. نريد إيجاد متجه النتيجة ومقدر الإمكان الأكبر للمعلمة θ ، كما أننا نريد توضيح أن القيمة المتوقعة لمتجه النتيجة يساوي الصفر وأن تباين متجه النتيجة يساوي مصفوفة معلومات فيشر. عموما لدينا دالة كثافة الإحتمال للتوزيع الأسي بالمتوسط θ على الصورة :

$$f(t,\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-t/\theta},\ t\geq 0,\theta>0,$$

وبالتالي فإن دالة الإمكان هي :

$$\begin{aligned}L(\mathbf{t},\theta)&=\prod_{i=1}^{n}f(t_i,\theta)\\&=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-t_i/\theta}\\&=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}t_i}\end{aligned}$$

لوغاريتم دالة الإمكان هي :

$$\ell(t,\theta)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}t_i$$

يحتوي متجه النتيجة على عنصر واحد فقط ، وذلك بسبب أنه توجد معلمة واحدة فقط θ ، وهو :

$$U(\theta)=\frac{\partial\ell(t,\theta)}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}t_i$$

بمساواة النتيجة بالصفر نحصل على معادلة الإمكان التالية :

$$0 = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} t_i$$

بحل معادلة الإمكان بالنسبة للمعلمة θ ، نحصل على مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة θ في الصورة التالية ، والتي تمثل متوسط العينة :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$$

مشتقة متجة النتيجة هو :

$$\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \ell(t,\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} t_i$$

والآن نختبر النتائج المتعلقة بمتجه النتيجة. النتيجة الأولى هي $E[U(\theta)] = 0$. لدينا :

$$\begin{aligned} E[U(\theta)] &= E\left[-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} T_i\right] \\ &= -E\left[\frac{n}{\theta}\right] + E\left[\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} T_i\right] \\ &= -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} E\left[\sum_{i=1}^{n} T_i\right] \end{aligned}$$

وحيث أن $\sum_{i=1}^{n} T_i$ يتبع توزيع جاما بالمعلمتين $n, \quad \theta$ ومن ثم فإن $E\left[\sum_{i=1}^{n} T_i\right] = n\theta$ ومن ثم فإن :

$$\begin{aligned} E[U(\theta)] &= -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}(n\theta) \\ &= -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta}(n\theta) = 0 \end{aligned}$$

النتيجة الثانية هي مصفوفة معلومات فيشر ، والتي تحتوي على عنصر واحد فقط ، هي :

$$I(\theta) = E\left[-\frac{\partial^2 \ell(t,\theta)}{\partial \theta^2}\right]$$

$$= E\left[-\frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} T_i\right]$$
$$= -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} E\left[\sum_{i=1}^{n} T_i\right]$$
$$= -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3}(n\theta)$$
$$= \frac{n}{\theta^2}$$

وللتحقق من أن هذه النتيجة هي نفس تباين متجه النتيجة، لدينا :

$$Var\left(\frac{\partial \ell(t,\theta)}{\partial \theta}\right) = Var\left[-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} T_i\right]$$
$$= \frac{1}{\theta^4} Var\left[\sum_{i=1}^{n} T_i\right]$$
$$= \frac{n}{\theta^2}$$

وذلك لأن $Var\left[\sum_{i=1}^{n} T_i\right] = n\theta^2$.

كما هو الحال في جميع طرق الإستدلال الإحصائي، إنه دائما يكون من المهم استنتاج تعليق حول المعالم بغض النظر عن التصنيف المستخدم في توزيع الحياة. إذا كان $\phi = g(\theta)$ تحويل أحادي (واحد إلى واحد)، إذن متجه النتيجة سيقسم على $g'(\theta)$ ، وأن دالة المعلومات ستقسم على $(g'(\theta))^2$.

مثال (٥,١٤)

بالعودة للمثال السابق أوجد ما أوجدته للمعلمة θ لمعدل الفشل $\lambda = g(\theta) = \frac{1}{\theta}$. باستخدام خاصية عدم التغاير invariance property لمقدر الإمكان الأكبر (مقدر الإمكان الأكبر لدالة في المعلمة المجهولة يكون عبارة عن قيمة الدالة عندما نستبدل المعلمة المجهولة بمقدر الإمكان الأكبر لها) نحصل على مقدر الإمكان الأكبر لمعدل الفشل.

$$\hat{\lambda} = g\left(\hat{\theta}\right) = \frac{1}{\hat{\theta}}$$

لدينا من المثال السابق $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$ ، إذن :

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$$

وحيث أن $g'(\theta) = -\frac{1}{\theta^2}$ ، إذن متجه النتيجة هو :

$$\begin{aligned}
U(\lambda) &= \frac{\partial \ell(t,\lambda)}{\partial \lambda} \\
&= U\left(\theta = \tfrac{1}{\lambda}\right) \frac{1}{g'(\theta)\big|_{\theta=\frac{1}{\lambda}}} \\
&= \frac{1}{-\frac{1}{\theta^2}}\left[-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} t_i\right] \\
&= \frac{1}{-\lambda^2}\left[-n\lambda + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} t_i\right] \\
&= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} t_i
\end{aligned}$$

وأن مصفوفة معلومات فيشر هي :

$$\begin{aligned}
I(\lambda) &= E\left[-\frac{\partial^2 \ell(t,\lambda)}{\partial \lambda^2}\right] \\
&= I\left(\theta = \tfrac{1}{\lambda}\right) \frac{1}{\left(g'(\theta)\big|_{\theta=\frac{1}{\lambda}}\right)^2} \\
&= n\lambda^2 \frac{1}{\left(-\lambda^2\right)^2} \\
&= \frac{n}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

عادة ما تستخدم مصفوفة معلومات المشاهدة، التي يرمز لها بالرمز $\mathbf{O}(\hat{\theta})$ ، في تقدير مصفوفة معلومات فيشر $\mathbf{I}[\theta]$. لأجل العديد من التوزيعات المعلمية، فإن $\mathbf{O}(\hat{\theta})$ تكون مقدر متسق للمصفوفة $\mathbf{I}[\theta]$. عناصر المصفوفة $\mathbf{O}(\hat{\theta})$ هي:

$$O_{ij} = \left[-\frac{\partial^2 \ell(t,\theta)}{\partial\theta_i \, \partial\theta_j} \right]_{\theta=\hat{\theta}} , i, j = 1,2,\ldots, p$$

مثال (٥,١٥)

بالعودة للمثال السابق (٥,١٣) نريد حساب مصفوفة معلومات المشاهدة. مما سبق لدينا:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}(\hat{\theta}) &= \left[-\frac{\partial^2 \ell(t,\theta)}{\partial\theta^2} \right]_{\theta=\hat{\theta}} \\ &= \left[-\frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^{n} t_i \right]_{\theta=\hat{\theta}} \\ &= \frac{n}{\hat{\theta}^2} \end{aligned}$$

والتي تتقارب إلى مصفوفة معلومات فيشر حيث أن $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$ تتقارب إلى القيمة الحقيقية للمعلمة θ وذلك عندما يؤول حجم العينة n إلى اللانهاية. وهذا يعني أن $\mathbf{O}(\hat{\theta})$ مقدر متسق لتقدير مصفوفة معلومات فيشر في حالة التوزيع الأسي.

يوضح المثال التالي مسألة التقدير في حالة توزيع يعتمد على معلمتين مجهولتين.

مثال (٥,١٦)

لتكن $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ عينة عشوائية بسيطة من توزيع معكوس جاوس inverse Gaussian بالمعلمتين الموجبتين λ, μ ودالة كثافة الاحتمال التالية:

$$f(t,\lambda,\mu) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \; t^{-3/2} e^{-\frac{\lambda}{2\mu^2 t}(t-\mu)^2} , \; t \geq 0, \lambda, \mu > 0,$$

ومتوسط μ . دالة الإمكان لهذه العينة هي :

$$L(\mathbf{t},\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(t_i,\theta)$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\; t_i^{-3/2} e^{-\frac{\lambda}{2\mu^2 t_i}(t_i-\mu)^2}$$
$$=\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\prod_{i=1}^{n} t_i\right)^{-3/2} e^{-\frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(t_i-\mu)^2}{t_i}}$$
$$=\lambda^{\frac{n}{2}}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\prod_{i=1}^{n} t_i\right)^{-3/2} e^{-\frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(t_i-\mu)^2}{t_i}}$$

لوغاريتم دالة الإمكان هي :

$$\ell(t,\theta)=\frac{n}{2}ln\,\lambda-\frac{n}{2}ln(2\pi)-\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}ln\,t_i-\frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(t_i-\mu)^2}{t_i}$$

يحتوي متجه النتيجة على عنصرين ، وذلك بسبب أنه توجد معلمتان ، وهو :

$$U_1(\lambda,\mu)=\frac{\partial\ell(t,\lambda,\mu)}{\partial\lambda}=\frac{n}{2\lambda}-\frac{1}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(t_i-\mu)^2}{t_i}$$
$$U_2(\lambda,\mu)=\frac{\partial\ell(t,\lambda,\mu)}{\partial\mu}=\frac{\lambda}{\mu^3}\left[\sum_{i=1}^{n}t_i-n\mu\right]$$

بمساواة النتيجة بالصفر نحصل على معادلة الإمكان التالية :

$$0=\frac{n}{2\lambda}-\frac{1}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(t_i-\mu)^2}{t_i}$$
$$0=\frac{\partial\ell(t,\lambda,\mu)}{\partial\mu}=\frac{\lambda}{\mu^3}\left[\sum_{i=1}^{n}t_i-n\mu\right]$$

بحل معادلة الإمكان بالنسبة للمعلمتين λ,μ ، نحصل على مقدري الإمكان الأكبر للمعلمتين λ,μ . من المعادلة الثانية نحصل على مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة μ :

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i$$

بالتعويض في المعادلة الأولى نحصل على مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة λ :

$$\hat{\lambda} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} - \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i} \right]^{-1}$$

مشتقة متجة النتيجة (المشتقات الجزئية الثانية للوغاريتم دالة الإمكان) هو :

$$\frac{\partial^2 \ell(t,\lambda,\mu)}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{2\lambda^2},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(t,\lambda,\mu)}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{1}{\mu^3} \sum_{i=1}^{n} t_i - \frac{n}{\mu^2},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(t,\lambda,\mu)}{\partial \mu^2} = -\frac{3\lambda}{\mu^4} \sum_{i=1}^{n} t_i + \frac{2n\lambda}{\mu^3}.$$

دالة معلومات فيشر تتكون من توقع سالب هذه المشتقات الثانية :

$$I\left(\frac{\partial^2 \ell(\mathbf{t},\lambda,\mu)}{\partial \lambda \partial \mu} \right) = \begin{bmatrix} E\left[-\frac{\partial^2 \ell(\mathbf{t},\lambda,\mu)}{\partial \lambda^2} \right] & E\left[-\frac{\partial^2 \ell(\mathbf{t},\lambda,\mu)}{\partial \lambda \partial \mu} \right] \\ E\left[-\frac{\partial^2 \ell(\mathbf{t},\lambda,\mu)}{\partial \lambda \partial \mu} \right] & E\left[-\frac{\partial^2 \ell(\mathbf{t},\lambda,\mu)}{\partial \mu^2} \right] \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{n}{2\lambda^2} & 0 \\ 0 & \frac{n\lambda}{\mu^3} \end{bmatrix},$$

حيث أن عناصر القطر العكسي تساوي أصفارا، إذن متجه النتيجة يكون غير مرتبط (uncorrelated). بالرغم من أنه في هذا المثال تمكنا من الحصول على عناصر مصفوفة معلومات فيشر في صيغة بسيطة مغلقة، إلا أن هذه ليست هي الحالة العامة، فأحد المشاكل التي تواجه المهتمين في هذا المجال هي عدم إمكانية الحصول على عناصر مصفوفة معلومات فيشر في صيغ رياضية مغلقة، وفي مثل هذه الحالات نحتاج إلى مصفوفة معلومات المشاهدات والتي نستخدمها في تقدير مصفوفة معلومات فيشر.

في المثال الحالي سنحسب مصفوفة معلومات المشاهدات :

$$\mathbf{O}(\hat{\lambda},\hat{\mu})=\begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 \ell(\mathbf{t},\lambda,\mu)}{\partial \lambda^2} & -\dfrac{\partial^2 \ell(\mathbf{t},\lambda,\mu)}{\partial \lambda\, \partial \mu} \\ -\dfrac{\partial^2 \ell(\mathbf{t},\lambda,\mu)}{\partial \lambda\, \partial \mu} & -\dfrac{\partial^2 \ell(\mathbf{t},\lambda,\mu)}{\partial \mu^2} \end{bmatrix}_{\lambda=\hat{\lambda},\mu=\hat{\mu}},$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{n}{2\hat{\lambda}^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{n\hat{\lambda}}{\hat{\mu}^3} \end{bmatrix}.$$

مثال (٥,١٧)

بفرض أن أزمنة حياة ست وحدات من جهاز ما قد قيست بالساعة وكانت النتيجة :

$$15,\quad 21,\quad 30,\quad 39,\quad 52,\quad 68$$

بفرض أن زمن حياة كل وحدة يتبع توزيع رالي بدالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(t,\lambda)=\lambda\ e^{-\frac{\lambda}{2}t^2},\ t\geq 0,\lambda>0$$

حيث λ معلمة مجهولة. نريد في هذا المثال إيجاد مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة λ .

دالة الإمكان لهذه العينة هي :

$$L(\mathbf{t},\lambda)=\prod_{i=1}^{n} f(t_i,\lambda)$$

$$=\prod_{i=1}^{n} \lambda\ e^{-\frac{\lambda}{2}t_i^2}$$

$$=\lambda^n\ e^{-\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n} t_i^2}$$

لوغاريتم دالة الإمكان هي :

$$\ell(t,\lambda)=n\,ln\,\lambda-\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n} t_i^{\,2}$$

يحتوي متجه النتيجة على عنصر واحد فقط، وذلك لوجود معلمة مجهولة واحدة فقط، وهو:

$$U(\lambda) = \frac{\partial \ell(t,\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} t_i^{\,2}$$

بمساواة النتيجة بالصفر نحصل على معادلة الإمكان التالية:

$$0 = \frac{n}{\lambda} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} t_i^{\,2}$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة للمعلمة λ، نحصل على مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة λ في الصيغة التالية:

$$\hat{\lambda} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\,2}}$$

يمكن الحصول على مقدر الإمكان الأكبر لمتوسط زمن حياة الوحدة باستخدام كل من العلاقة بين متوسط زمن حياة الوحدة ومقدر الإمكان للمعلمة λ.

حيث أنه يمكن استنتاج متوسط زمن حياة الوحدة في حالة توزيع رالي بالعلاقة التالية:

$$mttf = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$$

ومن ثم فإن مقدر الإمكان الأكبر لمتوسط زمن حياة الوحدة هو:

$$m\hat{t}tf = \sqrt{\frac{\pi}{2\hat{\lambda}}}$$

بالمثل يمكن الحصول على مقدر الإمكان الأكبر لتباين زمن حياة الوحدة ومن ثم الإنحراف المعياري.

حيث أن تباين توزيع رالي هو:

$$\sigma^2 = \frac{2}{\lambda}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

ومن ثم فإن مقدر الإمكان الأكبر للإنحراف المعياري لزمن حياة الوحدة هو:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{\hat{\lambda}}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

باستخدام البيانات المعطاة في المثال، نحصل على:

$$\hat{\sigma} = 19.32 \text{ ، } m\hat{t}tf = 36.92 \text{ ، } \hat{\lambda} = 0.00115$$

يوضح مثال (٥,١٨) الموضح أدناه توضيحا لنموذج يحتوي على k من المعالم.

مثال (٥,١٨)

ليكن $T_1, T_2, \cdots, T_k$ عينة عشوائية بسيطة تتبع توزيع متعدد الحدود multinomial distribution بالمعالم $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$، حيث $\sum_{i=1}^{k}\theta_i = 1$، $\sum_{i=1}^{k} T_i = n$. نريد إيجاد مقدرات الإمكان الأكبر للمعالم المجهولة $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$.

نحسب أولا دالة الإمكان وهي عبارة عن دالة كثافة الاحتمال المشترك للعينة العشوائية $T_1, T_2, \cdots, T_k$، والتي يمكن الحصول عليها في الصورة التالية:

$$L(\mathbf{t}, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) = \frac{n!}{t_1! t_2! \cdots, t_k!} \theta_1^{t_1} \theta_2^{t_2} \cdots \theta_k^{t_k}$$

وبالتالي فإن لوغاريتم دالة الإمكان هي:

$$\ell(\mathbf{t}, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) = ln\left(\frac{n!}{t_1! t_2! \cdots, t_k!}\right) + t_1 \, ln\,\theta_1 + t_2 \, ln\,\theta_2 + \cdots + t_k \, ln\,\theta_k$$

ولكن $\sum_{i=1}^{k}\theta_i = 1$، إذن $\theta_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1}\theta_i$، وبالتالي فإنه يمكن إعادة كتابة لوغاريتم دالة الإمكان في الصورة التالية:

$$\ell(\mathbf{t}, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) = ln\left(\frac{n!}{t_1! t_2! \cdots, t_k!}\right) + \sum_{i=1}^{k-1} t_i \, ln\,\theta_i + t_k \, ln\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1}\theta_i\right)$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ θ_j، $j = 1,2,\cdots,k$، نحصل على:

$$\frac{\partial \ell(\mathbf{t}, \theta)}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^{k-1} t_i \frac{\delta_{ij}}{\theta_i} + t_k \frac{-\sum_{i=1}^{k-1}\delta_{ij}}{1 - \sum_{i=1}^{k-1}\theta_i}, j = 1,2,\ldots,k-1$$

حيث أن δ_{ij} يعرف بالعلاقة التالية :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & if\ i = j, \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

باستخدام تعريف δ_{ij} والخاصية $\theta_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1}\theta_i$ ، نحصل على :

$$\frac{\partial \ell(\mathbf{t}, \theta)}{\partial \theta_j} = \frac{t_j}{\theta_j} - \frac{t_k}{\theta_k},\ j = 1,2,\ldots,k-1$$

بمساواة هذه المشتقات بالصفر، نحصل على معادلات الإمكان التالية :

$$0 = \frac{t_j}{\theta_j} - \frac{t_k}{\theta_k},\ j = 1,2,\ldots,k-1$$

بحل هذه المعادلات، نحصل على الحل التالي :

$$\frac{t_j}{\theta_j} = \frac{t_k}{\theta_k},\ j = 1,2,\ldots,k-1$$

من هذا الحل نحصل على :

$$\frac{\theta_j}{t_j} = \frac{\theta_k}{t_k},\ j = 1,2,\ldots,k-1$$

ومنه نحصل على :

$$\theta_j = t_j \frac{\theta_k}{t_k},\ j = 1,2,\ldots,k-1$$

بالتعويض من هذه العلاقات في العلاقة التالية $\theta_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1}\theta_i$ ، نحصل على :

$$\begin{aligned} \theta_k &= 1 - \sum_{i=1}^{k-1} t_i \frac{\theta_k}{t_k} \\ &= 1 - \frac{\theta_k}{t_k}\sum_{i=1}^{k-1} t_i \\ &= 1 - \frac{\theta_k}{t_k}\left(\sum_{i=1}^{k} t_i - t_k\right) \\ &= 1 - \frac{\theta_k}{t_k}(n - t_k) \end{aligned}$$

وبالتالي فإن :

$$t_k - \theta_k t_k = \theta_k \left(n - t_k \right)$$

$$t_k = \theta_k \left(n - t_k + t_k \right)$$

$$t_k = \theta_k n$$

ومنها نحصل على :

$$\theta_k = \frac{t_k}{n}$$

بالإستعانة بهذه العلاقة نحصل في النهاية على :

$$\theta_j = t_j \frac{t_k / n}{t_k} = \frac{t_j}{n},\ j = 1,2,\ldots,k-1$$

يمكن كتابة هذه المقدرات في شكل المتجه بالصورة التالية :

$$\hat{\theta} = \left(\frac{T_1}{n}, \frac{T_2}{n}, \ldots, \frac{T_k}{n} \right).$$

يعرض المثال التالي حالة استنتاج مقدر الإمكان الأكبر عندما يعتمد مجال تعريف المتغير العشوائي يعتمد على المعلمة المجهولة.

مثال (٥,١٩)

بفرض أن $T_1, T_2, \cdots, T_k$ عينة عشوائية بسيطة تتبع توزيع منتظم على $(0,\theta)$ ونريد تقدير المعلمة θ. حيث أنه لأجل $i = 1,2,\ldots,n$ لدينا :

$$f(t_i, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \le t_i \le \theta \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

إذن دالة الإمكان في هذه الحالة هي :

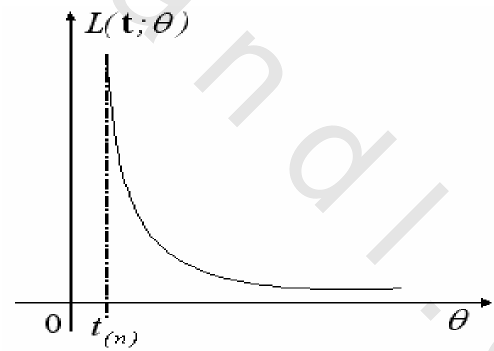
$$L(\mathbf{t}, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0 \le max_{1 \le i \le n}\, t_i \le \theta, \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

يوضح الشكل رقم (٥,٢) تغير دالة الإمكان $L(\mathbf{t},\theta)$ مع θ. من الواضح أن دالة الإمكان متناقصة في θ ، وبالتالي فإنها تأخذ قيمتها العظمى عندما تكون θ أصغر ما يمكن، وحيث أن :

$$0 \le t_i \le \theta,\ i = 1,2,\cdots,n$$

وبالتالي فإن أقل قيمة للمعلمة θ هي أكبر قيمة في مشاهدات العينة $t_{(n)} = max(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ ، أي أن قيمة θ التي تجعل دالة الإمكان نهاية عظمى $\theta = t_{(n)}$. ومن ثم فإن مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة θ هو :

$$\hat{\theta} = T_{(n)} = max(T_1,T_2,\cdots,T_n)$$



الشكل رقم (٥,٢). دالة الإمكان.

سنوضح في المثال التالي أن مقدر الإمكان يمكن أن لا يكون وحيداً.

مثال (٥,٢٠)

بفرض أن $T_1,T_2,\cdots,T_k$ عينة عشوائية بسيطة تتبع توزيع منتظم على $(\theta,\theta+1)$ ونريد تقدير المعلمة θ. حيث أنه لأجل $i = 1,2,...,n$ لدينا :

$$f(t_i,\theta)=\begin{cases}1, & \theta \le t_i \le \theta+1 \\ 0, & o.w.\end{cases}$$

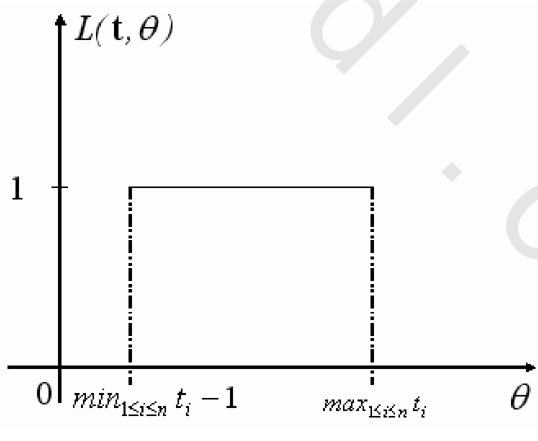
إذن دالة الإمكان في هذه الحالة هي :

$$L(\mathbf{t},\theta)=\begin{cases}1, & \theta \le min_{1\le i\le n}\, t_i < max_{1\le i\le n}\, t_i \le \theta+1, \\ 0, & o.w.\end{cases}$$

يمكن إعادة كتابة هذه الدالة في الصورة الآلية :

$$L(\mathbf{t},\theta)=\begin{cases}1, & min_{1\le i\le n}\, t_i -1 \le \theta \le max_{1\le i\le n}\, t_i, \\ 0, & o.w.\end{cases}$$

يوضح الشكل رقم (٥,٣) تغير دالة الإمكان $L(\mathbf{t},\theta)$ مع θ. من الواضح أن دالة الإمكان ثابتة في θ ، وبالتالي فإنها تأخذ قيمتها العظمى عندما تأخذ θ أي قيمة بين $min_{1\le i\le n}\, t_i -1$ ، $max_{1\le i\le n}\, t_i$. ومن ثم فإن أي قيمة لـ θ تحقق العلاقة التالية $\theta \in \left[min_{1\le i\le n}\, t_i -1, max_{1\le i\le n}\, t_i\right]$ تكون مقدر إمكان أكبر للمعلمة θ.



الشكل رقم (٥,٣). دالة الإمكان.

تمرين (٥,٣)

بفرض أن $T_1, T_2, \cdots, T_n$ عينة عشوائية بسيطة تتبع توزيع طبيعي بالمتوسط μ والتباين σ^2. استخدم طريقة الإمكان الأكبر لتقدير ما يلي :

- المعلمة $\theta = \mu$ عندما يكون σ^2 معلوم،
- المعلمة $\theta = \sigma^2$ عندما يكون μ معلوم،
- متجه المعالم $\theta = (\mu, \sigma^2)$ عندما يكون كل من μ ، σ^2 مجهول.

تمرين (٥,٤)

بفرض أن $T_1, T_2, \cdots, T_n$ عينة عشوائية بسيطة تتبع توزيع أسي دالة كثافة احتماله $f(t,\theta) = \theta e^{-\theta t}, t \geq 0, \theta > 0$. أوجد مقدر فعال للمعلمة $g(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

سنختم هذا الجزء بنظريتين سنعرضهما من دون برهان.

نظرية (٥,٣)

بفرض أن $\hat{\theta}$ مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة θ ، وأن $g(\theta)$ تحويل واحد لواحد، إذن $g(\hat{\theta})$ يكون مقدر الإمكان الأكبر للدالة $g(\theta)$.

نظرية (٥,٤)

بفرض أن $\hat{\theta}_n$ مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة θ والمحسوب باستخدام عينة حجمها n إذن يكون مقدر غير متحيز وفعال تقاربيا. أي أن $\hat{\theta}_n$ يتبع تقاربياً توزيعاً طبيعياً.

$$\hat{\theta}_n \sim N\left(\theta, \frac{1}{I(\theta)}\right)$$

(٥,٢,٢) مقدر الفترة Interval estimation

تعطي فترة الثقة حدين محسوبين محسوبان من البيانات المأخوذة من مجتمع معتمد على معلمة (أو مجموعة) مجهولة. تحتوي فترة الثقة على معلومات أكثر من التي يحتويها مقدر النقطة حول المعلمة المجهولة ؛ وذلك لأنها تقدم معلومات حول دقة مقدر النقطة.

تعرف فترة الثقة للمعلمة المجهولة θ بالمتباينة التالية :

$$L < \theta < U$$

حيث L,U دالتين في حجم العينة n ، أزمنة الحياة $t_1,t_2,\cdots,t_n$ ، واحتمال التغطية للمعلمة $1-\alpha$. سنرمز للقيمة الحقيقية للمعلمة θ بالرمز θ_0. تتحدد احتمال التغطية $1-\alpha$ بواسطة الباحث، وتنتج التغطية العالية فترات ثقة أوسع. الإختيارات المشهورة لقيمة α هي 0.1، 0.05، والتي تنتج فترات ثقة بدرجة 90%، 95% لمعلمة المجتمع المجهولة.

مثال (٥,٢١)

بفرض أن T متغير عشوائي يتبع توزيع طبيعي بالمتوسط θ والتباين σ^2 ، $T \sim N(\theta,\sigma^2)$ ، وأن σ معلوم. نريد حساب فترة ثقة للمعلمة المجهولة θ. تكمن الفكرة الرئيسية للحصول على فترة الثقة في إيجاد إحصاءة U توزيعها الاحتمالي لا يعتمد على المعلمة المجهولة θ. في هذه الحالة، يمكن أخذ:

$$U(\mathbf{t},\theta)=\frac{\overline{T}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}$$

حيث أن:

$$\overline{T}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_i$$

والآن نحسب التوزيع الإحتمالي للإحصاءة U ، يمكن التحقق من أن:

$$\sum_{i=1}^{n}T_i \sim N(n\theta,n\sigma^2)$$

ومن ثم فإن:

$$\overline{T}\sim N\left(\theta,\tfrac{1}{n}\sigma^2\right)$$

إذن:

$$U(\mathbf{t},\theta)=\frac{\overline{T}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N\left(\frac{\theta-\theta}{\sigma/\sqrt{n}},\frac{\frac{1}{n}\sigma^2}{\left(\sigma/\sqrt{n}\right)^2}\right)$$

أي أن :

$$U(\mathbf{t},\theta) \sim N(0,1)$$

أي أن التوزيع الإحتمالي للإحصاءة U لا يعتمد على المعلمة θ. والآن نفترض أن $I=[a,b]$ هي فترة الثقة بمعامل ثقة η للإحصاءة U. إذن لدينا :

$$\begin{aligned}
\eta &= P_U(a,b) \\
&= P(a<U<b) \\
&= P\left(a<\frac{\overline{T}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}<b\right) \\
&= P\left(a\,\sigma/\sqrt{n}<\overline{T}-\theta<b\,\sigma/\sqrt{n}\right) \\
&= P\left(-\overline{T}+a\,\sigma/\sqrt{n}<-\theta<-\overline{T}+b\,\sigma/\sqrt{n}\right) \\
&= P\left(\overline{T}-b\,\sigma/\sqrt{n}<\theta<\overline{T}-a\,\sigma/\sqrt{n}\right)
\end{aligned}$$

ومن ثم فإن الفترة :

$$\left(\overline{T}-b\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{T}-a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

تسمى فترة ثقة بمعامل ثقة η للمعلمة θ.

بإعطاء معامل الثقة η ، يمكن أن نهتم بحساب أصغر فترة ثقة للمعلمة θ. يمكن تحقيق ذلك كالآتي. ليكن L هو طول فترة الثقة ، إذن :

$$L=(b-a)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

والآن بأخذ $a=t$ ، $b=h(t)$ ، إذن يصبح طول الفترة :

$$L(t)=(h(t)-t)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (٥,٩)$$

تحت الشرط التالي :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{h(t)} e^{-t^2/2}\,dt=\eta$$

أو

$$\phi(h(t))-\phi(t)=\eta \qquad (٥,١٠)$$

للحصول على نقطة الصغر، نفاضل (٥,٩)، (٥,١٠) بالنسبة لـ t، ثم نساوي الناتج بالصفر، نحصل على نظام من المعادلتين التاليتين:

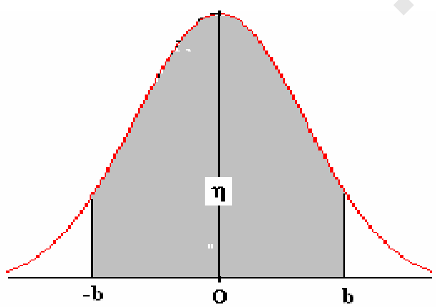
$$\begin{cases} \left(\dfrac{dh(t)}{dt}-1\right)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=0, \\ f(h(t))\dfrac{dh(t)}{dt}-f(t)=0, \end{cases}$$

باتحاد هاتين المعادلتين، نحصل على:

$$f(h(t))=f(t)$$

يكون الحل $t=h(t)$ غير مقبول، حيث أن بينما $t=-h(t)$ يكون مقبول وذلك لأن الدالة $f(t)$ دالة فردية. ومن ثم فإنه يمكن الحصول على أصغر فترة ثقة للمعلمة θ بمعامل ثقة η، عندما $a=-b$ وتكون في الصورة التالية:

$$\left(\bar{T}-b\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{T}+b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$



الشكل رقم (٥,٤). حدي الثقة لــ U.

مثال (٥,٢٢)

بفرض أن T متغير عشوائي يتبع توزيع طبيعي بالمتوسط μ والتباين θ، $T \sim N(\mu,\theta)$، حيث أن μ معلوم و θ مجهول. نريد حساب فترة ثقة للمعلمة المجهولة θ. باستخدام تباين العينة:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(T_i - \overline{T}\right)^2$$

نأخذ:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{T},\theta) &= \frac{nS^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(T_i - \overline{T}\right)^2 \end{aligned}$$

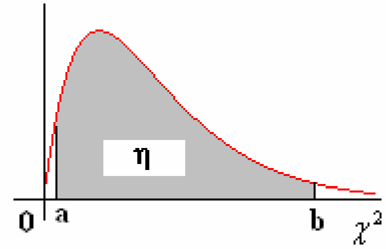
يمكن توضيح أن المتغير العشوائي $U(\mathbf{T},\theta)$ يتبع توزيع مربع كاي بعدد n-1 درجة حرية، χ^2_{n-1}، ومن ثم فإنه لا يعتمد على المعلمة المجهولة θ. ليكن $I = [a,b]$ هي فترة الثقة بمعامل ثقة η للإحصاءة U. إذن لدينا، (انظر الشكل رقم ٥,٥):

$$\begin{aligned} \eta &= P_U(a,b) \\ &= P(a < U < b) \\ &= P\left(a < \frac{nS^2}{\sigma^2} < b\right) \\ &= P\left(\frac{nS^2}{a} < \theta < \frac{nS^2}{b}\right) \end{aligned}$$

ومن ثم فإن الفترة:

$$\left(\frac{nS^2}{a},\frac{nS^2}{b}\right)$$

تسمى فترة ثقة بمعامل ثقة η للمعلمة θ.



الشكل رقم (٥,٥). حدي الثقة لــ U.

مثال (٥,٢٣)

بفرض أن T متغير عشوائي يتبع توزيع طبيعي بالمتوسط θ_1 والتباين θ_2 ، $T \sim N(\theta_1, \theta_2)$ ، حيث أن كل من المعلمتين θ_1 ، θ_2 مجهول. نريد حساب فترتي الثقة لكل من المعلمتين المجهولتين θ_1 ، θ_2. بأخذ :

$$U(\mathbf{T},\theta) = \frac{\overline{T} - \theta_1}{S}\sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

يمكن توضيح أن المتغير العشوائي $U(\mathbf{T},\theta)$ يتبع توزيع الطالب بعدد n-1 درجة حرية ، t_{n-1} ، ومن ثم فإنه لا يعتمد على المعلمة المجهولة θ_1. ليكن $I = [a,b]$ هي فترة الثقة بمعامل ثقة η للإحصاءة U. إذن لدينا ، (انظر الشكل رقم ٥,٥) :

$$\begin{aligned}
\eta &= P_U(a,b) \\
&= P(a < U < b) \\
&= P\left(a < \frac{\overline{T} - \theta_1}{S}\sqrt{\frac{n-1}{n}} < b\right) \\
&= P\left(a\,S\sqrt{\frac{n}{n-1}} < \overline{T} - \theta_1 < b\,S\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) \\
&= P\left(\overline{T} - b\,S\sqrt{\frac{n}{n-1}} < \theta_1 < \overline{T} - a\,S\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

ومن ثم فإن الفترة:

$$\left(\bar{T}-b\,S\sqrt{\frac{n}{n-1}},\bar{T}-a\,S\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)$$

تسمى فترة ثقة بمعامل ثقة η للمعلمة θ_1.

(٥,٣) طريقة بييز
Bayes Approach

عادة نوجد معلومات حول المعالم المجهولة قبل إجراء التجربة أو قبل تحليل بيانات الإخفاق المتاحة. تقدم طريقة بييز مسلكا يجمع بين استخدام البيانات السابقة المتاحة مع البيانات الحالية في تقدير المعالم المجهولة.

ليكن $\boldsymbol{T}=(T_1,T_2,\cdots,T_n)$ عينة عشوائية بسيطة من توزيع حياة دالة كثافة احتماله $f(t,\theta)$ تعتمد على متجه المعالم المجهولة $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ عددها m ينتمي إلى فضاء المعلمة Θ. حتى الآن، افترضنا أن المعلمة $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ تكون قيمة ثابتة مجهولة. في مسلك بييز، يفترض أن θ متجه عشوائي له توزيع احتمالي معين. يسمي هذا التوزيع بالتوزيع السابق prior distribution. طريقة اختيار التوزيع السابق للمعلمة θ ليست سهلة، وذلك لأن المعلمة θ ليست قابلة للمشاهدة. طريقة اختيار التوزيع السابق خارج نطاق هذا الكتاب.

ليكن $\pi(\theta)$ ترمز إلى دالة كثافة الاحتمال المشترك لمتجه المعالم المجهولة θ. دالة كثافة الاحتمال المشترك لـ t، θ هي:

$$g(t,\theta)=f(t,\theta)\pi(\theta)$$

دالة كثافة الاحتمال الهامشي لـ t هي:

$$m(t)=\int_{\Theta} f(t,\theta)\pi(\theta)d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_m$$

بالإضافة إلى ذلك، فإن دالة كثافة الاحتمال الشرطي لـ θ بإعطاء $T = t$ هي:

$$\pi(\theta \mid t) = \frac{g(t,\theta)}{m(t)}$$

تسمى هذه دالة كثافة الاحتمال بدالة كثافة احتمال التوزيع اللاحق posterior distribution لـ θ بإعطاء $T = t$. إذن بدءا بالتوزيع السابق، وبمعرفة العينة العشوائية الحالية يمكن الحصول على دالة كثافة احتمال التوزيع اللاحق للمعلمة المجهولة كمتغير عشوائي بإعطاء قيم العينة العشوائية الحالية. يعتبر التوزيع اللاحق هو الأساس في الإستدلال الإحصائي بطريقة بييز. فيما يلي سنقدم بعض الأمثلة التي توضح كيفية استخدام طريقة بييز في الإستدلال الإحصائي في الموثوقية.

مثال (٥,٢٤)

بفرض أن T متغير عشوائي يتبع توزيع أسي بالمعلمة الموجبة θ، أي دالة كثافة احتمال T هي:

$$f(t,\theta) = \theta e^{-\theta t},\ \theta > 0;\ t \geq 0$$

بفرض أن θ تتبع توزيع أسي أيضا بالمعلمة المعلومة λ، أي أن:

$$\pi(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta},\ \theta > 0;\ \lambda > 0$$

وهذا يعنى أن T متغير عشوائي يتبع توزيع أسي بمعدل فشل عبارة عن متغير عشوائي يتبع توزيع أسي. في هذه الحالة، يمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال للتوزيع غير المشروط لـ T باستخدام التكامل التالي:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_0^\infty \theta e^{-\theta t} \lambda e^{-\lambda\theta} d\theta \\ &= \lambda \int_0^\infty \theta e^{-\theta(t+\lambda)} d\theta \\ &= \lambda \left[\frac{-\theta}{(t+\lambda)} e^{-\theta(t+\lambda)} \Big|_{\theta=0}^{\infty} + \frac{1}{(t+\lambda)} \int_0^\infty e^{-\theta(t+\lambda)} d\theta \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{-\lambda}{(t+\lambda)^2} e^{-\theta(t+\lambda)} \Big|_{\theta=0}^{\infty}$$
$$= \frac{\lambda}{(t+\lambda)^2}, t \geq 0$$

من الواضح أن هذه الدالة تكون حالة خاصة من دالة كثافة احتمال التوزيع المنطقي اللوغاريتمي Log-logistic distribution.

مثال (٥,٢٥)

بفرض أن T متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بالمعلمة الموجبة θ ، أي دالة كثافة احتمال T هي :

$$f(t,\theta) = \frac{\theta^t}{t!} e^{-\theta}, \theta > 0; t = 0,1,2,\cdots$$

والآن، بفرض أن θ متغير عشوائي تتبع توزيع جاما Gamma distribution بمعلمة الشكل a ومعلمة المقياس b، أي أن دالة كثافة الاحتمال السابق للمعلمة θ هي :

$$\pi(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta}, \theta > 0; a,b > 0$$

يمكن في هذه الحالة، الحصول على دالة كثافة الإحتمال للتوزيع غير المشروط لـ T باستخدام التكامل التالي :

$$f_T(t) = \int_0^\infty \frac{\theta}{t!} e^{-\theta} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta} d\theta$$
$$= \frac{b^a}{t!\,\Gamma(a)} \int_0^\infty \theta^{a+t-1} e^{-(b+1)\theta} d\theta$$

باستخدام التحويل التالي $u = (b+1)\theta$ ، إذن $du = (b+1)d\theta$ ،

$$f_T(t) = \frac{b^a}{t!\,\Gamma(a)} \int_0^\infty \left(\frac{u}{b+1}\right)^{a+t-1} e^{-u} \frac{du}{b+1}$$
$$= \frac{b^a\,\Gamma(a+t)}{t!\,\Gamma(a)(b+1)^{a+t}}, t = 0,1,2,\cdots$$

ويسمى هذا بتوزيع جاما – بواسون، وذلك لأن توزيع جاما يمثل متغير الاختلاط وتوزيع بواسون يمثل توزيع الحياة.

مثال (٥,٢٦)

بفرض أن T متغير عشوائي يتبع توزيع أسي بالمتوسط $\frac{1}{\theta}$. دالة كثافة احتمال T هي :

$$f(t,\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-t/\theta},\ \theta>0;\ t\geq 0.$$

بفرض أن θ متغير عشوائي تتبع توزيع معكوس جاما inverse-gamma distribution بمعلمة الشكل a ومعلمة المقياس b، أي أن $\frac{1}{\theta}\sim Gamma(a,b)$ ، ودالة كثافة الاحتمال السابق للمعلمة θ هي :

$$\pi(\theta)=\frac{1}{b^a\Gamma(a)\theta^{a+1}}e^{-1/\theta b},\ \theta>0; a,b>0$$

يمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال للتوزيع اللاحق لـ θ بإعطاء $T=t$ والتي تتبع توزيع معكوس جاما بالمعلمتين $a+1$ ، $\frac{b}{1+ta}$. التوقع اللاحق لـ $T=t$ بإعطاء هو $\frac{1}{a}\left(t+\frac{1}{b}\right)$.

عرفنا من قبل دالة الإمكان $L(\mathbf{t},\theta)$ للمعلمة θ ، على فضاء المعلمة Θ. في تعريف دالة التوزيع اللاحقة للمعلمة θ بإعطاء t رأينا أنه أي عامل من عوامل $L(\mathbf{t},\theta)$ الذي لا يعتمد على θ يكون غير فعال irrelevant. يسمى العامل من عوامل $L(\mathbf{t},\theta)$ الذي يعتمد على θ بنواة (جوهر) kernel دالة الإمكان. إذا كانت $\pi(\theta)$ ،دالة كثافة احتمال التوزيع السابق للمعلمة θ ، تأخذ نفس شكل نواة دالة الإمكان فإن دالة كثافة الاحتمال السابق تسمى بدالة مرافقة conjugate. كما وضحنا في المثال (٥,٢٦)، نجد أن توزيع معكوس جاما يكون توزيع مرافق للنموذج الأسي.

إذا استخدمنا توزيع سابق مرافق فإن دالة التوزيع اللاحق تنتمي لنفس عائلة التوزيع السابق. أي أنه في حالة استخدام توزيع سابق من عائلة معينة، ولتكن مثلا عائلة جاما، فإن التوزيع اللاحق ينتمي إلى نفس العائلة، بمعنى أن التوزيع اللاحق

سينتمي إلى عائلة جاما أيضا. وهذه الخاصية في حال توفرها تسهل كثيرا من الحسابات الرياضية في طريقة بييز.

مثال (٥,٢٧)

نريد في هذا المثال توضيح أن عائلة توزيع بيتا Beta family تكون عائلة مرافقة لتوزيع برنوللي. ليكن $T_1,T_2,\cdots,T_n$ عينة عشوائية بسيطة من توزيع برنوللي بالمعلمة θ. وبفرض أن التوزيع السابق للمعلمة هو بيتا بالمعلمتين a، b. ونريد توضيح أن التوزيع اللاحق للمعلمة θ ينتمي إلى عائلة توزيع بيتا أيضاً. لدينا :

$$f(t,\theta)=\theta^{t}(1-\theta)^{1-t},\ 1>\theta>0;\ t=0,1.$$

ودالة كثافة الاحتمال السابق للمعلمة θ هي :

$$\pi(\theta)=\frac{1}{B(a,b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1},\ 1>\theta>0; a,b>0$$

إذن دالة التوزيع اللاحق θ هي :

$$\begin{aligned}\pi(\theta|\mathbf{t}) &\propto f(\mathbf{t},\theta)\pi(\theta)\\ &\propto \theta^{\sum_{i=1}^{n}t_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n}t_i}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\\ &\propto \theta^{a+\sum_{i=1}^{n}t_i-1}(1-\theta)^{b+n-1-\sum_{i=1}^{n}t_i}\end{aligned}$$

وهذا يعني أن دالة كثافة الاحتمال اللاحق للمعلمة θ بإعطاء T =t هي :

$$\pi(\theta\,|\,\mathbf{t})=\frac{1}{B(a_0,b_0)}\theta^{a_0-1}(1-\theta)^{b_0-1},0<\theta<1$$

حيث $a_0=a+\sum_{i=1}^{n}t_i$ ، $b_0=b+n-\sum_{i=1}^{n}t_i$. وهذا يعني أن دالة كثافة الاحتمال اللاحق هي دالة كثافة توزيع بيتا بالمعلمتين $a_0=a+\sum_{i=1}^{n}t_i$ ، $b_0=b+n-\sum_{i=1}^{n}t_i$ ، وهذا ما أردنا الوصول إليه. ومن ثم يمكن وبسهولة الحصول على التوقع اللاحق للمعلمة θ بإعطاء T =t على الصورة التالية :

$$E[\theta\,|\,T]=\frac{a_0}{a_0+b_0}=\frac{a+\sum_{i=1}^{n}t_i}{a+b+n}.$$

مثال (٥,٢٨)

نريد في هذا المثال توضيح أن عائلة توزيع جاما Gamma family تكون عائلة مرافقة لتوزيع بواسون. ليكن $T_1,T_2,\cdots,T_n$ عينة عشوائية بسيطة من توزيع بواسون بالمعلمة θ. وبفرض أن التوزيع السابق للمعلمة هو جاما بالمعلمتين a، b. ونريد توضيح أن التوزيع اللاحق للمعلمة θ ينتمي إلى عائلة توزيع جاما أيضاً. لدينا:

$$f(t,\theta)=\frac{\theta^t}{t!}e^{-\theta},\ \theta>0;\ t=0,1,2,\cdots$$

وبالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال المشترك للمشاهدات هي:

$$\begin{aligned} f(\mathrm{t},\theta) &= \prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^{t_i}}{t_i!}e^{-\theta} \\ &= \frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n}t_i}}{t_1!\,t_2!\cdots t_n!}e^{-n\theta} \\ &\propto \theta^{\sum_{i=1}^{n}t_i}\ e^{-n\theta} \end{aligned}$$

وحيث أن θ متغير عشوائي تتبع توزيع جاما Gamma distribution بمعلمة الشكل a ومعلمة المقياس b، إذن دالة كثافة الاحتمال السابق للمعلمة θ هي:

$$\pi(\theta)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}e^{-b\theta},\ \theta>0; a,b>0$$

أي أن:

$$\pi(\theta)\propto\theta^{a-1}e^{-b\theta}$$

ومن ثم فإن دالة التوزيع اللاحق θ بإعطاء المشاهدات هي:

$$\begin{aligned} \pi(\theta|\mathrm{t}) &\propto f(\mathrm{t},\theta)\pi(\theta) \\ &\propto \theta^{\sum_{i=1}^{n}t_i}\ e^{-n\theta}\theta^{a-1}e^{-b\theta} \\ &\propto \theta^{a+\sum_{i=1}^{n}t_i-1}\ e^{-(b+n)\theta} \end{aligned}$$

وهذا يعني أن دالة كثافة الاحتمال اللاحق للمعلمة θ بإعطاء $T=\mathrm{t}$ هي :

$$\pi(\theta\,|\,\mathbf{t})=\frac{b_0^{a_0}}{\Gamma(a_0)}\theta^{a_0-1}\ e^{-b_0\theta},\theta>0;a_0,b_0>0$$

حيث $a_0=a+\sum_{i=1}^{n}t_i$ ، $b_0=(b+n)$. وهذا يعني أن دالة كثافة الاحتمال اللاحق هي دالة كثافة توزيع جاما بالمعلمتين $a_0=a+\sum_{i=1}^{n}t_i$ ، $b_0=(b+n)$ ، وهذا ما أردنا الوصول إليه. ومن ثم يمكن وبسهولة الحصول على التوقع اللاحق للمعلمة θ بإعطاء $T=\mathrm{t}$ على الصورة التالية :

$$E[\theta\,|\,T]=\frac{a_0}{b_0}=\frac{a+\sum_{i=1}^{n}t_i}{b+n}.$$

تمرين (٥,٥)

ليكن $T_1,T_2,\cdots,T_n$ عينة عشوائية بسيطة من توزيع طبيعي بالمتوسط θ والتباين $1/r$ ، $r>0$. وضح أن التوزيع الطبيعي يكون عائلة مترافقة للتوزيع الطبيعي، أي أنه إذا كان $\theta\sim N\left(\mu_0,\frac{1}{r_0}\right)$ ، فإن $\theta\,|\,T\sim N\left(\mu_n,\frac{1}{r_n}\right)$ حيث أن، $r_n=r_0+n\,r$ ، $\mu_n=\frac{1}{r_n}\left(r_0\,\mu_0+n\,r\,\overline{T}\right)$.

(٥,٣,١) تقدير النقطة

حتى نستطيع تعريف مقدر بييز، يجب أولاً تعريف دالة الفقد loss function $\ell(\theta,T)$ والتي تمثل الفقد (التكلفة) الناتجة من استخدام المقدر T لتقدير المعلمة θ.

تعريف (٥,٩)

تعرف دالة الفقد $\ell(\theta,T)$ على أنها دالة غير سالبة في المعلمة θ والمقدر T وتمثل الفقد الناتج عندما نقدر θ بالمقدر T .

لاحظ أن دالة الفقد تكون متغيراً عشوائياً. وعلى العموم تكون دالة الفقد دالة محدبة convex في المقدر T وغالباً ما نفرضها لتكون دالة في المسافة بين قيمة المقدر والقيمة الحقيقية للمعلمة. فيما يلي بعض الأمثلة لدوال الفقد :

- فقد مربع الخطأ : $\ell(\theta,T)=(\theta-T)^2$
- فقد القيمة المطلقة للخطأ : $\ell(\theta,T)=|\theta-T|$

إذا كان $\ell(\theta,T)=0$ فإنه يكون قد تم تقدير المعلمة بشكل تام. لا يجب أن تكون دالة الفقد متماثلة.

تعريف (٥,١٠)

تعرف دالة المخاطرة $R(\theta,T)$ risk function لمقدر ما $T(X)$ للمعلمة θ ، على أنها التوقع اللاحق لدالة الفقد والذي يعطى بالعلاقة التالية :

$$R(\theta,T)=E_{X|\theta}\left[\ell(\theta,T)\right]$$

لاحظ أن دالة المخاطرة $R(\theta,T)$ تعتمد فقط على المعلمة θ. وللتوضيح نجد أن :

$$R(\theta,T)=\int_{\chi}\ell(\theta,T(x))f(x\mid\theta)dx$$

إذا كانت دالة الفقد دالة تربيعية للخطأ $\ell(\theta,T)=(\theta-T)^2$ ، فإن دالة المخاطرة $R(\theta,T)$ تسمى متوسط مربع الخطأ mean squared error، ويرمز له بالرمز MSE.

تعريف (٥,١١)

تعرف مخاطرة بييز $r(\pi,T)$ Bayes risk لمقدر ما $T(X)$ للمعلمة θ بالنسبة للتوزيع السابق $\pi(\theta)$ ، على أنها توقع دالة المخاطرة بالنسبة لتوزيع السابق.

من هذا التعريف ، نجد أن :

$$\begin{aligned}
r(\pi,T)&=E_{\pi}\left[R(\theta,T)\right]\\
&=\int_{\Theta}R(\theta,T)\pi(\theta)d\theta\\
&=\int_{\Theta}\int_{\chi}\ell(\theta,T(x))f(x\mid\theta)dx\,\pi(\theta)d\theta\\
&=\int_{\chi}m(x)\int_{\Theta}\ell(\theta,T(x))\pi(\theta\mid x)d\theta\,dx\\
&=E_{m}\left[E_{X|\theta}\left[\ell(\theta,T(x))\right]\right]
\end{aligned}$$

تعريف (٥,١٢)

يعرف مقدر بييز Bayes estimator $T^{*}(X)$ للمعلمة θ بالنسبة للتوزيع السابق $\pi(\theta)$ ، على أنه ذلك المقدر الذي يجعل مخاطرة بييز أصغر ما يمكن ، أي أن مقدر بييز يحقق العلاقة التالية :

$$r(\pi,T^{*})=\min_{\delta} r(\pi,\delta)$$

اقتراح (٥,٢)

مقدر بييز $T^{*}(X)$ هو ذلك المقدر الذي يجعل المخاطرة $R(\theta,T)=E_{X|\theta}[\ell(\theta,T)]$ قيمة صغري.

والآن ندرس الحالة عندما يكون دالة الفقد تربيعية في الخطأ. في هذه الحالة يكون لدينا :

$$\ell(\theta,T)=(\theta-T)^{2}$$

مقدر بييز T^{*} يصغر التوقع التالي :

$$E_{X|\theta}[\ell(\theta,T)]=\int_{\Theta}(\theta-T)^{2}\pi(\theta\mid x)d\theta$$

بتفاضل العلاقة السابقة بالنسبة لـ T، نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial T}E_{X|\theta}[\ell(\theta,T)]=-\int_{\Theta}2(\theta-T)\pi(\theta\mid x)d\theta$$

بمساواة الناتج بالصفر ، نحصل على العلاقة التالية :

$$0=\int_{\Theta}2(\theta-T)\pi(\theta\mid x)d\theta$$

وبالتالي فإن :

$$0=\int_{\Theta}2\theta\,\pi(\theta\mid x)d\theta-\int_{\Theta}T\,\pi(\theta\mid x)d\theta$$

ومنها فإن :

$$T\int_{\Theta}\pi(\theta\mid x)d\theta=\int_{\Theta}\theta\,\pi(\theta\mid x)d\theta$$

وحيث أن $\int_{\Theta} \pi(\theta \mid x)d\theta = 1$ ، إذن :

$$T = \int_{\Theta} \theta\, \pi(\theta \mid x)d\theta$$

وهذا يدل على أن مقدر بييز هو التوقع اللاحق، أي أن :

$$T^* = E[\theta \mid X]$$

وأن

$$\begin{aligned} r(\pi, T^*) &= E_m\left[E_{X|\theta}\left[(\theta - T)^2\right]\right] \\ &= E_m\left[E_{X|\theta}\left[(\theta - E[\theta \mid X])^2\right]\right] \\ &= E_m\left[Var_{X|\theta}[\theta \mid X]\right] \end{aligned}$$

نظرية (٥,٥)

بفرض أن دالة الفقد تربيعية في الخطأ $\ell(\theta, T) = (\theta - T)^2$ ، إذن

- مقدر بييز $T^* = E[\theta \mid X]$ يكون عبارة عن التوقع اللاحق للمعلمة بإعطاء المشاهدات.
- مخاطرة بييز الأصغر $r(\pi, T^*) = E_m\left[Var_{X|\theta}[\theta \mid X]\right]$ يكون عبارة عن التباين اللاحق للمعلمة بإعطاء المشاهدات.

مثال (٥,٢٩)

ليكن $T_1, T_2, \cdots, T_n$ عينة عشوائية بسيطة من توزيع بواسون بالمعلمة θ. وبفرض أن التوزيع السابق للمعلمة هو جاما بالمعلمتين a، b، وبفرض أن $\ell(\theta, T) = (\theta - T)^2$.

أ) أوجد مقدر بييز للمعلمة θ ،

ب) أوجد مخاطرة بييز الصغري.

الحل

لقد أوضحنا في مثال (٥,٢٨) أن التوزيع اللاحق للمعلمة θ بإعطاء المشاهدات هو توزيع جاما بالمعلمتين $a_0 = a + \sum_{i=1}^{n} t_i$ ، $b_0 = (b+n)$. ومن ثم فإن:

أ) مقدر بييز للمعلمة $T^* = E[\theta \mid X]$ هو:

$$E[\theta \mid T] = \frac{a + \sum_{i=1}^{n} t_i}{b+n}.$$

ب) مخاطرة بييز الأصغر:

$$r(\pi, T^*) = E_m\left[Var_{X|\theta}[\theta \mid X]\right]$$

وحيث أن:

$$Var_{X|\theta}[\theta \mid X] = \frac{a_0}{b_0^2} = \frac{a + \sum_{i=1}^{n} t_i}{(b+n)^2}$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} r(\pi, T^*) &= E_m\left[\frac{a + \sum_{i=1}^{n} T_i}{(b+n)^2}\right] \\ &= \frac{1}{(b+n)^2} E_m\left[a + \sum_{i=1}^{n} T_i\right] \\ &= \frac{1}{(b+n)^2} \left\{a + \sum_{i=1}^{n} E[T_i]\right\} \end{aligned}$$

ولكن:

$$\begin{aligned} E[T_i] &= E[E[T_i \mid \theta]] \\ &= E[\theta] \\ &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

ولذلك فإن:

$$r(\pi,T^*) = \frac{1}{(b+n)^2}\left\{a+n\frac{a}{b}\right\}$$
$$= \frac{a(b+n)}{(b+n)^2\, b}$$
$$= \frac{a}{(b+n)b}.$$

(٥,٣,٢) تقدير الفترة

سنقدم في هذا البند كيفية الحصول على مقدر الفترة باستخدام طريقة بييز، وتسمى هذه الفترة بفترة ثقة احتمال بييز بجانبين Two-sided Bayesian probability interval. تعرف فترة ثقة احتمال بييز بجانبين بدرجة $100(1-\alpha)\%$ للمعلمة θ ، نرمز لها بـ (u,v) ، على أنها حل لنظام المعادلتين التاليتين بالنسبة لـ u ، v :

$$\int_0^u \pi(\theta\mid x)d\theta = \frac{\alpha}{2}$$
$$\int_v^\infty \pi(\theta\mid x)d\theta = \frac{\alpha}{2}$$

يمكن إعادة كتابة المعادلة الأخيرة في الصورة التالية:

$$\int_0^v \pi(\theta\mid x)d\theta = 1-\frac{\alpha}{2}$$

ومن ثم فإنه يمكن إعادة كتابة النظام السابق في الصورة التالية:

$$G_\theta(u) = \frac{\alpha}{2}$$
$$G_\theta(v) = 1-\frac{\alpha}{2}$$

أو

$$u = G_\theta^{-1}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)$$
$$v = G_\theta^{-1}\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right)$$

مثال (٥,٣٠)

لتكن 0000010011 عينة عشوائية بسيطة من توزيع بواسون بمتوسط θ. وبفرض أن التوزيع السابق للمعلمة هو جاما بالمعلمتين $a=0.05$، $b=0.1$، وبفرض أن $\ell(\theta,T)=(\theta-T)^2$. أوجد فترة ثقة احتمال بييز بجانبين بدرجة 95% للمعلمة θ.

الحل: بالعودة إلى المثال (٥,٢٨)، نجد أن دالة التوزيع اللاحقة للمعلمة θ تتبع توزيع جاما بالمعلمتين $a_0=a+\sum_{i=1}^{n} t_i=2.05$ ، $b_0=(b+n)=10.1$. ومن ثم فإنه يمكن الحصول على فترة ثقة احتمال بييز بدرجة 95% للمعلمة θ بحل المعادلتين

$$u=G_\theta^{-1}(0.025)$$

$$v=G_\theta^{-1}(0.975)$$

حيث $G_\theta(.)$ هي دالة التوزيع التراكمية لتوزيع جاما بالمعلمتين $a_0=2.05$ ، $b_0=10.1$ وأن $G_\theta^{-1}(.)$ معكوسها. من الواضح أنه لا يمكن حساب قيمة u, v تحليليا، ومن ثم يجب استخدام إحدى الطرق العددية. يمكن استخدام أي من الحزم الرياضية المتاحة لذلك مثل MINITAB, R, MATLAB, MAPLE، ... إلخ. هنا سنستخدم MINITAB لإيجاد قيمتي u, v ، فيما يلي مجموعة الأوامر المستخدمة لهذا الهدف بعد وضع البيانات في العمود c1

```
MTB > let k1 = 1/(0.1+sum(c1))
MTB > let k2 = 1/(0.05 + n(c1))
MTB > invc 0.025; # u
SUBC> gamma k1 k2.
MTB > invc 0.975; # v
SUBC> gamma k1 k2.
```

بعد تنفيذ جملة الأوامر السابقة نحصل على u=0.0000333 , v= 0.243395 .

(٤,٥) تمارين
Problems

فيما يلي سنستخدم الرمز I_A ليعبر عن دالة في المجموعة A.

(٥,١) ليكن X متغير عشوائي له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x,\theta)=\theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x),$$

حيث θ معلمة مجهولة.

(أ) استخدم طريقة العزوم لتقدير θ. ما هو مقدار تحيز المقدر الذي تحصل عليه؟

(ب) استخدم طريقة الإمكان لتقدير θ. ما هو مقدار تحيز المقدر الذي تحصل عليه؟

(٥,٢) ليكن X متغير عشوائي له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x,\theta)=e^{-(x-\theta)} I_{(\theta,\infty)}(x),$$

حيث θ معلمة مجهولة.

(أ) استخدم طريقة العزوم لتقدير θ. ما هو مقدار تحيز المقدر الذي تحصل عليه؟

(ب) استخدم طريقة الإمكان لتقدير θ. ما هو مقدار تحيز المقدر الذي تحصل عليه؟

(٥,٣) ليكن X متغير عشوائي يتبع توزيع برنوللي بالمعلمة θ. أوجد مقدري العزوم والإمكان الأكبر للمعلمة θ.

(٥,٤) ليكن X متغير عشوائي متقطع له دالة كتلة الاحتمال التالية :

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\theta} I_{(1,2,\cdots,\theta)}(x),$$

حيث θ معلمة مجهولة.

(أ) استخدم طريقة العزوم لتقدير θ. ما هو مقدار تحيز المقدر الذي تحصل عليه؟

(ب) استخدم طريقة الإمكان لتقدير θ. ما هو مقدار تحيز المقدر الذي تحصل عليه؟

(٥,٥) ليكن X متغير عشوائي دالة كثافة احتماله هي :

$$f(x,\theta)=I_{\left(\theta-\frac{1}{2},\ \theta+\frac{1}{2}\right)}(x),$$

حيث θ معلمة حقيقية مجهولة. أوجد مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة θ.

(٥,٦) ليكن X متغير عشوائي يتبع التوزيع الهندسي بالمعلمة θ.

(أ) أوجد مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة θ.

(ب) أوجد الحد الأدنى لتباين أي مقدر غير متحيز للمعلمة $1-\theta$.

(ج) هل توجد دالة في المعلمة θ تسمح بوجود مقدر كافٍ؟

(٥,٧) ليكن X متغير عشوائي متقطع له دالة كتلة الاحتمال التالية :

$$f(x,\theta)=\binom{2}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{2-x}I_{(1,2,3)}(x),\theta\in(0,1)$$

(أ) أوجد مقدر للمعلمة θ. هل هذا المقدر غير متحيز؟ هل هو فعال؟ لماذا؟

(ب) أوجد مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة θ^2. هل هذا المقدر غير متحيز؟

(ج) هل يوجد مقدر فعال للمعلمة θ ؟

(٥,٨) ليكن X متغير عشوائي له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x,\theta)=\frac{1}{2}\,e^{-|x-\theta|},$$

حيث θ معلمة حقيقية موجبة مجهولة.

(أ) أوجد مقدر العزوم للمعلمة θ.

(ب) أوجد مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة θ.

(٥,٩) ليكن X متغير عشوائي له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x,\theta)=\theta(1+x)^{-(\theta+1)}I_{(0,\infty)}(x),$$

حيث θ معلمة حقيقية موجبة مجهولة.

(أ) أوجد مقدر العزوم للمعلمة θ ، $(\theta>1)$.

(ب) أوجد مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة θ^2. هل هذا المقدر غير متحيز؟

(ج) هل يوجد مقدر فعال للمعلمة θ ؟

(٥,١٠) ليكن X متغير عشوائي له دالة الكتلة الإحتمالية

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!},\quad x\in\{0,1,2,\cdots\}$$

حيث λ معلمة حقيقية موجبة مجهولة.

(أ) أوجد مقدار المعلومات الموجودة في العينة $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ للمتغير العشوائي X والمتعلقة بالمعلمة λ.

(ب) أوجد مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة λ.

(ج) أوجد مقدر فعال للمعلمة λ ؟

(د) أوجد مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة $h(\lambda)=e^{-\lambda}$.

(هـ) أوجد مقدار المعلومات الموجودة في العينة $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ للمتغير العشوائي X والمتعلقة بالمعلمة $h(\lambda)$.

(و) من أجل $i\in\{1,2,\cdots n\}$، لتكن

$$I_{\{0\}}\circ X_i=\begin{cases}1, & X_i=0,\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

والإحصاءة $T(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_{\{0\}}\circ X_i$.

(أ) هل الإحصاءة $T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ مقدر غير متحيز للمعلمة $h(\lambda)=e^{-\lambda}$ ؟

(ب) إذا كان غير متحيز، فهل هو مقدر فعال للمعلمة $h(\lambda)=e^{-\lambda}$ ؟

(٥,١١) ليكن X متغير عشوائي له دالة كثافة الإحتمال التالية

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(x),$$

حيث θ معلمة حقيقية موجبة مجهولة. أوجد فترة ثقة بمعامل ثقة η للمعلمة θ.

(٥,١٢) ليكن X متغير عشوائي له دالة كثافة الإحتمال التالية

$$f(x,\theta)=\theta\, e^{-\theta x}I_{(0,\infty)}(x),$$

حيث θ معلمة حقيقية موجبة مجهولة. أوجد فترة ثقة بمعامل ثقة η للمعلمة θ.

(٥,١٣) ليكن X متغير عشوائي له دالة كثافة الإحتمال التالية

$$f(x,\theta)=\frac{2x}{\theta^2}(1+x)^{-(\theta+1)}I_{(0,\theta)}(x),$$

حيث θ معلمة حقيقية موجبة مجهولة. أوجد فترة ثقة بمعامل ثقة η للمعلمة θ.

(٥,١٤) ليكن X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط θ و تباين ١. لتكن (X_1,X_2) عينة من X ولتكن (Y_1,Y_2) العينة المرتبة.

(أ) أحسب $\gamma=P(Y_1<\theta<Y_2)$ وأحسب متوسط طول الفترة $[Y_1,\,Y_2]$.

(ب) أوجد فترة ثقة بمعامل ثقة η للمعلمة θ. قارن طول هذه الفترة مع متوسط طول الفترة السابق.

(٥,١٥) لتكن X الشاهدة الوحيدة من دالة كثافة الإحتمال التالية

$$f(x,\theta)=\theta x^{\theta-1}I_{(0,1)}(x),$$

حيث θ معلمة حقيقية موجبة مجهولة. لتكن (X_1,X_2) عينة من X ولتكن (Y_1,Y_2) العينة المرتبة.

(أ) أوجد فترة ثقة بمعامل ثقة α للمعلمة θ.

(ب) بين أن $\left[-\frac{1}{2\ln x}, \frac{1}{2\ln x}\right]$ فترة ثقة للمعلمة θ. ما هو معامل ثقة هذه الفترة؟

(٥,١٦) أفرض أن $T_1,\cdots T_n$ متغيرات عشوائية مستقلة تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط θ وتباين $\frac{1}{r}$ وأن التوزيع القبلي للمعلمة θ توزيع طبيعي بمتوسط μ_0 وتباين $\frac{1}{r_0}$.

(أ) أوجد دالة كثافة الإحتمال للمتغير العشوائي $\theta \mid T$.

(ب) بفرض أن دالة الفقد هي $\ell(\theta,T)=(\theta-T)^2$ ، أوجد مقدر بييز للمعلمة θ بالنسبة للتوزيع القبلي السابق.

(ج) أوجد مخاطرة بييز الصغرى.

(٥,١٧) أفرض أن T متغير عشوائي يتبع توزيع بيتا بالمعلمتين θ و n ، وأن التوزيع القبلي للمعلمة المجهولة θ توزيع منتظم على الفترة $(0, 1)$.

(أ) أوجد دالة كثافة الإحتمال للمتغير العشوائي $\theta \mid T$.

(ب) بفرض أن دالة الفقد هي $\ell(\theta,T)=(\theta-T)^2$ ، أوجد مقدر بييز للمعلمة θ بالنسبة للتوزيع القبلي السابق.

(ج) أوجد مخاطرة بييز الصغرى.

(٥,١٨) أفرض أن دالة الفقد هي

$$\ell(\theta,T)=k(\theta)(\theta-T)^2 .$$

(أ) بين أن مقدر بييز T^{π} يعطى بالصيغة التالية

$$T^{\pi} = \frac{E[\theta\, k(\theta) \mid T]}{E[k(\theta) \mid T]}$$

(ب) أفرض أن $k(\theta) = \dfrac{1}{\theta}$ ، أن $T_1, T_2, \cdots, T_n$ عينة عشوائية بسيطة من توزيع بواسون بالمعلمة θ ، وأن التوزيع القبلي للمعلمة θ توزيع جاما بالمعلمتين a_0 و b_0. أوجد مقدر بييز للمعلمة θ بالنسبة للتوزيع القبلي السابق.

(ج) أوجد مخاطرة بييز الصغرى.

الفصل السادس

التقدير غير المعلمي
Non-Parametric Estimation

(٦,١) مقدمة
Introduction

تمكنا الطرق اللامعلمية من معرفة طبيعة التوزيع المأخوذ منه البيانات المتوفرة بدون تحديد نوع معين من التوزيعات المعلمية.

يعتبر الرسم البياني النسيجي histogram لمجموعة بيانات إحدى الصيغ الأكثر استخداماً في الطرق اللامعلمية. أيضا يمكن استنتاج متوسط العينة، تباين العينة، وإحصاءات أخرى بدون تحديد توزيع معلمي معين.

بالإضافة إلى الرسم البياني النسيجي و إحصاءات العينة تقدم إحصاءات الرتبة rank statistics تمثيل بياني تقريبي لدالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي.

(٦,٢) طريقة كلاسيكية
Classical Approach

كما في الفصل السابق في حالة مقدرات المعالم، سوف نبدأ بالحالة التي فيها لا يوجد معلومات مسبقة حول توزيع المعلمة المجهولة θ .

(٦,٢,١) الرسم البياني النسيجي Histogram

يمكن تكوين الرسم البياني النسيجي كالآتي. نبدأ بإيجاد مدى البيانات (أي نوجد الفرق بين أكبر وأصغر قيمة في البيانات). بمعرفة المدى، نختار طول الفترة بحيث أنه يمكن تقسيم البيانات إلى عدد ما وليكن n من المجاميع.

ولإدراك أكبر كمية ممكنة من المعلومات من العينة، يجب أن يكون عدد المجاميع المقسم إليها البيانات مقبول. إذا استخدمنا عدد قليل جداً من المجاميع، سنحصل على طبيعة توزيع غامض وبدقة ضعيفة. وإذا استخدمنا عدد كبير جداً من المجاميع، سنحصل على ذبذبة عالية في التكرارات والتي ستخفي طبيعة التوزيع.

بالرغم من عدم وجود قاعدة دقيقة ومحددة في تحديد أفضل عدد ممكن للفترات (للمجاميع)، فإنه يمكن استخدام الطريقة التالية. إذا كان n هو عدد البيانات و r هو مدى البيانات، إذن الطول المنطقي للفترات يكون:

$$\Delta = \frac{r}{1+3.3\log_{10} n}$$

مثال (٦,١)

بفرض بيانات مسافات التوقف المعروضة في الجدول رقم (٦,١).

الجدول رقم (٦,١). بيانات من E. Pieruschka (1963)

	A	B	C	D	E	F	G
1	39	54	21	42	66	50	56
2	62	59	40	41	75	63	58
3	32	43	51	60	65	48	61
4	27	46	60	73	36	38	54
5	60	36	35	76	54	55	45
6	71	54	46	47	42	52	47
7	62	55	49	39	40	69	58
8	52	78	56	55	62	32	57
9	45	84	36	58	64	67	62
10	51	36	73	37	42	53	49

حجم العينة هنا $n = 70$ ومدى البيانات هو $r = 84 - 21 = 63$ ، وبالتالي فإن طول الفترة يعطى بالقيمة التالية :

$$\Delta = \frac{63}{1 + 3.3 log_{10} 70} \approx 8.887$$

إذا أخذنا $\Delta = 10$ ، إذن يمكن تحديد عدد المشاهدات التي تقع داخل كل فترة، انظر الجدول رقم (٦,٢).

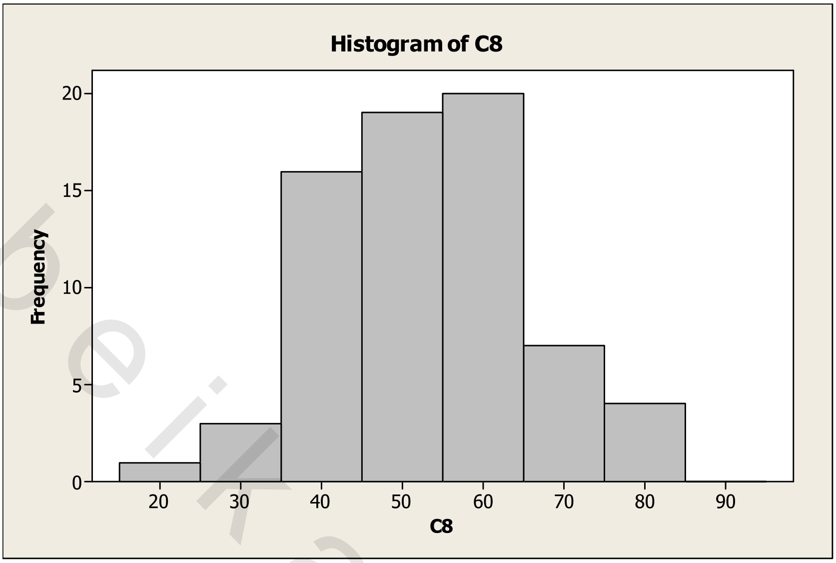
الجدول رقم (٦,٢). تفريغ البيانات الموجودة في الجدول رقم (٦,١).

الفترات	تفريغ البيانات	التكرارات
20-29	//	2
30-39	///// ///// /	11
40-49	///// ///// ///// /	16
50-59	///// ///// ///// /////	20
60-69	///// ///// ////	14
70-79	///// /	6
80-89	/	1

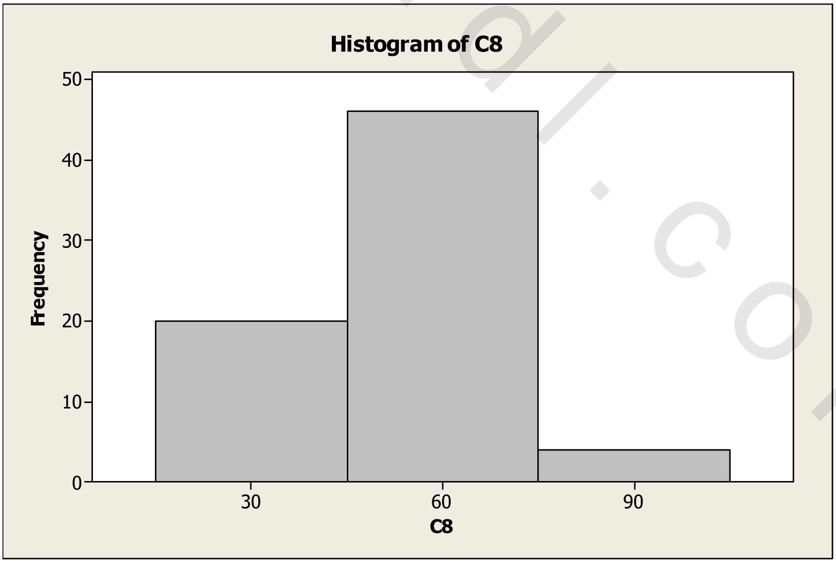
أحياناً يطلق على الرسم البياني النسيجي المدرج التكراري، يمكن استخدام البيانات الموضحة في الجدول رقم (٦,٢) لرسم المدرج التكراري.

يوضح الشكل رقم (٦,١أ) المدرج التكراري للبيانات باستخدام الفترات الموضحة في الجدول رقم (٦,٢). يمكن الحصول على أشكال مختلفة للمدرج التكراري وذلك باختيار أطوال مختلفة للفترات.

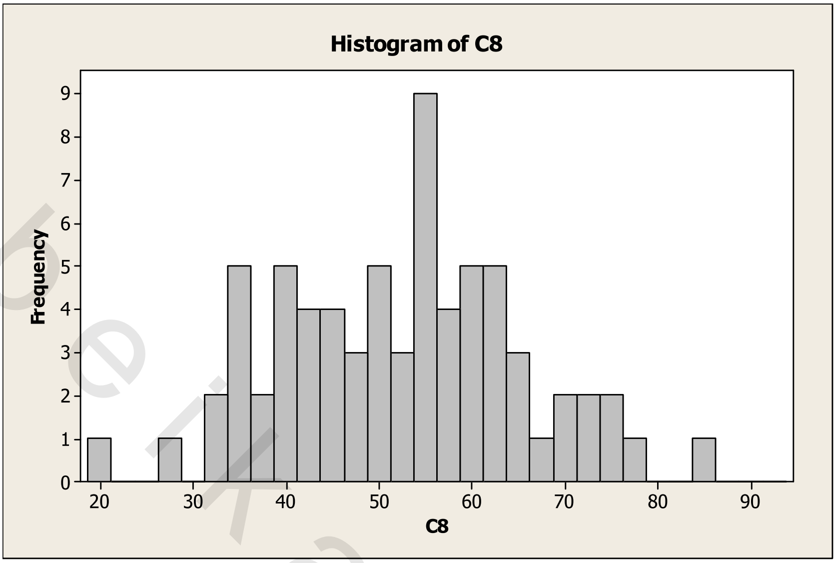
يوضح الشكل رقم (٦,١ب)، (٦,١ج) المدرج التكراري عندما يكون عدد الفترات قليل وكبير نسبياً على الترتيب.



الشكل رقم (أ) : عدد الفترات يساوي 10



الشكل رقم (ب) : عدد الفترات يساوي 3



الشكل رقم (ج) : عدد الفترات يساوي 30.

الشكل رقم (٦,١). تأثير اختيار عدد الفترات على المدرج التكراري.

(٦,٢,٢) دالة كثافة الاحتمال Probability density function

الطريقة الأساسية لتوضيح كيفية اختيار التوزيع الاحتمالي الذي يمثل مجموعة بيانات معينة هي رسم الصيغة التحليلية للتوزيع فوق المدرج التكراري. أولاً ، يجب معايرة المدرج التكرار أو الرسم البياني النسيجي لتقريب دالة كثافة الاحتمال $f(x)$. ولعمل ذلك يجب أن يحقق المدرج التكراري شرط المعايرة التالي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \qquad (٦,١)$$

بفرض أن $n_1, n_n, ...$ عبارة عن تكرارات البيانات التي تظهر في الفترات المختلفة وأن $n_1 + n_n + ... = n$. إذا أردنا تقريب دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ بواسطة f_i في الفترة n_i ، إذن يجب أن تتناسب قيمة الدالة f_i مع عدد التكرارات n_i ، أي أن :

$$f_i = a\,n_i\,,\ i = 1,2,...$$

حيث أن a ثابت التناسب. حتى يحقق المدرج التكراري العلاقة (٦,١)، شرط المعايرة لدالة كثافة الاحتمال، يجب أن يتحقق الشرك التالي :

$$\sum_i f_i \Delta = 1.$$

من هاتين المعادلتين، نحصل على :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_i a\,n_i \Delta \\ &= a\,\Delta \sum_i n_i \\ &= a\,\Delta n. \end{aligned}$$

ومن ثم فإن :

$$a = \frac{1}{\Delta n},$$

وأن :

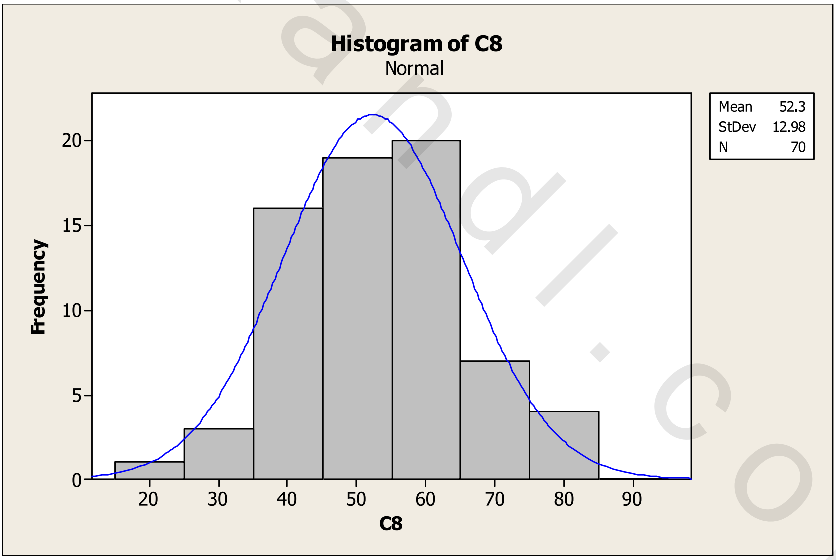
$$f_i = \frac{1}{\Delta}\frac{n_i}{n}, i = 1,2,...$$

مثال (٦,٢)

بفرض بيانات المثال (١ ،٦)، فإنه يمكن رسم دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ التي تقرب هذه البيانات كما هو موضح بالشكل رقم (٦,٢).

يمكن استخدام MINITAB لرسم المدرج التكراري مع توفيق توزيع الطبيعي، وذلك بكتابة مجموعة الأوامر التالية :

```
MTB > set c1
DATA> 56 58 61 54 45 47 58 57 62 49 50 63 48 38
55 52 69 32 67 53 66 75 65 36 54 42 40 62 64 42
42 41 60 73 76 47 39 55 58 37 21 40 51 60 35 46
49 56 36 73 54 59 43 46 36 54 55 78 84 36 39 62
32 27 60 71 62 52 45 51
DATA> end
MTB > hist c8;
SUBC> bar;
SUBC> nint 8;
SUBC> dist;
SUBC> norm.
```



الشكل رقم (٦,٢). التوزيع الطبيعي والمدرج التكراري للبيانات المعروضة في الجدول رقم (٦,١).

وللمقارنة، تم رسم دالة كثافة احتمال التوزيع الطبيعي، وتم تقدير قيمة كل من متوسط وتباين التوزيع الطبيعي باستخدام الطريقة اللامعلمية، كالآتي:

- متوسط العينة sample mean: يمكن تقدير متوسط التوزيع الطبيعي بالعلاقة التالية:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \qquad (٦,٢)$$

وباستخدام بيانات العينة حصلنا على $\hat{\mu} = 52.3$.

يمكن الحصول على هذه النتيجة باستخدام MINITAB بكتابة:

```
MTB > mean c1
```

فنحصل على:

Mean of C1

```
Mean of C1 = 52.3
```

- تباين العينة sample variance: يمكن تقدير تباين التوزيع الطبيعي بالعلاقة التالية:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \mu\right)^2 \qquad (٦,٣)$$

إذا كان المتوسط معلوم. أما إذا كان المتوسط غير معلوم، ويجب تقديره من المعادلة (٦,٢)، فإنه يمكن تقدير التباين من العلاقة التالية:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \hat{\mu}\right)^2 \qquad (٦,٤)$$

والتي يمكن إعادة كتابتها على الصورة التالية:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^{\,2} - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2\right]$$

بالنسبة لبيانات المثال (٦,١) حصلنا على $\hat{\sigma}^2 = 168.47$.

• التــواء العينــة sample skewness : يمكــن تقديــر معامــل التــواء بالعـلاقــة التالية :

$$\hat{sk} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \hat{\mu}\right)^3}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \hat{\mu}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad (٦,٥)$$

في المثال الحالي $\hat{sk} = 0.0814$

• تفــلطح العينــة sample kurtosis : يمــكن تقديــر معامــل التفــلطح بالعلاقة التالية :

$$\hat{ku} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \hat{\mu}\right)^4}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \hat{\mu}\right)^2\right]^{2}} \qquad (٦,٦)$$

في المثال الحالي $\hat{ku} = -0.268$

يمكن استخدام MINITAB لحساب مقدر معاملي التواء والتفلطح كالآتي :

```
MTB > Describe C1;
SUBC>   Skewness;
SUBC>   Kurtosis.
```

فنحصل على :

Descriptive Statistics: C1

```
Variable  Skewness  Kurtosis
C1            0.08     -0.27
```

(٦,٢,٣) دالة التوزيع التراكمية Cumulative distribution function

غالباً يكون عدد بيانات العينة المتاحة صغير جداً ومن ثم فإن المدرج التكراري لا يكون ذي جودة كافية لتمثيل هذه البيانات. تحدث مثل هذه الحالات في الهندسة

والموثوقية، وبشكل خاص عندما يتم اختيار أحد الأجزاء الحساسة في معدة ما، ويتم تسجيل عدد الأجزاء التي تفشل. في هذا المثال يكون عدد المشاهدات صغير نتيجة حساسية الجزء تحت الاختبار. تقدم إحصاءات الرتبة rank statistics تقنية عالية لتقديم تمثيل بياني لدالة التوزيع التراكمي.

لتطبيق هذه التقنية، نأخذ أولاً عينة عشوائية ثم نقوم بترتيبها تصاعديا، ومن ثم تتكون العينة من سلسلة من أزمنة الحياة المرتبة $t_1, t_2, \ldots, t_n$. بعد ذلك نقدر دالة التوزيع التراكمية عند t_i. يمكن تقريب دالة التوزيع التراكمية عند t_i من العلاقة التالية إذا كان حجم العينة كبيراً:

$$\hat{F}(t_i) = \frac{i}{n}, i = 1,2,\ldots,n$$

حيث $\hat{F}(0) = 0$ إذا كان المتغير العشوائي قيد الدراسة موجب.

أما إذا كان حجم العينة ليس كبيراً، أي أقل من 15، فإن:

$$\hat{F}(t_i) = \frac{i}{n+1}, i = 1,2,\ldots,n$$

مثال (٦,٣)

يعرض الجدول رقم (٦,٣) أزمنة حياة 14 مصباحاً كهربائياً يعمل عند 12.6 فولت، نريد رسم دالة التوزيع التراكمية لهذه البيانات. أي أننا نريد رسم $F(t)$ مقابل t زمن حياة المصباح.

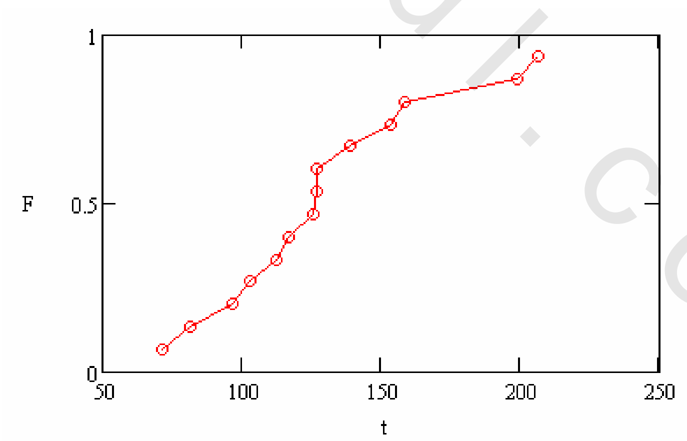
72, 82, 97, 103, 113, 117, 126, 127, 127, 139, 154, 159, 199, 207

يعرض الجدول التالي البيانات اللازمة لحساب $F(t)$

الجدول رقم (٦,٣). حسابات مثال (٦,٣).

i	t_i	$\hat{F}(t_i)=\frac{i}{n+1}$
1	72	0.066667
2	82	0.133333
3	97	0.200000
4	103	0.266667
5	113	0.333333
6	117	0.400000
7	126	0.466667
8	127	0.533333
9	127	0.600000
10	139	0.666667
11	154	0.733333
12	159	0.800000
13	199	0.866667
14	207	0.933333

والآن رسم $\hat{F}(t_i)$ مقابل t_i ، يوضح الشكل رقم (٦,٣) هذا الرسم.



الشكل رقم (٦,٣). رسم دالة التوزيع التراكمية التجريبية.

(٦,٢,٤) الموثوقية ودالة الإخفاق المتكاملة Reliability and integrated failure rate

حيث أن كلا من دالة التوزيع التراكمية ودالة الموثوقية مرتبطان معا بالعلاقة $S(t)=1-F(t)$ ، ومن ثم فإنه يمكن تقدير دالة الموثوقية بالعلاقة التالية :

$$\hat{S}(t_i)=1-\frac{i}{n}=\frac{n-i}{n}, i=1,2,\ldots,n$$

وذلك إذا كان حجم العينة كبيرا ، وأما إذا كان حجم العينة صغير فإن :

$$\hat{S}(t_i)=1-\frac{i}{n+1}=\frac{n+1-i}{n+1}, i=1,2,\ldots,n$$

بالإضافة إلى دالة الموثوقية ، نريد فحص دالة الإخفاق المتكاملة كدالة في الزمن.

حيث أن $R(t)=-ln\,S(t)$ ، إذن يمكن الحصول على التقدير التالي :

$$\hat{R}(t_i)=-\ln(n-i)+\ln(n),\ i=1,2,\ldots,n$$

وذلك إذا كان حجم العينة كبيرا ، وأما إذا كان حجم العينة صغير فإن :

$$\hat{R}(t_i)=-\ln(n+1-i)+\ln(n+1),\ i=1,2,\ldots,n$$

في رسم دالة الإخفاق يتم رسم دالة الإخفاق المتكاملة $R(t)$ مقابل الزمن t.

يعطي هذا الرسم معلومات عن طبيعة زمن الحياة :

- الرسم الخطي يشير إلى معدل إخفاق ثابت.
- الرسم المقعر يشير إلى معدل إخفاق متناقص.
- الرسم المحدب يشير إلى معدل إخفاق متزايد.

يوضح المثال التالي كيفية استخدام مقدرات دالة الموثوقية ودالة الإخفاق المتكاملة.

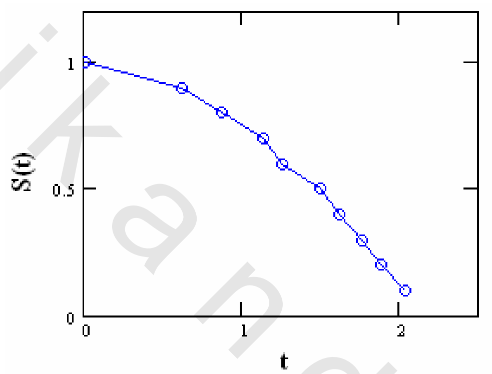
مثال (٦,٤)

يعرض الجدول رقم (٦,٤) أزمنة حياة 9 أجهزة ، ونريد رسم كل من دالة الموثوقية ودالة الإخفاق المتكاملة لهذه البيانات.

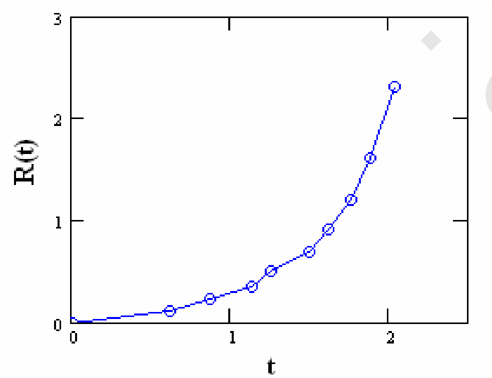
الجدول رقم (٦,٤). أزمنة حياة المثال (٦,٤).

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_i	0.00	0.62	0.87	1.13	1.25	1.50	1.62	1.76	1.88	2.03

يعرض الجدول رقم (٦,٥) الحسابات الضرورية لرسم كل من دالة الموثوقية $S(t)$ ودالة الإخفاق $R(t)$.



(أ) دالة الموثوقية،



(ب) دالة معدل الإخفاق المتكامل.

الشكل رقم (٦,٤). التقدير غير المعلمي لكل من: (أ) دالة الموثوقية، (ب) دالة الإخفاق.

الجدول رقم (٦,٥). حسابات بيانات غير مبوبة.

i	t_i	$S(t_i)$	$R(t_i)$
0	0.00	1.0	0.00000
1	0.62	0.9	0.10536
2	0.87	0.8	0.22314
3	1.13	0.7	0.35667
4	1.25	0.6	0.51083
5	1.50	0.5	0.69315
6	1.62	0.4	0.91629
7	1.76	0.3	1.20397
8	1.88	0.2	1.60944
9	2.03	0.1	2.30259

تحدب دالة الإخفاق $R(t)$ يقدم توضيح على نزايد معدل الإخفاق ومن ثم فإن الجهاز يكون في مرحلة الإنهاك أو تقدم العمر.

يمكن وبشكل مباشر الحصول على تقديرات متوسط زمن الحياة والتباين في حالة البيانات المبوبة. نتبنى المقدر غير المتحيز لمتوسط زمن الحياة الذي ناقشناه في الفصل الخامس. مقدر متوسط زمن الحياة يعطى بالعلاقة التالية :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$$

ولأجل التباين، المعادلة (٦,٤) تصبح :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \hat{\mu}\right)^2$$

بالمثل فإن المعادلتين (٦,٥) و(٦,٦) يمكن أن يخدموا كأساس لحساب الالتواء والتفلطح لتوزيع زمن الحياة.

(٦,٣) البيانات المبوبة
Grouped data

بفرض أن البيانات المتوفرة لدينا ليست بسيطة، بمعنى أن لدينا عدد الإخفاقات التي تحدث في فترات زمنية غير متقاطعة، وهذا النوع من البيانات يتوفر بشكل كبير في

الموثوقية وتحليل البقاء survival analysis. ونرغب في تقدير دالة الموثوقية ودالة كثافة الاحتمال ودالة الإخفاق ودالة الإخفاق المتكاملة (التراكمية).

دالة الموثوقية:

سنبدأ في هذا البند بتقدير دالة الموثوقية. ولتحقيق هذا الهدف دعنا نفترض أن لدينا :

n : عدد الوحدات التي وضعت على اختبار الحياة، أي عند اللحظة $t_0 = 0$.

m : عدد الفترات.

t_i : نهاية الفترة رقم i ، $i = 1,2,\ldots,m$.

n_i : عدد الوحدات التي لم تخفق حتى اللحظة t_i ، $i = 1,2,\ldots,m$.

وحيث أن دالة الموثوقية $S(t)$ تعرف على أنها احتمال أن الوحدة سوف تعمل بنجاح حتى اللحظة دالة الموثوقية $S(t)$ ، إذن يمكن تقدير دالة الموثوقية $S(t_i)$ عند اللحظة t_i بالعلاقة التالية:

$$S(t_i) = \frac{n_i}{n}, i = 1,2,\ldots,m$$

وحيث أن عدد الإخفاقات في حالة البيانات المبوبة تكون أكبر بشكل معنوي عنها في حالة البيانات البسيطة، فإنه استنتاج تقديرات بأكثر دقة لن يكون مجديا في حالة البيانات المبوبة.

دالة الإخفاق:

بمعرفة قيم مقدرات دالة الموثوقية، يمكن مباشرة حساب مقدرات دالة الإخفاق التراكمي وذلك باستخدام العلاقة بين دالة الإخفاق التراكمي ودالة البقاء $R(t) = -ln\,S(t)$.

وهذا يعني أنه يمكن تقدير دالة الإخفاق التراكمي تجريبياً بالعلاقة التالية:

$$\hat{R}(t_i) = ln(n) - ln(n_i),\ \ i = 1,2,\ldots,m$$

سنوضح كيفية استخدام هذه العلاقة في المثال (٦,٥).

دالة كثافة الاحتمال:

يمكن وببساطة تقدير دالة كثافة الاحتمال باستخدام المدرج التكراري، حيث انه يمكن تقدير دالة كثافة الاحتمال لأجل $i = 1,2,...,m$ ، $t_{i-1} < t < t_i$ ، بالعلاقة التالية:

$$\hat{f}(t_i) = \frac{n_{i-1} - n_i}{n\,\Delta_i}, \; i = 1,2,...,m$$

حيث أن Δ_i يرمز إلى طول الفترة i ، $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$.

متوسط زمن الحياة:

بمجرد الحصول على مقدر دالة كثافة الاحتمال، يمكن أن نستنتج مقدر متوسط زمن الحياة $\mu = \int_0^\infty t\, f(t)dt$ وذلك باستخدام العلاقة التالية:

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{m} \hat{t}_i\, \hat{f}_i\, \Delta_i$$

حيث أن $\hat{f}_i = \hat{f}(t_i)$ ، $\hat{t}_i = \frac{1}{2}(t_{i-1} + t_i)$.

التباين:

بالمثل يمكن تقدير التباين $\sigma^2 = \int_0^\infty (t-\mu)^2\, f(t)dt$ ، بالعلاقة التالية:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{m} \hat{t}_i^{\,2}\, \hat{f}_i\, \Delta_i - \hat{\mu}^2$$

سنوضح في المثال التالي كيفية الاستفادة من الصيغ السابقة.

مثال (٦,٥)

استخدم البيانات الموضحة في الجدول رقم (٦,٦) لتقدير كل من دالة الموثوقية، دالة الإخفاق التراكمي ثم حدد نوع معدل الإخفاق (هل ثابت، تناقصي أم تزايدي)، دالة كثافة الاحتمال، متوسط زمن الحياة والتباين.

الجدول رقم (٦,٦). حسابات مثال (٦,٥).

الفترات $[t_{i-1}, t_i)$	التكرارات (عدد الإخفاقات) n_i
[0,5)	21
[5, 10)	10
[10, 15)	7
[15, 20)	9
[20, 25)	2
[25, 30)	1

للإجابة على التساؤلات المطروحة، نحتاج إلى الحسابات التالية، والموضح في جدول الحسابات (٦,٧).

الجدول رقم (٦,٧). حسابات ضرورية لتقدير دالة الموثوقية ودالة الإخفاق التراكمية.

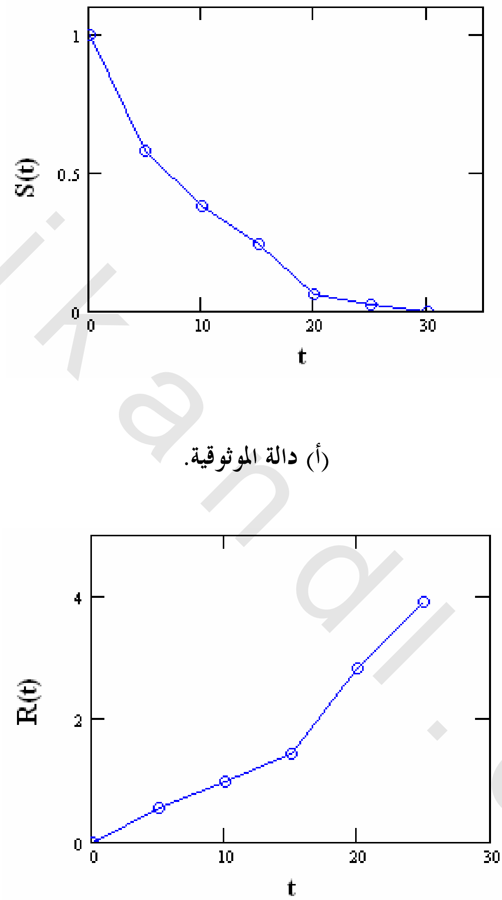
i	t_i	عدد الإخفاقات	مجت	n_i	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{R}(t_i)$
0	0	0	0	50	1	0
1	5	21	21	29	0.58	0.54473
2	10	10	31	19	0.38	0.96758
3	15	7	38	12	0.24	1.42712
4	20	9	47	3	0.06	2.81341
5	25	2	49	1	0.02	3.91202
6	30	1	50	0	0	

ملحوظة: مجت في الجدول رقم (٦,٨) تعني عدد الإخفاقات التراكمي.

يمكن الحصول على الحسابات المعروضة في الجدول رقم (٦,٧) باستخدام MINITAB مع الأوامر التالية:

```
MTB > set c1
DATA> 0:6
DATA> end
MTB > set c2
DATA> 0:30/5
DATA> end
MTB > set c3
DATA> 21 10 7 9 2 1 0
DATA> end
MTB > let k1 = sum(c3)
MTB > pars c3 c4
MTB > let c5 = k1-c4
MTB > let c6 = c5/k1 # survival function
MTB > let c7 = -loge(c6)
```

برسم كل من $\hat{S}(t_i)$ ، $\hat{R}(t_i)$ مقابل t_i نحصل على الرسومات التالية الموضحة في الشكل رقم (٦,٥).



(أ) دالة الموثوقية.

(ب) دالة الإخفاق التراكمي

الشكل رقم (٦,٥). التقدير اللامعلمي لدالة الموثوقية ودالة الإخفاق التراكمي.

يتضح من الشكل رقم (٦,٥ ب) أن معدل الإخفاق التراكمي تزايدي خطي.

والآن نحب تقدير دالة كثافة الاحتمال وتقدير متوسط زمن الحياة. ولهذا الغرض نحتاج إلى بعض الحسابات الإضافية التي نعرضها في الجدول رقم (٦,٨).

الجدول رقم (٦,٨). حسابات ضرورية لتقدير pdf.

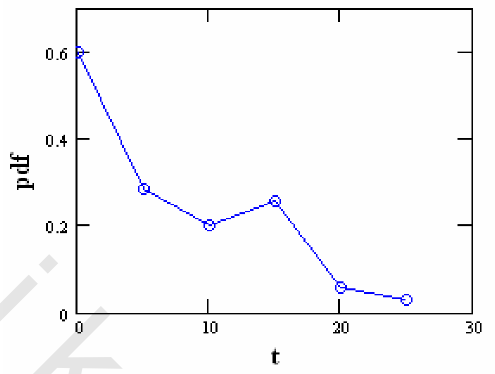
i	t_i	n_i	$n_{i-1}-n_i$	$\hat{f}_i$	$\hat{t}_i$	$\hat{t}_i\,\hat{f}_i\Delta_i$
0	0	50	21	0.600000	2.5	07.5000
1	5	29	10	0.285714	7.5	10.7143
2	10	19	7	0.200000	12.5	12.5000
3	15	12	9	0.257143	17.5	22.5000
4	20	3	2	0.057143	22.5	06.4286
5	25	1	1	0.028571	27.5	03.9286
6	30	0				

يمكن الحصول على الحسابات المعروضة في الجدول رقم (٦,٨) باستخدام MINITAB مع الأوامر التالية، مع العلم بأن C5 هو نفسه المحسوب في مجموعة الأوامر السابقة.

```
MTB > let k012=c2(2)-c2(1)
MTB > let k023=c2(3)-c2(2)
MTB > let k034=c2(4)-c2(3)
MTB > let k045=c2(5)-c2(4)
MTB > let k056=c2(6)-c2(5)
MTB > let k067=c2(7)-c2(6)
MTB > set c8
DATA> k012 k023 k034 k045 k056 k067
DATA>

MTB > let k12=c5(1)-c5(2)
MTB > let k23=c5(2)-c5(3)
MTB > let k34=c5(3)-c5(4)
MTB > let k45=c5(4)-c5(5)
MTB > let k56=c5(5)-c5(6)
MTB > let k67=c5(6)-c5(7)
MTB > set c9
DATA> k12 k23 k34 k45 k56 k67
DATA> end
MTB > let c10 = c9/(n(c2)*c8)
```

برسم $\hat{f}(t_i)$ مقابل t_i ، نحصل على الرسم الموضح في الشكل رقم (٦,٦).



الشكل رقم (٦,٦). التقدير اللامعلمي لدالة كثافة الاحتمال.

تقدير متوسط زمن الحياة:

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{m} \hat{t}_i \, \hat{f}_i \, \Delta_i$$

$$= 63.57$$

يمكن الحصول على هذه الحسابات باستخدام MINITAB مع الأوامر التالية ، مع العلم بأن C2 هو نفسه المحسوب في مجموعة الأوامر السابقة.

```
MTB > let k01 = (c2(1)+c2(2))/2
MTB > let k12 = (c2(2)+c2(3))/2
MTB > let k23 = (c2(3)+c2(4))/2
MTB > let k34 = (c2(4)+c2(5))/2
MTB > let k45 = (c2(5)+c2(6))/2
MTB > let k56 = (c2(6)+c2(7))/2
MTB > set c11
DATA> k01 k12 k23 k34 k45 k56
DATA> end
MTB > let c12 = c11*c10*c8
MTB > sum c12 k10
```

(٦,٤) تمارين
Problems

(٦,١) بفرض أن لديك مجموعة البيانات التالية بالثانية

الجدول رقم (٦,٩). بيانات التمرين (٦,١).

1.48	1.46	1.49	1.42	1.35
1.34	1.42	1.70	1.56	1.58
1.59	1.59	1.61	1.25	1.31
1.66	1.58	1.43	1.80	1.32
1.55	1.60	1.29	1.51	1.48
1.61	1.67	1.39	1.50	1.47
1.52	1.37	1.66	1.44	1.29
1.80	1.55	1.46	1.62	1.48
1.64	1.55	1.65	1.54	1.53
1.46	1.57	1.65	1.59	1.47
1.38	1.66	1.59	1.46	1.61
1.56	1.38	1.57	1.48	1.39
1.62	1.49	1.26	1.53	1.43
1.30	1.58	1.43	1.33	1.39
1.56	1.48	1.53	1.59	1.40
1.27	1.30	1.72	1.48	1.66
1.37	1.68	1.77	1.62	1.33

(أ) احسب المتوسط والتباين.

(ب) كون المدرج التكراري لتقريب $f(x)$.

(٦,٢) بفرض أن لديك مجموعة البيانات التالية والتي تمثل 50 قياس لمتانة الشد النهائي لأحد الأسلاك المستخدمة في أحد الشركات.

الجدول رقم (٦,١٠). بيانات التمرين (٦,٢).

103779	103633	103779	103633	103799
102906	102616	101162	107848	103488
104796	103924	102470	99563	102906
103197	102325	105232	105813	101017
100872	104651	106831	108430	104651
97383	105087	102325	106540	103197
101162	106395	105377	101744	105337
98110	100872	104796	101598	101744
104651	104360	106831	103799	106104
102906	101453	105087	100145	100726

(أ) بوب هذه البيانات ثم كون المدرج التكراري لتقريب دالة كثافة الاحتمال.

(ب) احسب $\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$ باستخدام البيانات المبوبة.

(ج) استخدم $\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$ المحسوبة في الفقرة (ب) لرسم التوزيع الطبيعي خلال المدرج التكراري.

(٦,٣) البيانات المعروضة في الجدول رقم (٦,١١) تتبع توزيع أسي.

الجدول رقم (٦,١١). أزمنة الحياة.

5.2	6.8	11.2	16.8	17.8
19.6	23.4	25.4	32.0	44.8

(أ) احسب متوسط العينة، تباين العينة، التواء العينة وتفلطح العينة.

(ب) استنتج تحليليا تباين والتواء وتفلطح التوزيع الأسي بمتوسط يساوي متوسط العينة المحسوب في الفقرة (أ).

(ج) ما هو الفرق بين قيم العينة والقيم التحليلية لكل من التباين والالتواء والتفلطح المحسوبة في الفقرتين (أ) و (ب).

(٦,٤) يعرض الجدول التالي أزمنة حياة 10 مصابيح طوارئ بالدقيقة.

الجدول رقم (٦,١٢). أزمنة الحياة.

17.0	20.6	21.3	21.4	22.7
25.6	26.5	27.0	27.7	29.7

استخدم الطريقة غير المعلمية لرسم كل من دالة الموثوقية ودالة معدل الإخفاق التراكمي، ثم استنتج ما إذا كان معدل الإخفاق ثابت أو تزايدي أو تناقصي.

(٦,٥) يعرض جدول رقم (٦,١٣) زمن إرهاق 20 رجل فضاء، مقاسه بآلاف دوائر الإجهاد.

الجدول رقم (٦,١٣).

3.1	6.1	7.3	10.4	15.5
20.9	21.7	21.89	25.3	30.5
31.4	32.7	35.4	35.9	38.9
39.6	40.1	65.5	70.9	98.7

(أ) حسب متوسط زمن حياة البيانات.

(ب) استخدم الطريقة غير المعلمية لرسم كل من دالة الموثوقية ودالة معدل الإخفاق التراكمي، ثم استنتج ما إذا كان معدل الإخفاق ثابت أو تزايدي أو تناقصي.

(٦,٦) استخدم الطريقة غير المعلمية لرسم كل من دالة الموثوقية ودالة معدل الإخفاق التراكمي وذلك للبيانات المعطاة في المثال (٦,٣)، ثم استنتج ما إذا كان معدل الإخفاق ثابت أو تزايدي أو تناقصي.

(٦,٧) يعرض الجدول رقم (٦,١٤) عدد مرات إخفاق لعدد 318 مستقبل بث راديو

الجدول رقم (٦,١٤). بيانات مستقبل الراديو.

عدد الإخفاقات	الفترات	عدد الإخفاقات	الفترات
18	300 – 350	41	0 – 50
16	350 – 400	44	50 – 100
15	400 – 450	50	100 – 150
11	450 – 500	48	150 – 200
7	500 – 550	28	200 – 250
11	550 – 600	29	250 – 300

استخدم طريقة التقدير غير المعلمي لرسم كل من دالة الموثوقية ودالة معدل الإخفاق التراكمي، ثم استنتج ما إذا كان معدل الإخفاق ثابت أو تزايدي أو تناقصي.

(٦,٨) يعرض الجدول رقم (٦,١٥) أزمنة حياة عدد من مضخات المياه مقاسه بآلاف الساعات

الجدول رقم (٦,١٥). بيانات مستقبل الراديو.

عدد الإخفاقات	الفترات
5	0 – 6
19	6 – 12
61	12 – 18
27	18 – 24
20	24 – 30
17	30 – 36

استخدم طريقة التقدير غير المعلمي لرسم كل من دالة الموثوقية ودالة معدل الإخفاق التراكمي ، ثم استنتج ما إذا كان معدل الإخفاق ثابت أو تزايدي أو تناقصي.

(٦,٩) يعرض الجدول رقم (٦,١٦) أزمنة حياة 128 موتور.

الجدول رقم (٦,١٦). أزمنة الحياة.

عدد الإخفاقات	الفترات	عدد الإخفاقات	الفترات
31	50 – 60	4	0 – 10
22	60 – 70	8	10 – 20
10	70 – 80	11	20 – 30
2	80 – 90	16	30 –40
1	90 – 100	23	40 –50

(أ) أوجد المدرج التكراري لدالة كثافة الاحتمال.

(ب) ارسم دالة الموثوقية.

(ج) ارسم دالة الإخفاق التراكمي.

(د) قدر المتوسط والتباين.