الباب الأول

موثوقية الأنظمة المترابطة

- الخواص البنائية للأنظمة المترابطة
- موثوقية الأنظمة المترابطة
- عائلات التوزيعات المعلمية المستخدمة في نظرية الموثوقية
- الفصول توزيعات الحياة اعتماداً على مفهوم التعمير

الفصل الأول

الخواص البنائية للأنظمة المترابطة

Structural Properties of Coherent Systems

سنقدم في هذا الفصل بعض العلاقات المحددة بين النظام وعناصره. وسنعتبر في هذا الفصل النظام عند لحظة زمنية محددة وسوف نفترض أن حالة النظام ستعتمد فقط على حالة عناصره الحالية.

(١,١) أنظمة العناصر

Systems of Components

نظام العناصر هو عبارة عن نظام مكون من العديد من العناصر وليكن عددها n. يمكن للعناصر والنظام أن تكون إما عاملة أو عاطلة. دعنا نرمز بـ x_i لحالة العنصر i في النظام، $(i = 1,2,...,n)$. إذن

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{إذا كان العنصر } i \text{ يعمل} \\ 0, & \text{إذا كان العنصر } i \text{ عاطل (لا يعمل)} \end{cases}$$

يسمى المتجه $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ بمتجه حالة النظام بينما تسمى n برتبة النظام. من أجل حالة معينة X ، دعنا نعرف الدالة الثنائية $\varphi(X)$ بالصورة التالية :

$$\varphi(X)=\begin{cases}1, & \text{إذا كان النظام يعمل}\\ 0, & \text{إذا كان النظام عاطل}\end{cases}$$

تسمى الدالة بالدالة البنائية للنظام Structure function. وتعتبر الدالة البنائية أداة مفيدة لوصف طريقة ارتباط العناصر ذات العدد n فيما بينها لتكون النظام، فهي تعرف حالة النظام كدالة في حالات عناصره. من أنظمة البناءات الأكثر شيوعا (استخداما) أنظمة التوالي وأنظمة التوازي.

مثال (١,١)

يعمل نظام التوالي إذا وفقط إذا كانت جميع عناصره عاملة. يوضح الشكل رقم (١,١) التخطيط البنائي لنظام توالي مكون من n عنصر.

الشكل رقم (١,١). نظام توالي مكون من n عنصر.

يفيد التخطيط البنائي للنظام في رؤية كيفية تكوّن العناصر للنظام. بالرغم من وجود تشابه بينهما، إلاّ أن التخطيط البنائي يكافئ التخطيط البنائي الكهربائي. التخطيط البنائي يكون عبارة عن أداة بيانيه توضح كيفية الترابط بين العناصر لتكون النظام. فإذا أمكن لمسار ما أن يمر مجموعة عناصر عاملة من يسار المخطط البياني إلى يمينه، فإن النظام يكون عاملاً. تمثل المربعات في التخطيط البياني عناصر النظام، وتمثل الأعداد داخل هذه المربعات أرقام عناصر النظام.

الدالة البنائية لنظام توالي مكون من n عنصر هي :

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & \text{إذا كان } x_i = 1 \text{ لكل } i = 1,2,\ldots,n \\ 0, & \text{إذا وجد } i \text{ بحيث أن } x_i = 0 \end{cases}$$

يمكن التعبير عن $\varphi(X)$ لنظام توالي مكون من n عنصر بطريقة أخرى كما يلي :

$$\varphi(X) = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

كما توجد طريقة ثالثة للتعبير عن $\varphi(X)$ لنظام توالي مكون من n عنصر وهي :

$$\varphi(X) = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$$
$$= \prod_{i=1}^{n} x_i$$

وبالرغم من أن تكافؤ هذه الطرق الثلاث في التعبير عن $\varphi(X)$ ، إلا أن الطريقة الثالثة تكون مفضلة لأنها أكثر إحكاما وأبسط من الصيغتين الأولى والثانية.

ملاحظة (١,١)

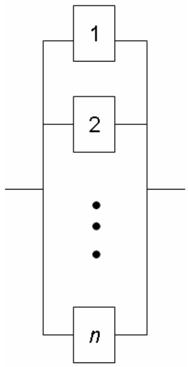
١- النظام الذي يعمل فقط إذا كانت جميع عناصره عاملة يجب أن يمثل بنظام توالي. كمثال، إذا نظرنا إلى آلة حاسبة كنظام مكون من 4 عناصر (لوحة المفاتيح، الشاشة، المعالج، البطارية)، إذن النظام التوالي هو المناسب لوصف هذا النظام حيث أن عطل أي عنصر من عناصره يؤدي إلى عطل النظام.

٢- بفرض أن لدينا نظام توالي مكون من عنصرين (أي أن $n = 2$)، إذن دالته البنائية هي :

$$\varphi(X) = x_1\, x_2$$

مثال (١,٢)

يعمل نظام التوازي إذا وفقط إذا كان على الأقل أحد عناصره عامل. يوضح الشكل رقم (١,٢) التخطيط البنائي لنظام توازي مكون من n عنصر.



الشكل رقم (١,٢). نظام توازي مكون من n عنصر.

الدالة البنائية لنظام توازي مكون من n عنصر هي :

$$\varphi(X)=\begin{cases}1, & \text{إذا وجد } i \text{ بحيث أن } x_i=1\\ 0, & \text{إذا كان } x_i=0 \text{ لكل } i=1,2,\ldots,n\end{cases}$$

يمكن التعبير عن $\varphi(X)$ لنظام توازي مكون من n عنصر بطريقة أخرى كما يلي :

$$\varphi(X)=\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$$

أما الطريقة الثالثة للتعبير عن $\varphi(X)$ لنظام توازي مكون من n عنصر هي :

$$\varphi(X)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$$

كما أوضحنا في حالة نظام التوالي ، يوجد ثلاث طرق متكافئة للتعبير عن $\varphi(X)$ ، إلا أننا سنستخدم رمزاً بسيطاً لكتابة الدالة البنائية لنظام توازي مكون من n عنصر وهي :

$$\varphi(X)=x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_n$$
$$=\coprod_{i=1}^{n}x_i$$

ملاحظة (١,٢)

١- كلى أي إنسان عبارة عن مثال لنظام توازي مكون من عنصرين، حيث أن العديد من الناس يحيون حياة طبيعية بكلى واحدة فقط. وكمثال آخر لنظام توازي مكون من عنصرين هو نظام فرامل في سيارة ما والذي يتكون من مخزنين لسائل الفرامل.

٢- الدالة البنائية لنظام توازي مكون من عنصرين (أي أن $n = 2$) هي:

$$\varphi(X) = \coprod_{i=1}^{2} x_i$$

$$= x_1 \vee x_2$$

$$= 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)$$

$$= x_1 + x_2 - x_1 x_2$$

٣- الدالة البنائية لنظام توازي مكون من ثلاث عناصر (أي أن $n = 3$) هي:

$$\varphi(X) = \coprod_{i=1}^{3} x_i$$

$$= x_1 \vee x_2 \vee x_3$$

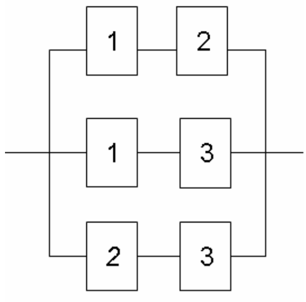
$$= 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$$

$$= x_1 + x_2 + x_3 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3$$

مثال (١,٣)

يعمل نظام k- من- n إذا وفقط إذا كان على الأقل يعمل عدد k من عناصره الذي عددهم n.

يوضح الشكل رقم (١,٣) التخطيط البنائي لنظام 2- من- 3.



الشكل رقم (١,٣). نظام *2*– من– *3*.

الدالة البنائية لنظام k– من– n هي :

$$\varphi(X)=\begin{cases}1, & \text{إذا كان } \sum_{i=1}^{n} x_i \ge k\\ 0, & \text{إذا كان } \sum_{i=1}^{n} x_i < k\end{cases}$$

يمكن التعبير عن $\varphi(X)$ لنظام k– من– n بطريقة ثانية كما يلي :

$$\varphi(X)=\max\{(x_1,\cdots,x_k),(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1}),\cdots,(x_{n-k+1},\cdots,x_n)\}$$

ملاحظة (١,٣)

١– تُعتبر إحدى الطائرات التي يمكن أن تعمل إذا عمل على الأقل محركين من محركاتها الثلاث عبارة عن مثال لنظام *2*– من– *3*. أمثلة أخرى للأنظمة k– من– n : جسر معلق والذي يحتاج للعمل فقط إلى k من دعائمه ذات العدد n، إحدى محركات مركبة المكون من n اسطوانة والذي يكفي لعمله بنجاح إلى عمل عدد k فقط من اسطواناته.

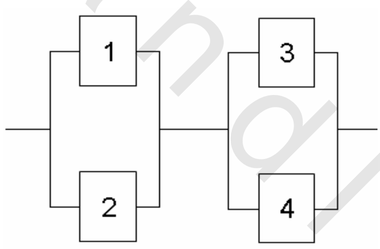
٢– كل من النظام التوالي والنظام التوازي يكون حالة خاصة من النظام k– من– n. فالنظام التوالي المكون من n عنصر هو نظام n– من– n، أما النظام التوازي المكون من n عنصر فهو نظام 1– من– n.

٣- الدالة البنائية لنظام 2- من- 3 (أي أن $n = 3 , k = 2$) هي :

$$\begin{aligned}
\varphi(X) &= \max\{x_1x_2 , x_2x_3 , x_1x_3\} \\
&= x_1\, x_2 \vee x_2\, x_3 \vee x_1x_3 \\
&= 1-(1-x_1x_2)(1-x_2x_3)(1-x_1x_3) \\
&= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 - 2x_1x_2x_3
\end{aligned}$$

مثال (١,٤)

طائرة ركاب تحتوي على مروحتي دفع عل كل جناح من جناحيها، ويكفي عمل أحد المروحتين على كل جناح حتى تتمكن الطائرة من الطيران بنجاح. نريد كتابة الدالة البنائية لهذه الحالة. يوضح الشكل رقم (١,٤) التخطيط البنائي لهذا النظام.



الشكل رقم (١,٤). نظام الطائرة.

الدالة البنائية للنظام هي :

$$\begin{aligned}
\varphi(X) &= (x_1 \vee x_2)\cdot(x_3 \vee x_4) \\
&= [1-(1-x_1)(1-x_2)]\cdot[1-(1-x_3)(1-x_4)] \\
&= (x_1 + x_2 - x_1x_2)(x_3 + x_4 - x_3x_4)
\end{aligned}$$

مثال (١,٥)

يتكون نظام صوتي علي الذبذبة من العناصر التالية :

١- منسق FM.

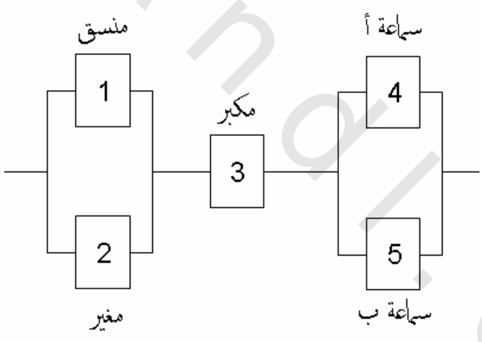
٢- مغير اسطوانة CD.

٣- مكبر صوتي.

٤- سماعة أ.

٥- سماعة ب.

يعمل هذا النظام إذا أمكنا الحصول على صوت المذياع (أحادي أو ثنائي الذبذبة) من خلال FM أو الحصول على صوت من الاسطوانة CD. يوضح الشكل رقم (١,٥) التخطيط البنائي لهذا النظام.



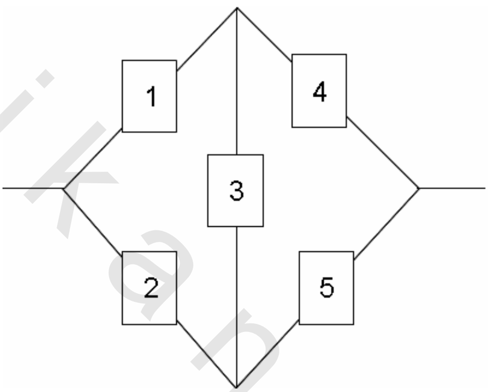
الشكل رقم (١,٥). نظام صوتي.

الدالة البنائية للنظام هي :

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= \left(x_1 \vee x_2\right)\cdot x_3 \cdot \left(x_4 \vee x_5\right)\\ &= \left[1-(1-x_1)(1-x_2)\right]x_3\left[1-(1-x_4)(1-x_5)\right]\\ &= (x_1+x_2-x_1x_2)\,x_3\,(x_4+x_5-x_4x_5)\end{aligned}$$

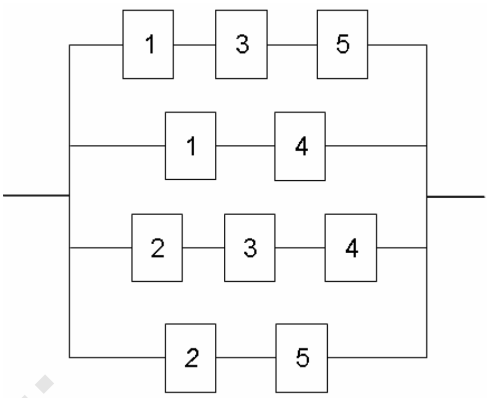
مثال (١,٦)

سنقدم في هذا المثال نظاماً أكثر تعقيداً من الأنظمة المقدمة في الأمثلة السابقة ألا وهو نظام القنطرة. يتكون نظام القنطرة من خمسة عناصر كما هو موضح بالتخطيط البنائي المعطى في الشكل رقم (١,٦).



الشكل رقم (١,٦). نظام القنطرة.

يعمل هذا النظام إذا وفقط إذا كان جميع عناصر أي مجموعة من مجاميع العناصر التالية عاملة: $\{1,3,5\}$ ، $\{1,4\}$ ، $\{2,3,4\}$ ، $\{2,5\}$. سيقال لهذه المجاميع كمجاميع المسارات الصغرى كما سنوضح في البند التالي. وحيث أنه يكفي لعمل النظام عمل جميع عناصر مجموعة واحدة على الأقل من هذه المجاميع الأربعة الموضحة أعلاه، إذن يمكن إعادة التخطيط البنائي لهذا النظام كما هو موضح بالشكل رقم (١,٧) كمخطط مكون من نظام توازي عناصره عبارة عن مجاميع من العناصر المتصلة على التوالي.



الشكل رقم (١,٧). نظام القنطرة المكافئ.

يمكن استنتاج الدالة البنائية لهذا النظام كالآتي :

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= x_1x_3x_5 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_2x_5\\ &= 1-(1-x_1x_3x_5)(1-x_1x_4)(1-x_2x_3x_4)(1-x_2x_5)\end{aligned}$$

في الحقيقة يساهم كل عنصر من عناصر النظام بشكل ما في بناء النظام، وهذا ما يقودنا لتقديم الاصطلاحات التالية :

$(1_i, \boldsymbol{x}) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n)$, وهذا يعني أن $x_i = 1$

$(0_i, \boldsymbol{x}) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)$, وهذا يعني أن $x_i = 0$

$(\cdot_i, \boldsymbol{x}) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, ..., x_n)$, وهذا يعني أن $x_i = \cdot$

تعريف (١,١)

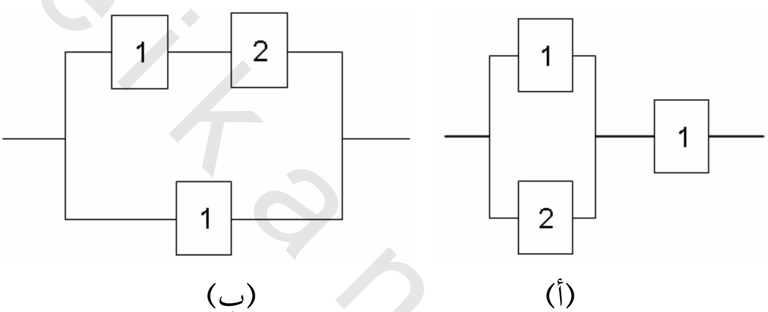
يكون العنصر رقم i في نظام دالته البنائية ϕ عديم الجدوى (irrelevant) إذا كانت حالة هذا العنصر لا تؤثر على الدالة ϕ ، أي أن الدالة ϕ ثابتة في x_i ، أي أن :

$$\phi(1_i, \boldsymbol{x}) = \phi(0_i, \boldsymbol{x}) \quad \forall \quad (\cdot_i, \boldsymbol{x})$$

فيما عدا ذلك فإن i العنصر يكون مهما (ذي جدوى) بالنسبة للنظام ، وفي هذه الحالة يكون $(\cdot_i, x)\ \ \forall\ \ \phi(1_i, x) > \phi(0_i, x)$.

مثال (١,٧)

العنصر رقم 2 عديم الجدوى في النظامين البنائين الموضحين بالشكل رقم (١,٨).



الشكل رقم (١,٨). عنصر عديم الجدوى.

بالنسبة للنظام (أ) : يمكن الحصول على الدالة البنائية في الصيغة التالية :

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, x_2) &= x_1(x_1 \vee x_2)\\ &= x_1(x_1 + x_2 - x_1x_2)\\ &= x_1^2 + x_1x_2 - x_1^2x_2\\ &= x_1 + x_1x_2 - x_1x_2 = x_1\end{aligned}$$

ومن ثم فإن $\varphi(x_1,1) = \varphi(x_1,0)$ وبالتالي العنصر 2 عديم الجدوى في النظام (أ).

وبالنسبة للنظام (ب) : يمكن الحصول على الدالة البنائية في الصيغة التالية :

$$\begin{aligned}\varphi(x_1,x_2) &= x_1 \vee (x_1x_2)\\ &= 1-(1-x_1)(1-x_1x_2)\\ &= x_1 + x_1x_2 - x_1x_1x_2\\ &= x_1 + x_1x_2 - x_1x_2 = x_1\end{aligned}$$

ومن ثم فإن $\varphi(x_1,1)=\varphi(x_1,0)$ وبالتالي العنصر 2 عديم الجدوى في النظام (ب).

سنوضح فيما يلي بأن التحليل المفصلي للدالة البنائية يساعد كثيرا في الإثباتات الاستقرائية.

تمهيدية (١,١)

أي دالة بنائية من الدرجة n تحقق المتطابقة التالية :

$$\varphi(\boldsymbol{X}) = x_i\,\varphi(1_i,\boldsymbol{X}) + (1-x_i)\,\varphi(0_i,\boldsymbol{X}), \quad \forall\,\boldsymbol{X},\ (i=1,2,\ldots n)$$

تساعد التمهيدية (١,١) في التعبير عن الدالة البنائية من الدرجة n بدلالة الدوال البنائية من الدرجة $n-1$. بإعادة تطبيق نتيجة التمهيدية (١,١) يمكن الحصول على التمثيل التالي :

$$\varphi(\boldsymbol{X}) = \sum_{\boldsymbol{Y}} \prod_{j=1}^{n} x_j^{y_j}\,(1-x_j)^{1-y_j}\ \ \varphi(\boldsymbol{Y}) \qquad (١,١)$$

حيث المجموع يغطي جميع المتجهات الثنائية $\boldsymbol{Y}$ من الدرجة n وأن $1 = 0^0$.

مثال (١,٨)

بفرض أن لدينا نظام توالٍ من عنصرين. إذن دالته البنائية هي $\phi(x_1,x_2) = x_1\,x_2$. لذا فإن :

$$\boldsymbol{Y} \in \{\boldsymbol{Y}_1=(1,1), \boldsymbol{Y}_2=(1,0), \boldsymbol{Y}_3=(0,1), \boldsymbol{Y}_4=(0,0)\}$$

وأن :

$$\phi(\boldsymbol{Y}_1)=1,\ \phi(\boldsymbol{Y}_2)=\phi(\boldsymbol{Y}_3)=\phi(\boldsymbol{Y}_4)=0$$

وبتطبيق الصيغة (١,١)، نحصل على :

$$\varphi(\boldsymbol{X}) = x_1^1(1-x_1)^0\, x_2^1(1-x_2)^0\ \varphi(\boldsymbol{Y}_1) + x_1^1(1-x_1)^0\, x_2^0(1-x_2)^1\ \varphi(\boldsymbol{Y}_2)$$
$$+\, x_1^0(1-x_1)^1\, x_2^1(1-x_2)^0\ \varphi(\boldsymbol{Y}_3) + x_1^0(1-x_1)^1\, x_2^0(1-x_2)^1\ \varphi(\boldsymbol{Y}_4).$$

يمكن إعادة كتابة هذه الصيغة بطريقة أخرى كالآتي :

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{X}) &= \phi(x_1, x_2)\\ &= x_1\,\phi(1_1, x_2) + (1-x_1)\,\phi(0_1, x_2)\\ &= x_1\left[x_2\,\phi(1_1,1_2) + (1-x_2)\,\phi(0_1,1_2)\right]\\ &\quad + (1-x_1)\left[x_2\,\phi(0_1,1_2) + (1-x_2)\,\phi(0_1,0_2)\right]\\ &= x_1x_2\,\phi(1,1) + x_1(1-x_2)\,\phi(0,1)\\ &\quad + (1-x_1)\,x_2\,\phi(0,1) + (1-x_1)(1-x_2)\,\phi(0,0).\end{aligned}$$

تمرين (١,١)

أعد حل المثال السابق ولكن بالبدء بـ x_2 بدلاً من x_1.

تعريف (١,٢)

بفرض نظام دالته البنائية ϕ فإن الدالة البنائية المرافقة (dual) ϕ^D تعرف بالصيغة :

$$\phi^D(\boldsymbol{X}) = 1 - \phi(1-\boldsymbol{X})$$

حيث $1-\boldsymbol{X} = (1-x_1, 1-x_2, \cdots, 1-x_n)$

مثال (١,٩)

في هذا المثال سنوجد الدوال المرافقة للأنظمة توالي، توازي، k–من–n ومرافق نظام مرافق ما :

١– النظام المرافق لنظام توالي مكون من n عنصر هو نظام توازي مكون من n عنصر.

٢- النظام المرافق لنظام توازي مكون من n عنصر هو نظام توالي مكون من n عنصر.

٣- النظام المرافق لنظام k–من–n هو نظام n-k+1–من–n.

٤- النظام المرافق لنظام مرافق هو النظام الأصلي ، أي أن : $(\phi^D)^D = \phi$.

سنبرهن الجزأين الأول والثاني عندما n=2 وسنترك للقارئ برهانهما لأي n كما سنترك الجزأين الثالث والرابع للقارئ أيضاً.

١- الدالة البنائية لنظام توالي من عنصرين هي $\phi(x_1, x_2) = x_1\, x_2$. إذن الدالة البنائية للنظام المرافق هي

$$\begin{aligned}\phi^D(x_1, x_2) &= 1-\phi(1-x_1, 1-x_2)\\ &= 1-(1-x_1)(1-x_2)\\ &= x_1 \vee x_2\end{aligned}$$

وهذه هي الدالة البنائية لنظام توازي مكون من عنصرين.

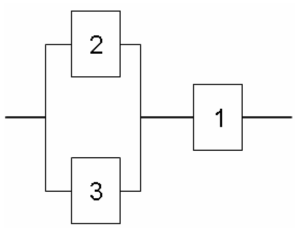
٢- الدالة البنائية لنظام توازي من عنصرين هي $\phi(x_1, x_2) = 1-(1-x_1)(1-x_2)$. إذن الدالة البنائية للنظام المرافق هي

$$\begin{aligned}\phi^D(x_1, x_2) &= 1-\phi(1-x_1, 1-x_2)\\ &= 1-[1-(1-x_1)(1-x_2)]\\ &= x_1\, x_2\end{aligned}$$

وهذه هي الدالة البنائية لنظام توالي مكون من عنصرين.

مثال (١,١٠)

أوجد الدالة البنائية للنظام المرافق للنظام الموضح في الشكل رقم (١,٩) والمكون من ثلاث عناصر.



الشكل رقم (١,٩). نظام مكون من ثلاث عناصر.

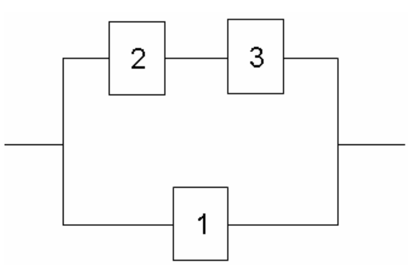
أولاً: نوجد الدالة البنائية للنظام الأصلي الموضح بالشكل رقم (١,٩) كالآتي:

$$\phi(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2\vee x_3$$
$$=x_1\cdot(x_2+x_3-x_2x_3)$$

ثانياً: نوجد الدالة المرافقة كالآتي:

$$\phi^D(\boldsymbol{X})=1-\phi(1-\boldsymbol{X})$$
$$=1-(1-x_1)\cdot[(1-x_2)+(1-x_3)-(1-x_2)(1-x_3)]$$
$$=x_1+x_2x_3-x_1x_2x_3$$
$$=x_1\vee x_2x_3$$

ومن ثم فإن النظام المرافق للنظام الموضح في الشكل رقم (١,٩) هو النظام الموضح في الشكل رقم (١,١٠).



الشكل رقم (١,١٠). النظام المرافق للنظام في الشكل رقم (١,٩).

(١,٢) البناءات المترابطة
Coherent Structures

لتجنب الحالات التافهة والتصاميم الضعيفة وغير الواقعية سنحصر دراستنا في هذا الكتاب على الأنظمة التي يكون دوالها البنائية مطردة الزيادة في كل عنصر من عناصرها وسنستبعد أي نظام لا يعتمد في عمله أو عطله على حالات عناصره. وهذا يقودنا للحاجة إلى التعريف التالي.

تعريف (١,٣)

يكون النظام مترابطاً (أو متماسكاً) إذا تحقق ما يلي :

١- دالته البنائية ϕ متزايدة.

٢- كل عنصر فيه مهم (ذو جدوى).

تفسير: في التعريف السابق

١- الشرط الأول يعني أن تحسن حالة أحد عناصر النظام (أي استبدال عنصر عاطل بآخر عامل) لا يُسبب تدهور النظام (أي لا يُغير حالة النظام من الحالة العاملة إلى حالة عاطلة).

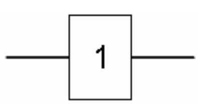
٢- الشرط الثاني يعني استبعاد العناصر غير المؤثرة على النظام.

ملحوظة (١,٤): لاحظ أن الدالة البنائية ϕ المزايدة في كل عنصر يكون لها على الأقل عنصر مهم إذا وفقط إذا كان $\phi(0)=0$ ، $\phi(1)=1$. سنستخدم هذا المعنى في برهان النظرية (١,١).

مثال (١,١١)

فيما يلي جميع عرضاً لجميع الأنظمة المترابطة من الدرجة 1 ، 2، 3.

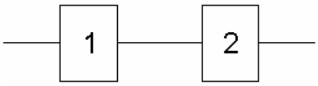
الدرجة الأولى: $n=1$



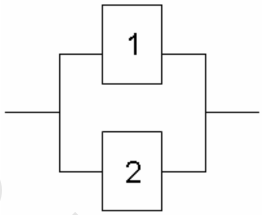
$$\phi(\boldsymbol{x})=x_1$$

الشكل رقم (١,١١). نظام مترابط من الدرجة الأولى.

الدرجة الثانية : $n = 2$



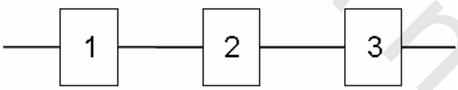
$\phi(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2$



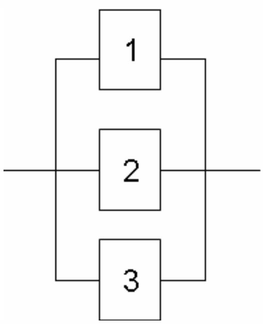
$\phi(\boldsymbol{x}) = x_1 \vee x_2$

الشكل رقم (١,١٢). أنظمة مترابطة من الدرجة الثانية.

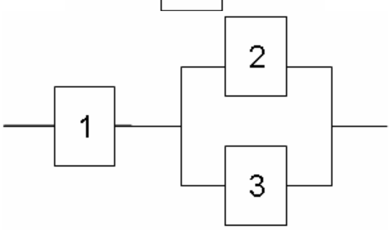
الدرجة الثالثة : $n = 3$



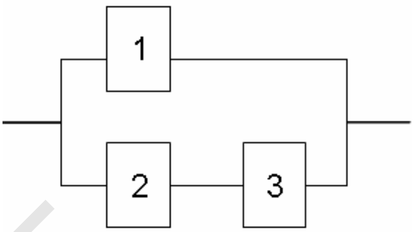
$\phi(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 x_3$



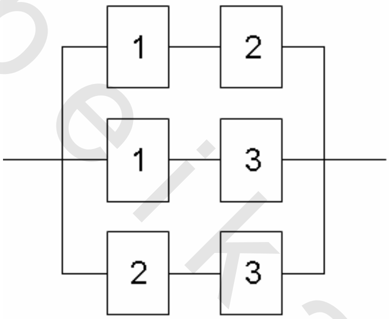
$\phi(\boldsymbol{x}) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$



$\phi(\boldsymbol{x}) = x_1 \left(x_2 \vee x_3 \right)$



$$\phi(\boldsymbol{x}) = x_1 \vee (x_2 x_3)$$



$$\phi(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$$

الشكل رقم (١,١٣). أنظمة مترابطة من الدرجة الثالثة.

يقودنا تعريف الأنظمة المترابطة إلى النتيجة الأساسية التالية.

نظرية (١,١)

لتكن ϕ دالة بنائية لنظام مترابط من الدرجة n، إذن:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \le \phi(\boldsymbol{x}) \le \coprod_{i=1}^{n} x_i$$

البرهان

سنبرهن كلا المتباينتين.

• نفرض أن $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$ ، إذن $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ ، ومن ثم فإنه باستخدام الملاحظة (١,٤) ينتج أن $\phi(\boldsymbol{x}) = 1$ ، وبالتالي فإن الطرف الأيسر يكون محققاً.

• نفـرض أن $\prod_{i=1}^{n} x_i = 0$ ، إذن $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ ، ومـن ثـم فإنـه باستخدام الملاحظة (١,٤) ينتج أن $\phi(\boldsymbol{x}) = 0$ ، وبالتالي فإن الطرف الأيمن يكون محققاً.

تفسير

تخبرنا النظرية (١,١) بأن أداء النظام المترابط يكون محدوداً :

- من أسفل بأداء نظام توالي.
- من أعلى بأداء نظام توازي.

اصطلاح

بفـرض أن لـدينا المـتجهين $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ، $\boldsymbol{Y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ ، فإننا سنستخدم الاصطلاحين التاليين :

$$\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y} = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \cdots, x_n \vee y_n)$$

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y} = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \cdots, x_n \cdot y_n)$$

نظرية (١,٢)

لتكن ϕ دالة بنائية لنظام مترابط ، إذن :

أ) $\phi(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}) \geq \phi(\boldsymbol{X}) \vee \phi(\boldsymbol{Y})$

ب) $\phi(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}) \leq \phi(\boldsymbol{X}) \cdot \phi(\boldsymbol{Y})$

البرهان

سنبرهن كل من المتباينتين.

(أ) تذكر أن :

$$x_i \vee y_i = \max(x_i, y_i), \ \ i = 1,2,\cdots,n$$

والآن :

$$\max(x_i, y_i) \geq x_i \ \ , \ \ i = 1,2,\cdots,n$$

وهذا يعني أن :

$$\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y} \geq \boldsymbol{X}$$

وحيث أن الدالة ϕ تزايدية ، إذن :

$$\phi(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}) \geq \phi(\boldsymbol{X})$$

بالمثل :

$$\phi(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}) \geq \phi(\boldsymbol{Y})$$

وبالتالي فإن :

$$\phi(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}) \geq \max(\phi(\boldsymbol{X}), \phi(\boldsymbol{Y})) = \phi(\boldsymbol{X}) \vee \phi(\boldsymbol{Y})$$

(ب) يمكن برهان المتباينة الثانية بنفس الطريقة. تذكر أن :

$$x_i \cdot y_i = \min(x_i, y_i), \;\; i = 1,2,\cdots,n$$

وأن :

$$\min(x_i, y_i) \leq x_i \;\; , \;\; i = 1,2,\cdots,n$$

إذن :

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y} \leq \boldsymbol{X}$$

وحيث أن الدالة ϕ تزايدية ، إذن :

$$\phi(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}) \leq \phi(\boldsymbol{X})$$

بالمثل :

$$\phi(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}) \leq \phi(\boldsymbol{Y})$$

وبالتالي فإن :

$$\phi(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}) \leq \min(\phi(\boldsymbol{X}), \phi(\boldsymbol{Y})) = \phi(\boldsymbol{X}) \cdot \phi(\boldsymbol{Y})$$

ملاحظة (١,٥)

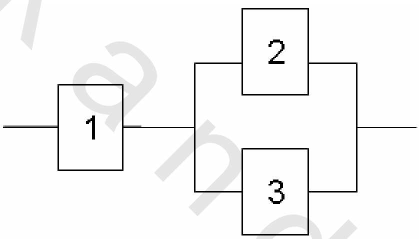
- تتحقق المساواة في المتباينة (أ) لجميع $\boldsymbol{X}$ ، $\boldsymbol{Y}$ إذا وفقط إذا كان البناء توازي.
- تتحقق المساواة في المتباينة (ب) لجميع $\boldsymbol{X}$ ، $\boldsymbol{Y}$ إذا وفقط إذا كان البناء توالي.

تفسير

تنص الفقرة (أ) في النظرية (١,٢) على قاعدة معروفة بين مهندسي التصميم وهي أن التكرار على مستوى عناصر النظام يكون أكثر تأثيراً من التكرار على مستوى النظام. سنوضح هذه القاعدة في المثال التالي.

مثال (١,١٢)

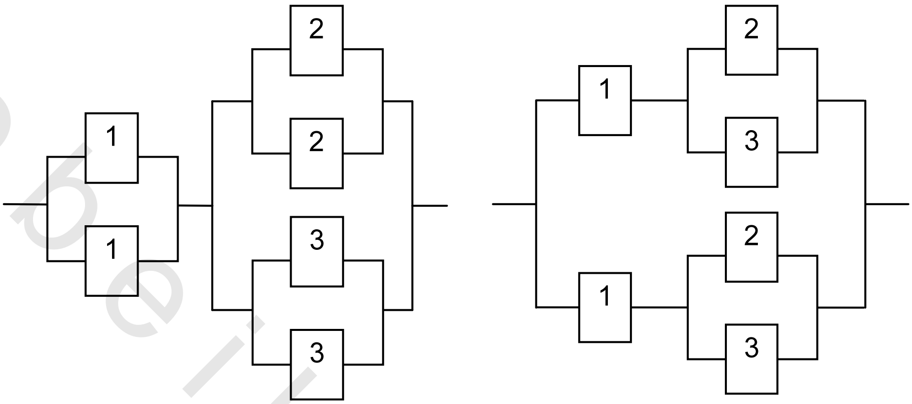
بفرض أن لدينا نظام مترابط مكون من ثلاث عناصر متصلة كما هو موضح بالشكل رقم (١,١٤):



الشكل رقم (١,١٤). نظام مترابط مكون من ثلاث عناصر.

وبفرض أن لديك ثلاث عناصر مماثلة للعناصر الثلاث الأصلية للنظام، أي من الترتيبين الموضحين أدناه في الشكل رقم (١,١٥) يكون أفضل؟

الشكل الذي في اليسار يمثل تكرار على مستوى العناصر بينما الشكل في اليمين يمثل تكرار على مستوى النظام، إذن وبناءاً على النظرية (١,٢) فإن الترتيب الموضح في اليسار يكون هو المفضل.



الشكل رقم (١,١٥). نظام مترابط مكون من ثلاثة عناصر.

(١,٣) تمثيل الأنظمة المترابطة بدلالة الممرات والقطوع
Representation of Coherent Systems in Terms of Paths and Cuts

من المفيد تمثيل الأنظمة المترابطة بطرق بديلة ومتعددة. الدوال البائية والتخطيط البنائي (block diagram) يعرفان ترتيب العناصر في النظام. توجد طريقتان أخريان للتعبير عن تريب العناصر في النظام وهما طريقتي الممرات الصغرى والقطوع الصغرى. يمكن استخدام طريقتي الممرات الصغرى والقطوع الصغرى في إعادة تمثيل أي نظام مترابط على شكل أنظمة جزئية متصلة معاً على التوالي أو متصلة على التوازي. سنحتاج أولاً إلى تعريف متباينات المتجهات.

تعريف (١,٤)

يمكن القول بأن $X < Y$ إذا وفقط إذا كان $x_i \le y_i$ لأجل $i = 1,2,\cdots,n$ و $x_i < y_i$ لبعض قيم i.

تعريف (١,٥)

بفرض نظام مترابط دالته البنائية $\phi(X)$ ، إذن :

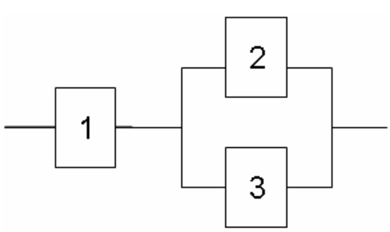
- المتجه x يكون متجه ممر للنظام المترابط إذا كان $\phi(X)=1$.
- مجموعة العناصر $C_1(X)=\{i\,|\,x_i=1\}$ تمثل مجموعة الممر.
- متجه الممر X يكون متجه ممر أصغر للنظام المترابط إذا كان $\phi(Y)=0$ لأي متجه Y يحقق $X>Y$.
- لكل متجه ممر أصغر يوجد مجموعة ممر أصغر تتكون من أرقام العناصر العاملة في متجه الممر. سنرمز إلى مجاميع الممرات ذات العدد s للنظام بـ $P_1,P_2,\cdots,P_s$.

تفسير

- من بين جميع متجهات الحالة الممكنة X وعددهم 2^n توجد متجهات الممر والتي تناظر عمل النظام بمعنى $\phi(X)=1$.
- متجه الممر الأصغر هو عبارة عن متجه ممر والذي يحقق أن فشل أي عنصر من عناصره يؤدي إلى فشل النظام.

مثال (١,١٣)

بفرض النظام المترابط المكون من ثلاث عناصر والموضح بالشكل رقم (١,١٦):

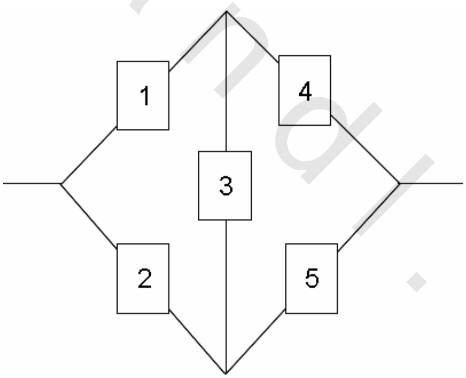


الشكل رقم (١,١٦). نظام مترابط مكون من ثلاث عناصر.

- يوجد $2^3 = 8$ متجه حالة وهم: $\{(1,1,1),\cdots,(0,0,0)\}$.
- يمكن التحقق من أن المتجهات التالية $(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1)$ فقط هي التي تضمن عمل النظام، ومن ثم فإنهم متجهات ممر.
- المتجهين $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ هما فقط متجهين ممر أصغر أما متجه الممر $\boldsymbol{x} = (1,1,1)$ فهو ليس متجه ممر أصغر وذلك لوجود متجهين $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ يحققان أن $\boldsymbol{Y} < \boldsymbol{X}$ وأن $\phi(\boldsymbol{Y}) = 1$.
- يوجد مجموعتين ممر أصغر $(s = 2)$ وهي $P_1 = \{1,2\}, P_2 = \{1,3\}$.

مثال (١,١٤)

بالعودة إلى نظام القنطرة المقدم في المثال (١,٦):



الشكل رقم (١,١٧). نظام القنطرة.

يمكن التحقق من أن مجاميع الممرات الصغرى هي:

$P_4 = \{2,3,4\}$ ، $P_3 = \{1,3,5\}$ ، $P_2 = \{2,5\}$ ، $P_1 = \{1,4\}$

تعريف (١,٦)

بفرض نظام مترابط دالته البنائية $\phi(X)$ ، إذن :

- المتجه X يكون متجه قطع للنظام المترابط إذا كان $\phi(X)=0$.
- مجموعة العناصر $\{i\,|\,x_i=0\}$ تمثل مجموعة القطع.
- متجه القطع X يكون متجه قطع أصغر للنظام المترابط إذا كان $\phi(Y)=1$ لأي متجه Y يحقق أن $X<Y$.
- لكل متجه قطع أصغر يوجد مجموعة قطع أصغر والتي تتكون من أرقام العناصر العاطلة في متجه القطع. سنرمز إلى مجاميع القطوع ذات العدد k للنظام بـ $K_1,K_2,\cdots,K_k$.

تفسير

- على عكس متجهات الممرات التي تناظر عمل النظام، فإن متجهات القطوع تناظر عطل النظام.
- متجه القطع الأصغر هو عبارة عن متجه قطع يحقق أن إصلاح أي عنصر من عناصره يؤدي إلى عمل النظام.

مثال (١,١٥)

بالعودة للنظام المترابط المكون من ثلاث عناصر في المثال (١,١٣) :

- يوجد $2^3=8$ متجه حالة وهم : $\{(1,1,1),(0,1,1),\cdots,(0,0,0)\}$.
- يمكن التحقق من أن أي من المتجهات الخمس التالية $(0,0,0)$ ، $(0,0,1)$ ، $(0,1,0)$ ، $(1,0,0)$ ، $(0,1,1)$ يضمن عطل النظام، ومن ثم فإنهم متجهات قطع.
- المتجهين $(0,1,1),(1,0,0)$ هما متجهين قطع أصغر وذلك لأنه لأي متجه y أكبر من أي من هذين المتجهين يضمن عمل النظام.
- يوجد مجموعتين قطع أصغر $(k=2)$ وهي $K_1=\{1\},K_2=\{2,3\}$.

مثال (١,١٦)

بالعودة إلى نظام القنطرة المقدم في المثال (١,٦)، يمكن التحقق من أن مجاميع القطوع الصغرى هي :

$$K_4 = \{2,3,4\} \text{ ، } K_3 = \{1,3,5\} \text{ ، } K_2 = \{4,5\} \text{ ، } K_1 = \{1,2\}$$

قدمنا حتى الآن الأربعة طرق المتكافئة التالية لوصف ترتيب العناصر الثنائية لتكوين نظام مترابط :

- التخطيط البنائي
- الدالة البنائية
- مجاميع الممرات الصغرى $P_1, P_2, \cdots, P_s$
- مجاميع القطوع الصغرى $K_1, K_2, \cdots, K_k$

أحد أهداف تعريف الممرات الصغرى والقطوع الصغرى هو كتابة أي نظام في ترتيب توازي لأنظمة جزئية متصلة على التوالي أو في ترتيب توالي لأنظمة جزئية متصلة على التوازي. فيما يلي سنوضح كيفية تحقيق ذلك.

ليكن $P_1, P_2, \cdots, P_s$ مجموعة مكونة من s من مجاميع الممرات الصغرى لنظام مترابط ، ولأجل $j = 1,2,\cdots,s$ نعرف :

$$P_j(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & \text{إذا كان جميع عناصر } P_j \text{ عاملة} \\ 0, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وبطريقة مكافئة يمكن التعبير عن $P_j(\boldsymbol{X})$ كالآتي :

$$P_j(\boldsymbol{X}) = \prod_{i \in P_j} x_i$$

وحيث أن النظام سيعمل إذا عملت عناصر أحد مجاميع الممرات الصغرى على الأقل ، إذن يمكن كتابة الدالة البنائية للنظام في الصورة التالية :

$$\varphi(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & \text{إذا كان } P_j(X)=1 \text{ لبعض قيم } j \\ 0, & \text{إذا كان } P_j(X)=0 \text{ لجميع قيم } j \end{cases}$$

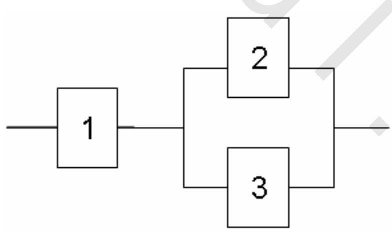
$$= \coprod_{j=1}^{s} P_j(\boldsymbol{X})$$

$$= \coprod_{j=1}^{s} \prod_{i \in P_j} x_i$$

وهذه المعادلة تعني أنه إذا علمت جميع الممرات الصغرى ذات العدد s لنظام مترابط فإنه يمكن إعادة تمثيل هذا النظام في ترتيب توازي مكون من s صف من العناصر المتصلة معا على التوالي.

مثال (١,١٧)

بالعودة إلى النظام المكون من ثلاثة عناصر والمقدم في المثالين (١,١٣)، (١,١٥):

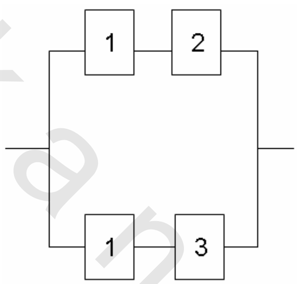


الشكل رقم (١,١٨). متجهات المر.

يمكن التحقق من أن $s = 2$ وأن مجاميع الممرات الصغرى هي $P_1 = \{1,2\}$ ، $P_2 = \{1,3\}$ وبالتالي فإن:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \coprod_{j=1}^{2} \prod_{i \in P_j} x_i$$
$$= P_1(\boldsymbol{x}) \vee P_2(\boldsymbol{x})$$
$$= x_1 x_2 \vee x_1 x_3$$
$$= 1-(1-x_1 x_2)(1-x_1 x_3).$$

يمكن إعادة ترتيب النظام في صيغة مكافئة باستخدام الممرات الصغرى كما في الشكل رقم (١,١٩).



الشكل رقم (١,١٩). ترتيب توازي من أنظمة توالي.

يمكن بنفس الطريقة استخدام القطوع الصغرى. ليكن $K_1, K_2, \cdots, K_k$ مجموعة مكونة من k من مجاميع القطوع الصغرى لنظام مترابط ، ولأجل $j = 1,2,\cdots,k$ نعرف

$$K_j(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & \text{إذا عمل على الأقل أحد عناصر مجموعة القطع رقم } j \\ 0, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وبطريقة مكافئة يمكن التعبير عن $K_j(\boldsymbol{X})$ كالآتي :

$$K_j(\boldsymbol{X}) = \coprod_{i \in K_j} x_i$$

وحيث أن النظام سيتعطل إذا تعطلت جميع عناصر إحدى مجاميع القطوع الصغرى على الأقل، ومن ثم فإنه يمكن كتابة الدالة البنائية للنظام في الصورة التالية :

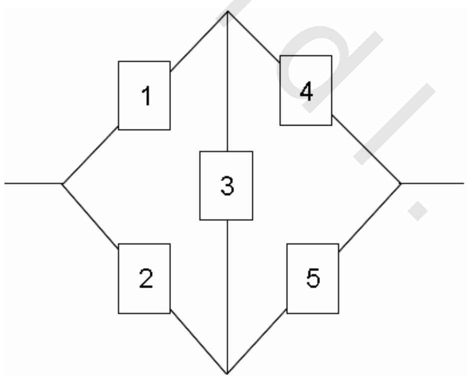
$$\varphi(\boldsymbol{X}) = \prod_{j=1}^{k} K_j(\boldsymbol{X})$$

$$= \prod_{j=1}^{k} \coprod_{i \in K_j} x_i$$

وتشير هذه المعادلة إلى أنه إذا علمت جميع القطوع الصغرى ذات العدد k لنظام مترابط فإنه يمكن إعادة تمثيل هذا النظام في ترتيب توالي مكون من k ضفة من العناصر المتصلة معا على التوازي.

مثال (١,١٨)

بالعودة إلى نظام القنطرة المقدم في المثالين (١,١٤)، (١,١٦).

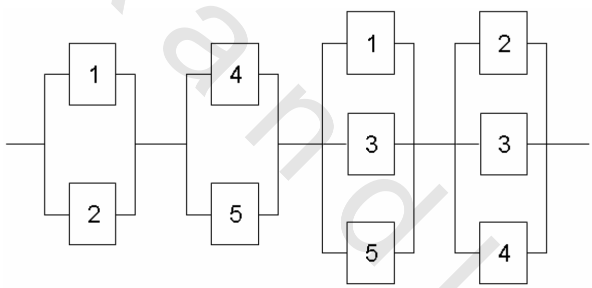


الشكل رقم (١,٢٠). نظام القنطرة.

يوجد لهذا النظام أربعة مجاميع قطوع صغرى ($k = 4$) هي $K_1 = \{1,2\}$ ، $K_2 = \{1,3,5\}$ ، $K_3 = \{2,3,4\}$ ، $K_4 = \{4,5\}$ وبالتالي فإن

$$\varphi(\boldsymbol{X})=\prod_{j=1}^{4}K_j(\boldsymbol{X})$$
$$=\prod_{j=1}^{4}\coprod_{i\in K_j}x_i$$
$$=K_1(\boldsymbol{X})\cdot K_2(\boldsymbol{X})\cdot K_3(\boldsymbol{X})\cdot K_4(\boldsymbol{X})$$
$$=(x_1\vee x_2)\cdot(x_1\vee x_3\vee x_5)\cdot(x_2\vee x_3\vee x_4)\cdot(x_4\vee x_5)$$
$$=[1-(1-x_1)(1-x_2)][1-(1-x_1)(1-x_3)(1-x_5)]$$
$$[1-(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)][1-(1-x_4)(1-x_5)]$$

ومن ثم فأنه يمكن تمثيل النظام في الترتيب المكافئ الموضح بالشكل التالي :



الشكل رقم (١,٢١). ترتيب توالي من أنظمة توازي.

تمرين (١,٢)

بالعودة إلى المثال (١,١٧)، أعد تمثيل النظام في ترتيب توالي من أنظمة توازي.

تمرين (١,٣)

بالعودة إلى المثال (١,١٨)، أعد تمثيل النظام في ترتيب توازي من أنظمة توالي.

البناءات المترابطة المرافقة Dual Coherent Structures

بإعطاء بناء φ ، عرّفنا في نعرف (١,٢) بناءه المرافق بالصيغة التالية :

$$\varphi^D(X) = 1 - \varphi(1 - X)$$

- من الواضح أنه إذا كان X متجه مسار ، إذن $1 - X$ يكون متجه قطع للبناء $\varphi^D(X)$ ، والعكس وبالعكس.
- أيضاً مجاميع الممرات الصغرى للبناء φ تكون مجاميع قطوع صغرى للبناء φ^D ، والعكس بالعكس.

مثال (١,١٩)

بالعودة إلى النظام المكون من ثلاثة عناصر والمقدم في مثال (١,١٣). الدالة البنائية له هي :

$$\varphi(X) = x_1 \cdot (x_2 \vee x_3)$$

وضحنا في المثال (١,١٣) أن متجهات الممرات لهذا النظام هي :

$$X_3 = (1,0,1) \text{ ، } X_2 = (1,1,0) \text{ ، } X_1 = (1,1,1)$$

منهم متجهي ممرات صغرى هما X_2 ، X_3 بمجاميع الممرات الصغرى التالية $P_1 = \{1,2\}$ ، $P_2 = \{1,3\}$. وضحنا في المثال (١,١٥) أن متجهات القطع لهذا النظام هي :

$$X_8 = (0,0,0) \text{ ، } X_7 = (0,0,1) \text{ ، } X_6 = (0,1,0) \text{ ، } X_5 = (1,0,0) \text{ ، } X_4 = (0,1,1)$$

وأن متجهات القطوع الصغرى هي X_4 ، X_5 بمجاميع القطوع الصغرى التالية $K_1 = \{1\}$ ، $K_2 = \{2,3\}$. دعنا الآن ندرس النظام المرافق ، وضحنا في مثال (١,١٠) الدالة البنائية للنظام المرافق هي :

$$\varphi^D(X) = x_1 \vee (x_2 \cdot x_3) = x_1 + x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3$$

والآن

$\varphi(1-\boldsymbol{X}_1)=\varphi(0,0,0)=0$ ، $\varphi(1-\boldsymbol{X}_2)=\varphi(0,0,1)=0$ ،

$$\varphi(1-\boldsymbol{X}_3)=\varphi(0,1,0)=0$$

وهذا يعني أن $1-\boldsymbol{X}_1$ ، $1-\boldsymbol{X}_2$ ، $1-\boldsymbol{X}_3$ تكون متجهات قطع للنظام المرافق.

بالمثل يمكن التحقق من أن :

$\varphi(1-\boldsymbol{X}_4)=\varphi(1-\boldsymbol{X}_5)=\varphi(1-\boldsymbol{X}_6)=\varphi(1-\boldsymbol{X}_7)=\varphi(1-\boldsymbol{X}_8)=1$ ،

وهذا يعني أن $1-\boldsymbol{X}_4$ ، ...، $1-\boldsymbol{X}_8$ تكون متجهات ممر للنظام المرافق. وأن مجاميع الممرات الصغرى P_i^D ومجاميع القطوع الصغرى K_i^D للنظام المرافق هي :

$P_1^D=\{1\}$ ، $P_2^D=\{2,3\}$ ، $K_1^D=\{1,2\}$ ، $K_2^D=\{1,3\}$

ومن ثم فإنه وكما ذكرنا سابقاً أن مجاميع الممرات الصغرى للبناء φ تكون مجاميع قطوع صغرى للبناء المرافق φ^D والعكس بالعكس.

الأهمية النسبية للعناصر Relative Importance of Components

يلاحظ أنه في النظام المترابط تزداد أهمية بعض العناصر عن العناصر الأخرى في تحديد عمل النظام من عدمه، ومن ثم فإنه يجب أن يكون لدينا مقياس عددي لقياس الأهمية الفردية لعناصر النظام.

بفرض العنصر رقم i ، وبفرض معرفة حالات جميع العناصر المتبقية $(\cdot_i,\boldsymbol{x})$

- إذا كان $\varphi(1_i,\boldsymbol{x})=1$ و $\varphi(0_i,\boldsymbol{x})=0$ ، أي أن $\varphi(1_i,\boldsymbol{x})-\varphi(0_i,\boldsymbol{x})=1$ ، فإن العنصر i يحدد ما إذا كان النظام عاملاً أم عاطلاً.
- في المقابل إذا كان $\varphi(1_i,\boldsymbol{x})-\varphi(0_i,\boldsymbol{x})=1-1=0$ أو $\varphi(1_i,\boldsymbol{x})-\varphi(0_i,\boldsymbol{x})=0-0=0$ ، فإن العنصر i ليس له أهمية.

يكون العنصر i أكثر أهمية في الحالة الأولى من الحالة الثانية، ونقول بأن $(1_i,\boldsymbol{x})$ يكون ممراً حرجاً للعنصر i .

ليكن

$$n_\varphi(i) = \sum_{\{\boldsymbol{X}|x_i=1\}} \left[\varphi(1_i, \boldsymbol{X}) - \varphi(0_i, \boldsymbol{X})\right]$$

يشير إلى عدد متجهات الممرات الحرجة للعنصر i ، إذن الأهمية النسبية للعنصر تعطى بالعلاقة

$$I_\varphi(i) = \frac{n_\varphi(i)}{2^{n-1}}$$

تفسير

الأهمية النسبية للعنصر i تكون نسبة من 2^{n-1} والتي فيها $x_i = 1$ والتي هي متجهات ممر حرجة للعنصر i. لاحظ أنه لأي نظام مترابط $0 < I_\varphi(i) \le 1$ لكل $i = 1,2,\cdots,n$.

وبالتالي فإنه لأي دالة بنائية φ يمكن ترتيب العناصر بناءا على أهميتهم النسبية بترتيب القيم $I_\varphi(1)$ ، $I_\varphi(2)$ ، ... ، $I_\varphi(n)$. سنوضح فكرة الأهمية النسبية في المثال التالي.

مثال (١,٢٠)

بالعودة إلى النظام المكون من ثلاثة عناصر والمقدم في مثال (١,١٣)، دالته البنائية هي :

$$\varphi(\boldsymbol{X}) = x_1 \cdot (x_2 \vee x_3) = x_1 \cdot (x_2 + x_3 - x_2 x_3)$$

نريد حساب $I_\varphi(1)$ ، الأهمية النسبية للعنصر رقم 1.

$$\{\boldsymbol{X}|x_1 = 1\} = \{(1,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$$

$$\varphi(1,1,1) - \varphi(0,1,1) = 1 - 0 = 1$$

$$\varphi(1,0,1) - \varphi(0,0,1) = 1 - 0 = 1$$

$$\varphi(1,1,0) - \varphi(0,1,0) = 1 - 0 = 1$$

$$\varphi(1,0,0) - \varphi(0,0,0) = 0 - 0 = 0$$

يوجد ثلاث متجهات ممر حرج للعنصر رقم 1 ، أي أن $n_\varphi(1) = 3$ ، وهذا يعني أنه يوجد ثلاث متجهات $(1,1,1),(1,0,1),(1,1,0)$ والتي تناظر تغيير حالة النظام من عامل إلى عاطل إذا تعطل العنصر 1 ، وبالتالي فإن :

$$I_\varphi(1) = \frac{3}{2^{3-1}} = \frac{3}{4}$$

يمكن استخدام الجداول لتبسيط حساب الأهمية النسبية للعنصر. فلحساب $I_\varphi(1)$ ، نفرض أن العنصر 1 عامل ونعتبر جميع التجمعات من العناصر الأخرى فنحصل على الجدول التالي :

x_1	x_2	x_3	$\varphi(1_1, \boldsymbol{X})$	$\varphi(0_1, \boldsymbol{X})$	$\varphi(1_1, \boldsymbol{X}) - \varphi(0_1, \boldsymbol{X})$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0

نريد حساب الأهمية النسبية للعنصر رقم 2، $I_\varphi(2)$.

$$\{\boldsymbol{X} | x_2 = 1\} = \{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$$

باستخدام الجدول كما أوضحنا سابقا نحصل على :

x_2	x_1	x_3	$\varphi(1_2, \boldsymbol{X})$	$\varphi(0_2, \boldsymbol{X})$	$\varphi(1_2, \boldsymbol{X}) - \varphi(0_2, \boldsymbol{X})$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0

من الواضح أنه يوجد متجه ممر حرج واحد فقط للعنصر 2 ، وبالتالي فإن :

$$I_\varphi(2) = \frac{1}{2^{3-1}} = \frac{1}{4}$$

ومن التماثل ، فإن :

$$I_\varphi(3) = \frac{1}{4}$$

توضح هذه الحسابات أن العنصر 1 أكثر أهمية من العنصر 2 أو العنصر 3 وذلك بسبب موقعه في النظام، وهذا متوقع لأن العنصر 1 متصل على التوالي مع بقية عناصر النظام.

مثال (١,٢١)

بفرض نظام 2− من −3 ونريد حساب $I_\varphi(2)$. أولاً الدالة البنائية للنظام هي:

$$\varphi(\boldsymbol{X}) = \max\{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3\}$$

باستخدام الجدول كما في المثال السابق نحصل على:

x_2	x_1	x_3	$\varphi(1_2,\boldsymbol{X})$	$\varphi(0_2,\boldsymbol{X})$	$\varphi(1_2,\boldsymbol{X})-\varphi(0_2,\boldsymbol{X})$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0

يوجد متجهي ممر حرج للعنصر 2 وهما $(0,1,1),(1,1,0)$، ومن ثم فإن $n_\varphi(2)=2$، وبالتالي:

$$I_\varphi(2) = \frac{2}{2^{3-1}} = \frac{1}{2}$$

ومن التماثل، نحصل على:

$$I_\varphi(1) = I_\varphi(3) = \frac{1}{2}$$

مثال (١,٢٢)

بالعودة إلى نظام القنطرة، ونريد حساب الأهمية النسبية لجميع العناصر. من التماثل نجد أن:

$$I_\varphi(1) = I_\varphi(2) = I_\varphi(4) = I_\varphi(5)$$

وبالتالي فإننا نحتاج فقط إلى حساب $I_\varphi(1), I_\varphi(3)$.

أولاً: نحسب $I_\varphi(1)$: الدالة البنائية، أنظر مثال (١,١٨)، هي

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = [1-(1-x_1)(1-x_2)][1-(1-x_1)(1-x_3)(1-x_5)]$$
$$[1-(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)][1-(1-x_4)(1-x_5)]$$

باستخدام الجدول كما في المثال السابق نحصل على :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\varphi(1_1,\boldsymbol{X})$	$\varphi(0_1,\boldsymbol{X})$	$\varphi(1_1,\boldsymbol{X})-\varphi(0_1,\boldsymbol{X})$
1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0

عدد المتجهات الحرجة التي فيها $x_1 = 1$ هو $2^{5-1} = 2^4 = 16$ ، ويوجد 6 متجهات ممر حرج للعنصر 1 كما هو موضح في الجدول السابق، أي أن $n_\varphi(1) = 6$ ، ومن ثم فإن:

$$I_\varphi(1) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

ثانياً: نحسب $I_\varphi(3)$ ، بالمثل يمكن تكوين جدول مماثل للجدول السابق ولكن للعنصر 3، لنحصل على :

$$I_\varphi(1) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

تمرين (١,٤)

احسب الأهمية النسبية لجميع عناصر النظام المقدم في المثال (١,٥) والذي له الدالة البنائية التالية :

$$\varphi(\boldsymbol{X}) = (x_1 \vee x_2) \cdot x_3 \cdot (x_4 \vee x_5)$$

تمرين (١,٥)

احسب الأهمية النسبية لجميع عناصر الأنظمة التالية :

١- نظام توالي مكون من ثلاثة عناصر.

٢- نظام توازي مكون من ثلاثة عناصر.

٣- نظام 3–من–4.

(١,٤) تجزيئات الأنظمة المترابطة

Modules of Coherent Systems

عملياً عندما نريد حساب موثوقية نظام ما نحتاج أحيانا إلى حساب موثوقية أنظمة جزئية تكون النظام الأصلي. سنعرف فيما يلي مفهوم التجزئ.

اصطلاح: لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة عناصر النظام $C = \{1,2,\cdots,n\}$ ، إذن X^A يشير إلى متجه عناصره x_i ، $i \in A$ و A^C يشير إلى مجموعة جزئية من C ومكملة A.

تعريف (١,٧): ليكن (C,φ) نظام مترابط بـ $C = \{1,2,\cdots,n\}$ ، وليكن $A \subseteq C$ و ψ دالة مترابطة. إذن النظام المترابط (A,χ) يكون تجزئ لـ (C,φ) إذا تحقق أن :

$$\varphi(X) = \psi\left[\chi\left(X^A\right), X^{A^C}\right]$$

تفسير: من البديهي أن التجزيء (A,χ) للنظام (C,φ) هو نظام جزئي مترابط يتصرف كما لو كان أحد عناصر النظام. المعلومة التي نستخلصها من معرفة ما إذا كان

$\chi = 1$ أو $\chi = 0$ له نفس المعلومة التي نستخلصها من معرفة قيمة x_i لكل $i \in A$ في تحديد قيمة الدالة البنائية للنظام الأصلي φ. ففي الشكل البنائي يؤدي إليها خط وحيد ويخرج منها خط وحيد آخر.

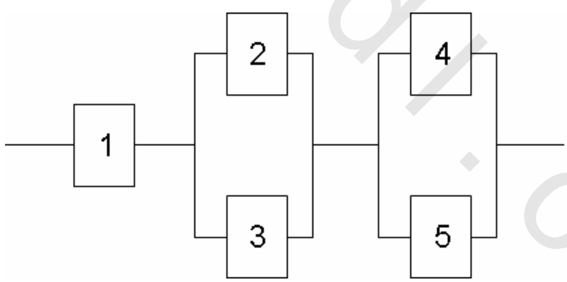
مثال (١,٢٣)

بالعودة إلى النظام المكون من ثلاثة عناصر والمقدم في المثال (١,١٣).

- بأخذ $A = \{2,3\}$ ، إذن $(A, x_2 \vee x_3)$ يكون تجزئ.
- كل عنصر منفرد يكون تجزئ.
- النظام نفسه يكون تجزئ.

مثال (١,٢٤)

بفرض النظام المترابط (C,φ) بـ $C = \{1,2,\cdots,5\}$ ، بالشكل البنائي الموضح في الشكل رقم (١,٢٢)، وبالدالة البنائية $\varphi(X) = x_1(x_2 \vee x_3)(x_4 \vee x_5)$.



الشكل رقم (١,٢٢).

- بأخذ $A = \{2,3\}$ ، إذن $\chi(X^A) = x_2 \vee x_3$ ،

$$\varphi(X) = \psi\left[\chi(X^A), X^{A^C}\right] = x_1 \cdot \chi \cdot (x_4 \vee x_5)$$

• فيما يلي عرضاً لتجزيئات أخرى :

◊ $\left(\{4,5\}, x_4 \vee x_5\right)$

◊ $\left(\{2,3,4,5\}, \left(x_2 \vee x_3\right)\cdot\left(x_4 \vee x_5\right)\right)$

◊ $\left(\{1,2,3\}, x_1 \cdot\left(x_2 \vee x_3\right)\right)$

◊ $\left(\{1,4,5\}, x_1 \cdot\left(x_4 \vee x_5\right)\right)$

يمكن عمليا تحليل النظام المترابط إلى تجزيئات مختلفة ومنفصلة ، أي عمل تحليل تجزيئي للنظام.

تعريف (١,٨)

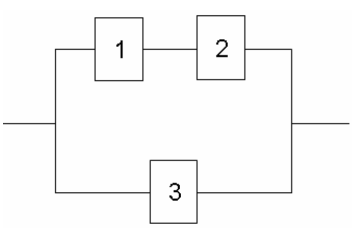
التحليل التجزيئي للنظام المترابط (C,φ) هو مجموعة التجزيئات المنفصلة والمختلفة $\left(A_1,\chi_1\right)$ ، $\left(A_2,\chi_2\right)$ ، ... ، $\left(A_r,\chi_r\right)$ مع البناء المنظم ψ بحيث أن :

١- $C=\coprod_{i=1}^{r} A_i$ حيث $A_i \cap A_j = \phi$ لكل $i \neq j$.

٢- $\varphi(X)=\psi\left[\chi_1\left(X^{A_1}\right),\cdots,\chi_r\left(X^{A_r}\right)\right]$

(١,٥) تمارين

(١,١) يوضح الشكل البنائي التالي تمثيلا لنظام A



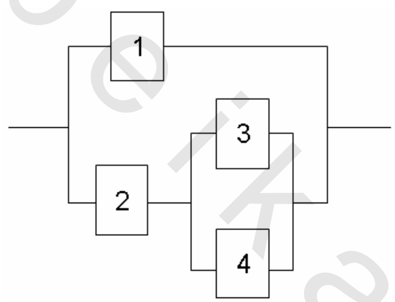
الشكل رقم (١,٢٣). نظام A.

استنتج الدالة البنائية لهذا النظام :

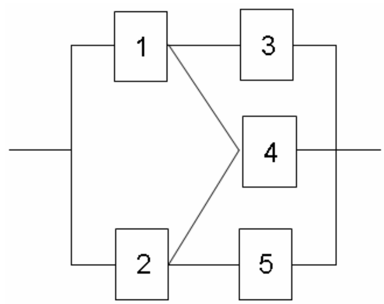
(أ) باستخدام فقط الأصغر والأكبر.

(ب) جبرياً.

(١,٢) اكتب الدالة البنائية للأنظمة الموضحة بالشكل التالي :



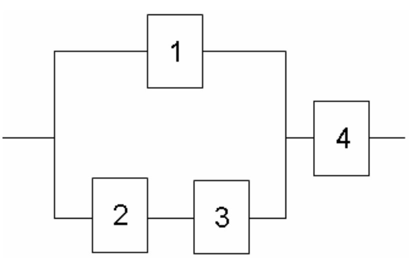
نظام B



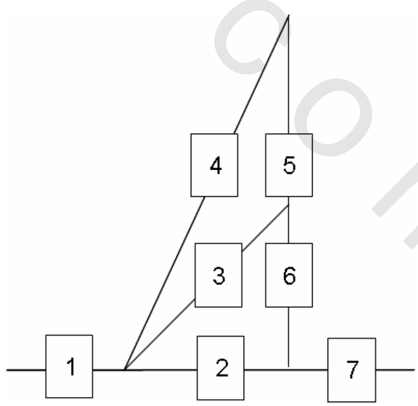
نظام C

الشكل رقم (١,٢٤). نظام *B* ونظام *C*.

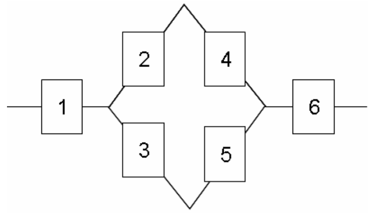
(١,٣) اكتب الدالة البنائية للأنظمة الموضحة بالشكل التالي :



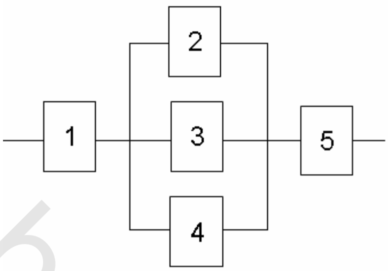
نظام D



نظام E



نظام G



نظام F

الشكل رقم (١,٢٥). الأنظمة *D* ، E، F، G.

(١,٤) ارسم الشكل البنائي للأنظمة ذات الدوال البنائية التالية :

(أ) $\varphi(X) = x_1x_2\left[1-(1-x_3)(1-x_4)\right]$

(ب) $\varphi(X) = \left[1-(1-x_1)(1-x_2x_3)(1-x_4)\right]x_5$

(ج)

$$\varphi(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1^2x_2x_3 - x_1x_2^2x_3 - x_1x_2x_3^2 + (x_1x_2x_3)^2$$

(١,٥) لقد اتفق شخص ما على إلقاء محاضرة لجمع من الجمهور. نظام هذا الشخص مكون من ميكروفون ومكبر وسماعتان. وبفرض أنه إذا تعطل الميكروفون أو المكبر أو كلا السماعتين فإن نظام المحاضر سيتعطل حيث أن الجمهور لن يتمكن من سماعه. ارسم الشكل البنائي لهذا النظام.

(١,٦) سيعمل نظام إلكتروني ما مكون من خمسة عناصر إذا تحققت الشروط التالية :

١) إذا عمل العنصر الأول،

٢) إذا عمل أي من العنصرين الثاني أو الثالث.

٣) إذا عمل أي من العنصرين الرابع أو الخامس.

أجب عن الأسئلة التالية :

أ) ارسم الشكل البنائي لهذا النظام.

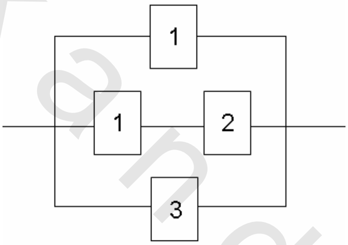
ب) أكتب الدالة البنائية للنظام.

ج) أوجد قيمة الدالة البنائية للنظام عند الحالات التالية :

$X_4 = (1,0,1,0,0)$ ، $X_3 = (0,1,1,1,1)$ ، $X_2 = (1,0,1,0,1)$ ، $X_1 = (1,1,1,0,0)$

د) أوجد الحالات التي تقابل عمل النظام.

(١,٧) وضح أن العنصر رقم 2 عديم الجدوى في النظام التالي



الشكل رقم (١,٢٦). عنصر عديم الجدوى.

(١,٨) ارسم الأشكال البنائية المناظرة لتكرار العناصر وتكرار النظام للنظام A الموضح في الشكل رقم (١,٢٣).

(١,٩) ارسم الشكل البنائي واكتب الدالة البنائية لنظام 2− من− 4.

(١,١٠) اوجد الأهمية البنائية لكل عنصر من عناصر النظام A الموضح في الشكل رقم (١,٢٣).

(١,١١) اوجد الأهمية البنائية لكل عنصر من عناصر نظام مكون من n عنصر، إذا كانت متصلة على التوالي وإذا كانت متصلة على التوازي.

(١,١٢) ارسم الشكل البنائي للنظام المرافق للنظام A الموضح في الشكل رقم (١,٢٣).

(١,١٣) بفرض أنظمة بالدوال البنائية التالية :

١- $\varphi(X) = (x_1 \vee x_2)x_3$

٢- $\varphi(X) = x_1\, x_2 \vee [(x_3\, x_4) \vee (x_5\, x_6)]$

٣- $\varphi(X) = [x_1(x_2 \vee x_3)x_4] \vee x_5$

٤- $\varphi(X) = (x_1\, x_2) \vee (x_1\, x_3) \vee (x_2\, x_3)$

أجب عن التساؤلات التالية :

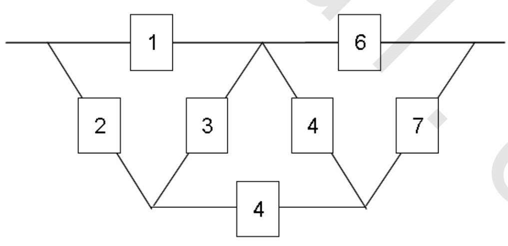
(أ) ارسم الشكل البنائي لكل نظام.

(ب) أوجد النظام المرافق لكل نظام.

(ج) ارسم الشكل البنائي لكل نظام مرافق.

(١,١٤) وضح أن مجموعة ممر أصغر لنظام ما تكون مجموعة قطع أصغر لنظامه المرافق وأن مجموعة القطوع الصغرى للنظام تكون مجموعة ممرات صغرى لنظامه المرافق.

(١,١٥) يوضح الشكل التالي الشكل البنائي للنظام H. أوجد جميع مجاميع القطوع الصغرى ومجاميع الممرات الصغرى لهذا النظام.



الشكل رقم (١,٢٧). النظام H.

(١,١٦) ارسم الشكل البنائي للنظام C الموضح في الشكل رقم (١,٢٤)، أكتب الترتيب المتوالي للأنظمة الجزئية على التوازي والترتيب المتوازي للأنظمة الجزئية على التوالي لهذا النظام.

(١,١٧) أوجد مجاميع الممرات الصغرى ومجاميع القطوع الصغرى لنظام توازي مكون من n عنصر.

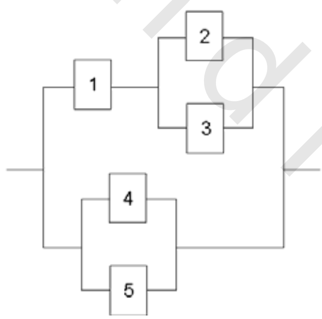
(١,١٨) أوجد الدالة البنائية وارسم الشكل البنائي بدون تكرار العناصر لنظام مترابط له مجاميع الممرات الصغرى التالية $\{1, 2, 4\}$ ، $\{1, 3, 4\}$ ، $\{1, 5\}$.

(١,١٩) بفرض بناء مترابط له مجاميع الممرات الصغرى التالية :

$\{1, 2\}$	$\{2, 3, 4\}$	$\{2, 4, 5\}$	$\{3, 4, 5\}$
$\{1, 3\}$	$\{2, 3, 5\}$	$\{2, 4, 6\}$	$\{3, 4, 6\}$
	$\{2, 3, 6\}$	$\{2, 5, 6\}$	$\{3, 5, 6\}$
			$\{4, 5, 6\}$

حدد عدد الممرات الحرجة لهذا النظام، ثم وضح أن $I_\varphi(1) < I_\varphi(2)$ حتى وإن ظهر العنصر رقم 1 في مجاميع الممرات الصغرى المكونة من عنصرين أكثر من العنصر 2.

(١,٢٠) بفرض النظام I الموضح في الشكل التالي،



الشكل رقم (١,٢٨). النظام I.

أ) أوجد جميع تجزيئات هذا النظام.

ب) صغ التجزيئي المفصلي لهذا النظام

(١,٢١) أوجد جميع تجزيئات نظام القنطرة.

الفصل الثاني

موثوقية الأنظمة المترابطة
Reliability of Coherent Systems

تعتبر النماذج التي قدمناها في الفصل السابق نماذجاً محددةً. أما في هذا الفصل سنقدم نماذج احتمالية (عشوائية). سنربط موثوقية النظام بموثوقية عناصره.

(٢,١) موثوقية أنظمة بعناصر مستقلة
Reliability of Systems with Independent Components

سنتناول في هذا الفصل الأنظمة المتماسكة التي تحقق الشرطين الإضافيين التاليين :

فرضيات

١- كل عنصر من عناصر النظام غير قابل للإصلاح : بمعنى أن العنصر الذي يتعطل لا يمكن أن يعود إلى حالة العمل مرة ثانية.

٢- جميع العناصر مستقلة : بمعنى أن إخفاق أحد العناصر لا يؤثر على احتمال إخفاق باقي العناصر.

سابقاً رمزنا بـ x_i لمتغير ثنائي يشير إلى حالة العنصر رقم i. أما في هذا الفصل سنشير بـ X_i إلى نفس المعنى إلا أنه يكون متغيراً عشوائياً ومن ثم $\varphi(X)$ تكون متغيراً عشوائياً.

تعريف (٢,١)

يرمز المتغير العشوائي X_i إلى حالة العنصر i ، ($i=1,2,\cdots,n$) حيث :

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{إذا كان العنصر } i \text{ يعمل}\\ 0, & \text{إذا كان العنصر } i \text{ عاطل}\end{cases}$$

يسمى المتجه $X=\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ بالمتجه العشوائي لحالة النظام. وحيث إن X متجه عشوائيٌ إذن $\varphi(X)$ تكون أيضاً متغيراً عشوائياً. ليكن p_i احتمال أن العنصر يعمل عند لحظة زمنية معينة :

$$p_i=P(X_i=1),\ i=1,2,...,n$$

يسمى p_i بموثوقية العنصر i ، أما المتجه $\boldsymbol{p}=\left(p_1,p_2,\cdots,p_n\right)$ فيسمى بمتجه الموثوقية.

لاحظ أنه لأجل $i=1,2,...,n$ ،

$$\begin{aligned}E[X_i]&=1\times P(X_i=1)+0\times P(X_i=0)\\&=P(X_i=1)\\&=p_i\end{aligned}$$

بإعطاء متجه الموثوقية $\boldsymbol{p}=\left(p_1,p_2,\cdots,p_n\right)$ ، فإن موثوقية النظام، والتي سنرمز لها بالرمز $h(p)$ ، هي احتمال عمل النظام :

$$h(\boldsymbol{p})=P[\varphi(X)=1].$$

يكن أحيانا أن نطلق عليها اسم دالة موثوقية البناء . وكما في حالة العناصر، نلاحظ أن :

$$\begin{aligned}E[\varphi(X)]&=1\times P(\varphi(X)=1)+0\times P(\varphi(X)=0)\\&=P(\varphi(X)=1)\\&=h(\boldsymbol{p})\end{aligned}$$

وهذا يعطي طريقتين لحساب موثوقية نظام ما. وفيما يلي سنقدم بعض الأمثلة التوضيحية قبل عرض طرق أخرى.

مثال (٢,١)

بفرض نظام توالي مكون من n عنصر. أوضحنا في الفصل السابق أن $\varphi(X)$ لنظام توالي مكون من n عنصر هي :

$$\varphi(X) = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

وباستخدام التعريف، فإنه يمكن الحصول على موثوقية النظام كالآتي :

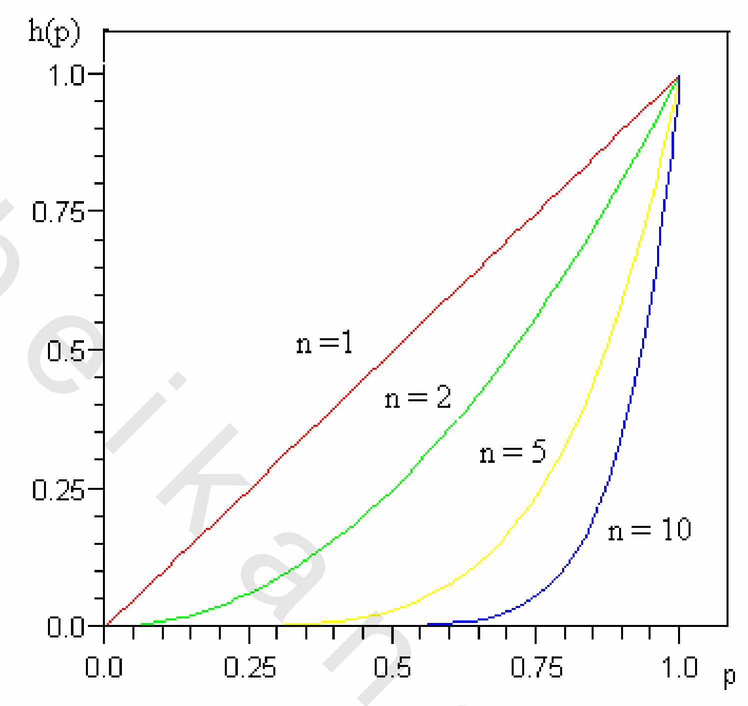
$$h(\boldsymbol{p}) = P[\varphi(X) = 1].$$
$$= P(\prod_{i=1}^{n} X_i = 1)$$

ومن استقلال المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, ..., X_n$ ، لدينا :

$$h(\boldsymbol{p}) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = 1)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} p_i$$

لاحظ ما يلي :

- تكون موثوقية النظام دائما أقل من موثوفية العنصر ذي أقل موثوقية في النظام، وذلك لأن $\prod_{i=1}^{n} p_i < \min_{1 \le i \le n} p_i$
- إذا كانت جميع العناصر متطابقة، إذن $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$ و $h(p) = p^n$ ، يوضح الشكل رقم (٢,١) موثوقية نظام كدالة في موثوقية عناصره بعدد عناصر متغير.



الشكل رقم (٢,١). موثوقية نظام توالي مكون من n عناصر متطابق.

يمكن الحصول على استدلالات مختلفة من الشكل (٢,١):

- لأجل قيمة ثابتة لموثوقية عنصر ما فإن موثوقية نظام ما تزداد مع نقصان عدد عناصره.
- لضمان موثوقية مقبولة لنظام ما فإنه من الضروري أن تكون موثوقية عناصره عالية حتى ولو كان عدد العناصر قليلاً.
- تؤدي الزيادة الطفيفة في موثوقية عناصر نظام ما ذو عدد كبير من العناصر إلى زيادة معقولة في موثوقية النظام.

مثال (٢,٢)

بفرض نظام توازي مكون من n عنصر. أوضحنا في الفصل السابق أن $\varphi(X)$ لهذا النظام هي :

$$\varphi(X) = \coprod_{i=1}^{n} X_i$$

وباستخدام طريقة التوقع، والتي تكون مناسبة أكثر، فإنه يمكن الحصول على موثوقية النظام كالآتي :

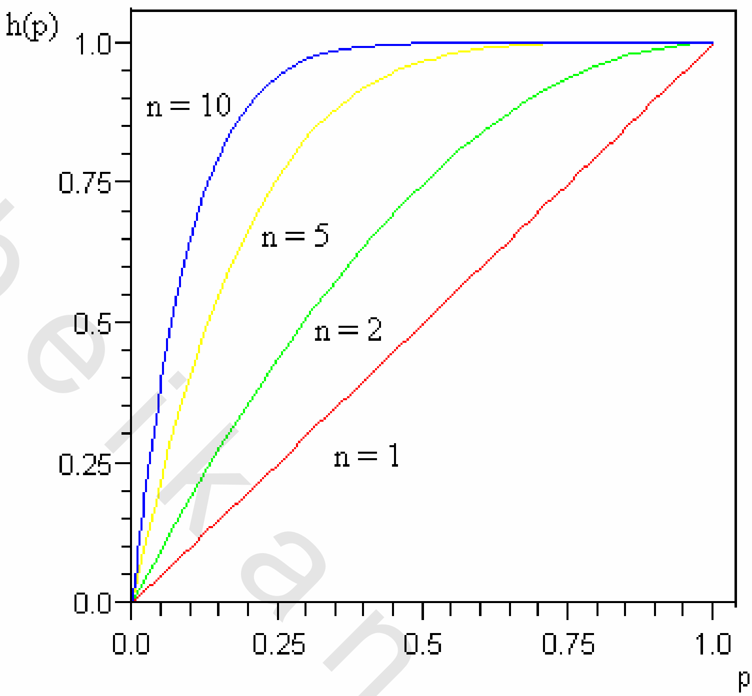
$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{p}) &= E[\varphi(X)]. \\ &= E\left[1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - X_i)\right] \\ &= 1 - E\left[\prod_{i=1}^{n} (1 - X_i)\right] \end{aligned}$$

ومن استقلال المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, ..., X_n$ ، لدينا :

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{p}) &= 1 - \prod_{i=1}^{n} E[1 - X_i] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - E[X_i]) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) \end{aligned}$$

لاحظ ما يلي :

- تكون موثوقية النظام دائماً أكبر من موثوفية العنصر ذي أكبر موثوقية في النظام، وذلك لأن $1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) > \max_{1 \le i \le n} p_i$
- إذا كانت جميع العناصر متطابقة، إذن $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$ و $h(p) = 1 - (1 - p)^n$. يوضح الشكل رقم (٢,٢) موثوقية نظام كدالة في موثوقية عناصره بعدد عناصر متغير.



الشكل رقم (٢,٢). موثوقية نظام توازي مكون من n عناصر متطابق.

يمكن الحصول على استدلالات مختلفة من الشكل (٢ ، ٢):

- لأجل قيمة ثابتة لموثوقية العنصر فإن موثوقية النظام تزداد مع تزايد عدد عناصره.
- لضمان موثوقية مقبولة لنظام ما فإنه من الضروري أن يكون عدد العناصر كبيراً عندما تكون موثوقية عناصره صغيرة.
- تتناقص موثوقية النظام بشكل كبير مع تناقص عدد عناصره.

مثال (٢,٣)

بفرض نظام 2 – من – 3 بعناصر متطابقة، أي أن $p_1 = p_2 = p_3 = p$ ، وبالعودة إلى الفقرة 3 في الملاحظة (٣,١)، نجد أن:

$$\varphi(X) = X_1 X_2 (1 - X_3) + X_1 (1 - X_2) X_3 + (1 - X_1) X_2 X_3 + X_1 X_2 X_3.$$

ومن ثم فإن:

$$\begin{aligned} h(p) &= E[\varphi(X)]. \\ &= E[X_1] E[X_2] (1 - E[X_3]) + E[X_1] (1 - E[X_2]) E[X_3] \\ &\quad + (1 - E[X_1]) E[X_2] E[X_3] + E[X_1] E[X_2] E[X_3] \\ &= pp(1-p) + p(1-p)p + (1-p)pp + ppp \\ &= 3p^2 - 2p^3. \end{aligned}$$

يمكن تعميم هذه النتيجة لنحصل على موثوقية نظام عام k – من – n، كما هو مطلوب في التمرين التالي.

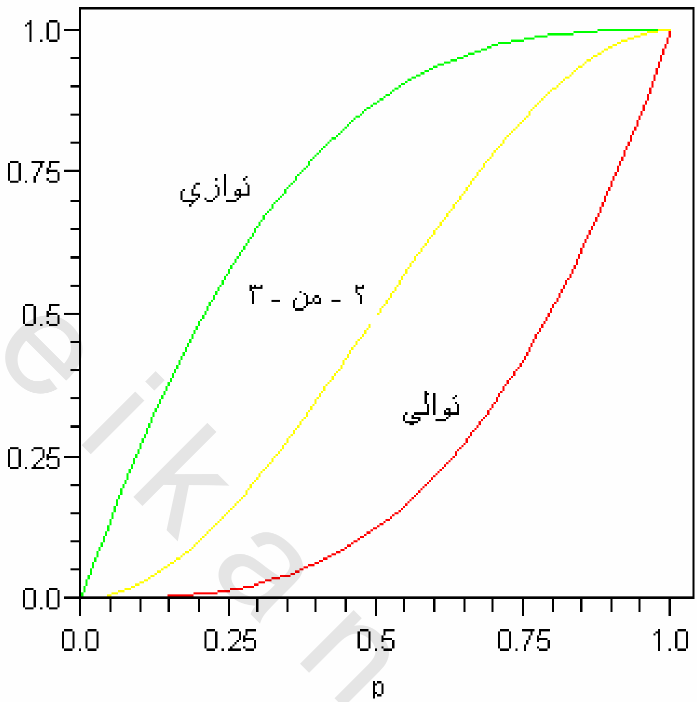
تمرين (٢,١)

وضح أنه يمكن الحصول على موثوقية نظام k – من – n بعناصر متطابقة كما هو معطى في الصيغة التالية:

$$h(p) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

مثال (٢,٤)

من المفيد مقارنة موثوقية الأنظمة التي قدمناها في الأمثلة السابقة، ولعمل ذلك دعنا نأخذ الحالة التي فيها نظام مكون من ثلاثة عناصر متطابقة. لذا وكما أوضحنا فإنه للنظام المتوالي فإن $h_1(p) = p^3$ ، وللنظام المتوازي فإن $h_2(p) = 1 - (1-p)^3$ ، وللنظام 2 – من – 3 فإن $h_3(p) = 3p^2 - 2p^3$. يوضح الشكل رقم (٢,٣) رسماً لموثوقية هذه الأنظمة الثلاثة.



الشكل رقم (٢,٣). موثوقية نظام مكون من 3 عناصر مقابل موثوقية عناصره.

من الواضح أن النظام التوالي هو النظام ذي أقل موثوقية، أما النظام التوازي هو النظام ذي أعلى موثوقية.

مثال (٢,٥)

بفرض النظام الصوتي على الذبذبة في المثال (١,٥). استنتجنا الدالة البنائية لهذا النظام في الصيغة التالية:

$$\varphi(X) = x_1 \cdot (x_2 \vee x_3) \cdot (x_4 \vee x_5)$$

ومن ثم فإن:

$$h(\boldsymbol{p}) = E[\varphi(X)].$$

بفك الطرف الأيمن لـ $\varphi(X)$ نحصل على:

$$\varphi(X) = X_1X_2X_4 + X_1X_3X_4 + X_1X_2X_4 + X_1X_2X_5 + X_1X_3X_5 + X_1X_2X_3X_4X_5 - X_1X_2X_3X_4 - X_1X_2X_3X_5 - X_1X_2X_4X_5 - X_1X_3X_4X_5$$

ومن ثم فإن:

$$h(\boldsymbol{p}) = p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 + p_1p_3p_5 + p_1p_2p_3p_4p_5 - p_1p_2p_3p_4 - p_1p_2p_3p_5 - p_1p_2p_4p_5 - p_1p_3p_4p_5$$

يمكن إعادة كتابة $h(p)$ في الصورة التالية:

$$h(\boldsymbol{p}) = p_1 \cdot (p_2 \vee p_3) \cdot (p_4 \vee p_5)$$

نلاحظ أنه يمكن الحصول علي الصيغة الأخيرة لـ $h(\boldsymbol{p})$ مباشرة باستبدال X_i بـ p_i لكل $i = 1,2,3,4,5$ ، في الدالة البنائية $\varphi(X)$ ، ولكن هذه الطريقة لا تكون محققة لجميع الأنظمة كما سيوضحه المثال التالي.

طريقة متجه الممر Path vector Technique

مثال (٢,٦)

بفرض نظام 2− من− 3، دالته البنائية:

$$\varphi(X) = X_1X_2 \vee X_2X_3 \vee X_1X_3$$
$$= 1 - (1 - X_1X_2)(1 - X_1X_3)(1 - X_2X_3)$$

يوجد أربع متجهات ممر لهذا النظام وهم:

$Y_4 = (1,1,1)$ ، $Y_3 = (1,1,0)$ ، $Y_2 = (1,0,1)$ ، $Y_1 = (0,1,1)$

باستخدام طريقة متجه الممر، نحصل على:

$$h(p) = \text{P}(\text{متجه ممر } Y_1) + \text{P}(\text{متجه ممر } Y_2) + \text{P}(\text{متجه ممر } Y_3) + \text{P}(\text{متجه ممر } Y_4)$$

وحيث أن:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\text{متجه ممر } Y_1) &= P(X_1=0, X_2=1, X_3=1) \\ &= P(X_1=0)\,P(X_2=1)\,P(X_3=1) \\ &= [1-P(X_1=1)]\;P(X_2=1)\,P(X_3=1) \\ &= (1-p_1)\,p_2\,p_3 \end{aligned}$$

بالمثل يمكن الحصول على :

$$\mathrm{P}(\text{متجه ممر } Y_2) = p_1\,(1-p_2)\,p_3$$

$$\mathrm{P}(\text{متجه ممر } Y_3) = p_1\,p_2\,(1-p_3)$$

$$\mathrm{P}(\text{متجه ممر } Y_4) = p_1\,p_2\,p_3$$

ومن ثم يمكن الحصول على :

$$h(\boldsymbol{p}) = p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3 - 2p_1\,p_2\,p_3$$

وللمقارنة يمكن الحصول على $h(\boldsymbol{p})$ بطريقة التوقع :

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{p}) &= E[\varphi(X)]. \\ &= E[1-(1-X_1X_2)(1-X_1X_3)(1-X_2X_3)] \\ &= E[X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 - X_1^2X_2X_3 - X_1X_2^2X_3 \\ &\qquad - X_1X_2X_3^2 + X_1^2X_2^2X_3^2] \\ &= p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3 - p_1\,p_2 - p_1\,p_2\,p_3 - p_1\,p_2\,p_3 + p_1\,p_2\,p_3 \\ &= p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3 - 2p_1\,p_2\,p_3 \end{aligned}$$

لاحظ أنه لأجل متغير عشوائي X_1 يتبع توزيع برنوللي فإن $E[X_1^2] = p_1$ ، وليس $E[X_1^2] = p_1^2$. لذا فإن الاستبدال المباشر لـ X_i بـ p_i لكل $i = 1,2,3$ ، في الدالة البنائية $\varphi(X)$ لا يعطى صيغة صحيحة لموثوقية النظام. نترك للقارئ التحقق من عدم صحة ما يلي :

$$\begin{aligned} h(p) &= E[\varphi(X)]. \\ &= E[1-(1-X_1X_2)(1-X_1X_3)(1-X_2X_3)] \\ &= 1-(1-p_1p_2)(1-p_1p_3)(1-p_2p_3) \end{aligned}$$

طريقة متجه القطع Cut vector Technique

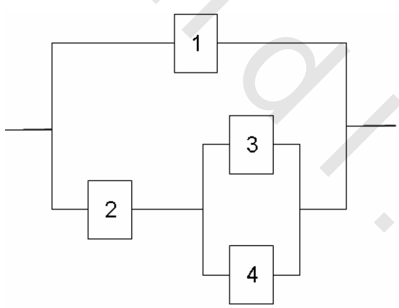
الطريقة الرابعة التي يمكن استخدامها في حساب موثوقية نظام هي طريقة متجه القطع. حيث أنه يستخدم متجهات متنافية مثنى مثنى ، إذن يجب أن يكون مجموع احتمالات متجهات الممر ومتجهات القطع مساويا للواحد. ومن ثم فإنه يمكن تعريف موثوقية النظام بالصورة التالية :

$$h(p) = 1 - \mathrm{P}(\text{متجه قطع } Y)$$

وكما هو الحال في طريقة متجه الممر تصبح هذه الطريقة غير مفضلة عندما يزداد عدد عناصر النظام.

مثال (٢,٧)

بفرض النظام الموضح بالشكل التالي :



الشكل رقم (٢,٤). نظام مكون من أربعة عناصر.

يوجد لهذا النظام خمس متجهات قطع وهي :

$Y_1 = (0,0,0,0)$ ، $Y_2 = (0,0,0,1)$ ، $Y_3 = (0,0,1,0)$ ، $Y_4 = (0,0,1,1)$ ،

$$Y_5 = (0,1,0,0)$$

باستخدام طريقة متجه القطع ، نحصل على :

$$h(p) = 1 - \{ \mathrm{P}(\text{متجه قطع } Y_1) + \mathrm{P}(\text{متجه قطع } Y_2) + \mathrm{P}(\text{متجه قطع } Y_3) + \mathrm{P}(\text{متجه قطع } Y_4) + \mathrm{P}(\text{متجه قطع } Y_5) \}$$

وحيث أن :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\text{متجه قطع } Y_1) &= P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 0) \\ &= P(X_1 = 0)\, P(X_2 = 0)\, P(X_3 = 0) P(X_4 = 0) \\ &= (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4) \end{aligned}$$

بالمثل يمكن حساب باقي الاحتمالات لنحصل على :

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{p}) = 1 &- (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4) - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)\, p_4 \\ &- (1 - p_1)(1 - p_2)\, p_3 (1 - p_4) - (1 - p_1)(1 - p_2)\, p_3 p_4 \\ &- (1 - p_1)\, p_2 (1 - p_3)(1 - p_4) \end{aligned}$$

تمرين (٢,٢)

بالعودة إلى المثال (٢,٧)، احسب موثوقية النظام باستخدام :

أ) طريقة التوقع ،

ب) طريقة متجه الممر.

تمرين (٢,٣)

بالعودة إلى المثال (٢,٦)، احسب موثوقية النظام باستخدام :

أ) طريقة التوقع ،

ب) طريقة متجه القطع.

(٢,٢) بعض الخواص الأساسية لموثوقية نظام
Some Basic Properties of System Reliability

والآن سوف نناقش بعض خواص موثوقية النظام. أول هذه الخواص هي خاصية التفكك ، والتي تعتبر طريقة خامسة لحساب موثوقية النظام.

التفكك Decomposition

لاستخدام التفكك يجب أولا اختيار أحد عناصر النظام الأساسية وتحديد ضبط حالة هذا العنصر الأساسي. بالطبع يمكن اختيار أي عنصر من عناصر النظام ليكون عنصر أساسياً للنظام، إلا إنه يفضل اختيار أحد العناصر التي يكون لها موضع وحيد في الشكل البنائي للنظام.

تمهيدية (٢,١)

لدينا :

$$h(\boldsymbol{p}) = p_i h(1_i, \boldsymbol{p}) + (1 - p_i)\, h(0_i, \boldsymbol{p}),\ i = 1,2,\ldots,n$$

حيث :

$h(1_i, \boldsymbol{p})$: موثوقية النظام عندما يكون العنصر رقم i عاملاً

$h(0_i, \boldsymbol{p})$: موثوقية النظام عندما يكون العنصر رقم i عاطلاً

البرهان

باستخدام طريقة الاحتمال الشرطي، يمكن حساب موثوقية النظام كالآتي :

$h(\boldsymbol{p})$ = P(النظام يعمل | العنصر المفتاح يعمل) P(العنصر المفتاح يعمل)

+ P(النظام يعمل | العنصر المفتاح لا يعمل) P(العنصر المفتاح لا يعمل)

والآن بفرض نظام A بعنصر مفتاح مستبدل بعنصر تام (لا يخفق) في النظام قيد الدراسة، وبتعريف نظام B بعنصر مفتاح مستبدل بعنصر مخفق في النظام قيد الدراسة. الصيغة التالية تكافئ هذا التعريف :

$h(\boldsymbol{p})$ = P(النظام A يعمل) P(العنصر المفتاح يعمل)

+ P(النظام B يعمل) P(العنصر المفتاح لا يعمل)

هذا التعبير هو نفس التعبير المعطى في النتيجة.

يمكن برهان النتيجة السابقة بطريقة أخرى ، فباستخدام التحليل المفصلي للدالة البنائية في التمهيدية (١,١)

$$\varphi(X) = X_i \varphi(1_i, X) + (1 - X_i)\,\varphi(0_i, X),\; i = 1,2,\ldots,n$$

بأخذ التوقع لطرفي العلاقة السابقة

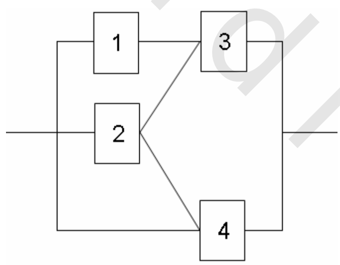
$$E[\varphi(X)] = E[X_i]\,E[\varphi(1_i, X)] + (1 - E[X_i])\,E[\varphi(0_i, X)],\; i = 1,2,\ldots,n$$

وبذلك نحصل على نفس النتيجة.

يمكن استنتاج من التمهيدية (٢,١) أن $h(p)$ دالة خطية متعددة ، بمعنى أنها خطية في كل من p_i . بالإضافة إلى ذلك فإنه عندما $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$ ، فإنه يمكن كتابة $h(\boldsymbol{p})$ في شكل كثيرة حدود في p .

مثال (٢,٨)

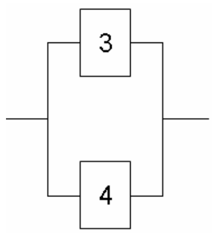
بفرض النظام التالي :



الشكل رقم (٢,٥). نظام مكون من أربعة عناصر.

باستخدام العنصر رقم 2 $(i = 2)$ كعنصر مفتاح في التفكك.

• النظام A المناظر للنظام الأصلي بعنصر مفتاح 2 مستبدل بعنصر تام $(p_2 = 1)$. في هذه الحالة يصبح العنصر 1 عديم الجدوى ومن ثم يمكن إسقاطه ، ويصبح النظام كما هو موضح بالشكل رقم (٢,٦).



الشكل رقم (٢,٦). النظام A.

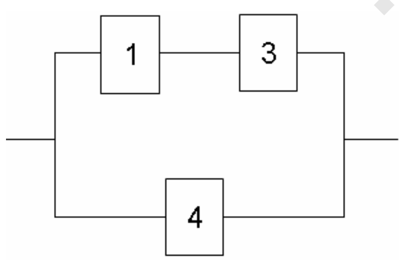
ومن ثم فإن موثوقية النظام A هي :

$$h(1_2, \boldsymbol{p}) = 1 - (1 - p_3)(1 - p_4)$$

● النظام B المناظر للنظام الأصلي بعنصر مفتاح 2 مستبدل بعنصر مخفق في النظام قيد الدراسة $(p_2 = 0)$. في هذه الحالة سيأخذ النظام الشكل الموضح بالشكل رقم (٢,٧).

ومن ثم فإن موثوقية النظام B هي :

$$h(0_2, \boldsymbol{p}) = 1 - (1 - p_1 p_3)(1 - p_4)$$



الشكل رقم (٢,٧). نظام مكون من أربع عناصر.

ومن ثم فإن موثوقية النظام تصبح :

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{p}) &= p_2 h(1_2, p) + (1-p_2)\,h(0_2, p) \\ &= p_2[1-(1-p_3)(1-p_4)] + (1-p_2)[1-(1-p_1 p_3)(1-p_4)] \end{aligned}$$

الاطراد Monotonicity

رأينا في الفصل الأول أن الدالة البنائية للنظام المتماسك تكون دالة مطردة الزيادة. فيما يلي سنقدم الخاصية المناظرة لتلك الخاصية ولكن للموثوقية.

نظرية (٢,١)

لتكن $h(p)$ دالة موثوقية نظام متماسك، إذن الدالة $h(p)$ تكون مطردة الزيادة في p_i من أجل كل $i = 1,2,...,n$ ، $0 < p_i < 1$.

البرهان

لدينا من التمهيدية (٢,١):

$$h(p) = p_i h(1_i, p) + (1-p_i)\,h(0_i, p),\ i = 1,2,...,n$$

بالتفاضل بالنسبة لـ p_i ، نحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(p)}{\partial p_i} &= h(1_i, p) - h(0_i, p) \\ &= E[\varphi(1_i, X)] - E[\varphi(0_i, X)] \\ &= E[\varphi(1_i, X) - \varphi(0_i, X)] \end{aligned}$$

وحيث أن النظام متماسك، إذن الدالة φ مطردة الزيادة ومن ثم فإن $\varphi(1_i, X) - \varphi(0_i, X) \geq 0$. ومن جهة أخرى كل عنصر من عناصر النظام ذو جدوى، إذن يوجد متجه واحد على الأقل وليكن X^0 يحقق أن $\varphi(1_i, X^0) - \varphi(0_i, X^0) = 1 > 0$. وهذا يضمن أن $\frac{\partial h(\boldsymbol{p})}{\partial p_i} > 0$ وهذا يكمل البرهان.

تكرار النظام مقابل تكرار العنصر

System Redundancy vs Component Redundancy

استخدمنا الدالة البنائية في الفصل الأول، نظرية (١,٢)، لتوضيح أن تكرار على مستوى العنصر أكثر فاعلية من تكرار مستوى النظام. مثل هذه الخاصية تحققها دالة الموثوقية، كما تبينه النظرية التالية.

نظرية (٢,٢)

لتكن $h(\boldsymbol{p})$ دالة موثوقية نظام متماسك، إذن الدالة $h(\boldsymbol{p})$ تحقق المتباينتين التاليتين:

أ) $h(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{p}') \geq h(\boldsymbol{p}) \vee h(\boldsymbol{p}')$ لأجل جميع $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'$ ، $0 \leq \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}' \leq 1$.

ب) $h(\boldsymbol{p} . \boldsymbol{p}') \leq h(\boldsymbol{p}) \cdot h(\boldsymbol{p}')$ لأجل جميع $\boldsymbol{p}'$ ، $0 \leq \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}' \leq 1$.

البرهان

أ) ليكن $X_1, X_2, \cdots, X_n$ و $X_1', X_2', \cdots, X_n'$ متجهي حالة للنظام بحيث أن

$$P(X_i' = 1) = p_i' \text{ ، } P(X_i = 1) = p_i$$

من النظرية (١,٢) فقرة (أ)، لدينا:

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{p}') - h(\boldsymbol{p}) \vee h(\boldsymbol{p}') &= \sum_{x} \sum_{x'} \left[\varphi(x \vee x') - \varphi(x) \vee \varphi(x')\right] \\ &\qquad \times P(X = x) P(X' = x') \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

ب) بالمثل يمكن برهان صحة المتباينة (ب).

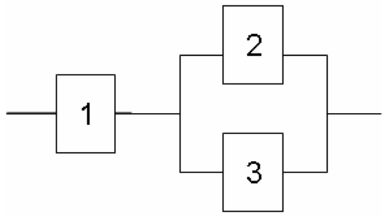
ملاحظة (٢,١)

١- المتباينة (أ) تصبح متساوية فقط إذا كان النظام توازي.

٢- المتباينة (ب) تصبح متساوية فقط إذا كان النظام توالي.

مثال (٢,٩)

بفرض النظام المكون من ثلاثة عناصر والمقدم في المثال (١,١٣) وبفرض أن جميع عناصره متطابقة، بمعنى أن $p_1 = p_2 = p_3 = p$.



الشكل رقم (٢,٨). نظام متماسك مكون من ثلاثة عناصر متطابقة.

الدالة البنائية لهذا النظام تأخذ الصيغة التالية :

$$\varphi(X) = X_1(X_2 + X_3 - X_2X_3)$$

إذن موثوقية النظام هي :

$$h(\boldsymbol{p}) = E[X_1X_2] + E[X_1X_3] - E[X_1X_2X_3]$$
$$= p^2(2-p)$$

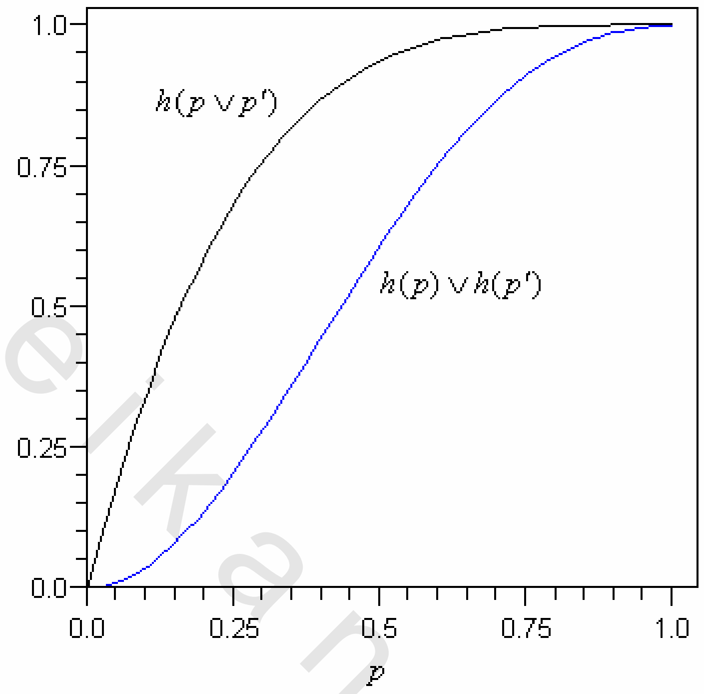
بتكرار النظام كله نحصل على دالة الموثوفية التالية :

$$h(\boldsymbol{p}) \vee h(\boldsymbol{p}') = 1 - [1 - h(\boldsymbol{p})]^2$$
$$= h(\boldsymbol{p})[2 - h(\boldsymbol{p})]$$
$$= p^2(2-p)\left[2 - p^2(2-p)\right]$$

بتكرار كل عنصر من عناصر النظام نحصل على دالة الموثوقية التالية :

$$h(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{p}') = (p \vee p)^2[2 - p \vee p]$$
$$= \left[1-(1-p)^2\right]^2 \left[2 - \left\{1-(1-p)^2\right\}\right]$$
$$= \left(2p - p^2\right)^2 \left(2 - 2p + p^2\right)$$

يوضح الشكل رقم (٢,٩) رسماً بيانياً لهاتين الدالتين. فمن الواضح من الرسم أن $h(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{p}')$ تعلو $h(\boldsymbol{p}) \vee h(\boldsymbol{p}')$ كما تنص النظرية (٢,٢).



الشكل رقم (٢,٩). تكرار على مستوى العنصر مقابل تكرار على مستوى النظام.

أهمية موثوقية العناصر Reliability Importance of Components

يمكن حساب أهمية موثوقية كل عنصر بمجرد حساب دالة موثوقية النظام. فيما يلي مقارنة أهمية موثوقية العنصر مع أهميته البنائية.

- الأهمية البنائية للعنصر تعكس أهميته النسبية بناءا على موضعه وسط باقي عناصر النظام.
- أهمية موثوقية العنصر تجمع بين أهمية الموضع والموثوقية لتعكس أهميته بالنسبة لموثوقية النظام.

تعريف (٢,٢)

أهمية موثوقية العنصر j تعرف بالصيغة التالية :

$$I_h(j)=\frac{\partial h(\boldsymbol{p})}{\partial p_j},\ j=1,2,\cdots,n$$

تفسير

• تكون مساهمة أهمية العنصر في موثوقية النظام عبارة عن المعدل الذي عنده تتحسن موثوقية النظام بتحسن موثوقية العنصر.

• العنصر الذي له أهمية موثوقية أكبر هو عبارة عن ذلك العنصر الذي يناظر زيادة موثوقيته أعلى زيادة في موثوقية النظام.

باستخدام صيغة التفكك ، يمكن تقديم طريقة مكافئة لتعريف أهمية موثوقية عنصر كما في التعريف التالي.

تعريف (٢,٣)

أهمية موثوقية العنصر j تعطى بالصيغة التالية :

$$\begin{aligned}I_h(j)&=h(1_j,\boldsymbol{p})-h(0_j,\boldsymbol{p})\\&=E[\varphi(1_j,X)-\varphi(0_j,X)],\ j=1,2,\cdots,n\end{aligned}$$

خاصية (٢,١)

١- $0<I_h(j)<1$ لكل $j=1,2,\cdots,n$ ، $n>1$.

٢- إذا كان $p_j=\frac{1}{2}, j=1,2,\cdots,n$ ، إذن $I_h(j)=I_\varphi(j)$.

مثال (٢,١٠)

بفرض أننا رقمنا عناصر النظام بحيث أن موثوقية العناصر تحقق $p_1\le p_2\le\cdots\le p_n$ ، إذن

(أ) إذا كان النظام توالي : حيث أن الدالة البنائية للنظام هي :

$$\phi(\boldsymbol{X})=\prod_{i=1}^{n}X_i$$

إذن موثوقية النظام هي :

$$h(\boldsymbol{p}) = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

ومن ثم فإن أهمية موثوقية العنصر j هي :

$$I_h(j) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i$$

ومن ثم يكون لدينا الترتيب التالي :

$$I_h(1) \geq I_h(2) \geq \cdots \geq I_h(n)$$

لاحظ أنه إذا كان جميع العناصر متطابقة فإن أهمية موثوقية العنصر j تصبح :

$$I_h(j) = p^{n-1}$$

(ب) إذا كان النظام توازي : حيث أن الدالة البنائية للنظام هي

$$\phi(\boldsymbol{X}) = \coprod_{i=1}^{n} X_i$$

إذن موثوقية النظام هي :

$$h(p) = \coprod_{i=1}^{n} p_i$$

ومن ثم فإن أهمية موثوقية العنصر j هي :

$$I_h(j) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (1 - p_i)$$

ومن ثم يكون لدينا الترتيب التالي :

$$I_h(1) \leq I_h(2) \leq \cdots \leq I_h(n)$$

لاحظ أنه إذا كان جميع العناصر متطابقة فإن أهمية موثوقية العنصر j تصبح :

$$I_h(j) = (1 - p)^{n-1}$$

مثال (٢,١١)

بفرض نظام $2-$ من -3، دالته البنائية هي :

$$\varphi(X) = X_1X_2 + X_2X_3 + X_1X_3 - 2X_1X_2X_3$$

وبالتالي فإن دالة الموثوقية هي :

$$h(\boldsymbol{p}) = p_1p_2 + p_2p_3 + p_1p_3 - 2p_1p_2p_3$$

ومن ثم فإنه يمكن حساب أهمية موثوقية عناصره الثلاث في الصورة التالية :

$$I_h(1) = p_2 + p_3 - 2p_2p_3$$

$$I_h(2) = p_1 + p_3 - 2p_1p_3$$

$$I_h(3) = p_1 + p_2 - 2p_1p_2$$

من السهل التحقق مما يلي :

- إذا كان $p_i \geq \frac{1}{2}$ ، إذن لدينا الترتيب التالي :

$$I_h(1) \leq I_h(2) \leq I_h(3)$$

- إذا كان $p_i \leq \frac{1}{2}$ ، إذن لدينا الترتيب التالي :

$$I_h(1) \geq I_h(2) \geq I_h(3)$$

لاحظ أنه إذا كانت جميع عناصر النظام متطابقة، فإن أهمية العنصر j تصبح :

$$I_h(j) = 2p(1-p), j = 1,2,3.$$

(٢,٣) حدود موثوقية النظام

Systems Reliability Bounds

يبدو جلياً من خلال الأمثلة السابقة أن حساب دالة موثوقية الأنظمة ليست عملية سهلة وخصوصا في حالة الأنظمة المعقدة. ولذا يصعب أحيانا حساب دالة موثوقية بعض الأنظمة، ولهذا السبب تم تطوير بعض الطرق التي تقدم حدوداً لموثوقية

الأنظمة المعقدة والمكونة من عناصر كثيرة. سنقدم في هذا الكتاب طريقتان لحساب حدود الموثوقية.

تقدم النظرية (٢,٣) أول هاتين الطريقتين.

نظرية (٢,٣)

لدينا المتباينة التالية :

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \le h(\boldsymbol{p}) \le \coprod_{i=1}^{n} p_i$$

البرهان

(يترك كتمرين)

تفسير

تنص النظرية (٢,٣) على أن أسوء ترتيب للعناصر هو ترتيبها في نظام توالي أما أفضل ترتيب لها هو ترتيبها في نظام توازي وأن أي نظام مترابط آخر يكون له موثوقية تقع بين موثوقية هذين النظامين.

مثال (٢,١٢)

بالعودة إلى المثال (١,٥) للنظام الصوتي عالي الذبذبة وبفرض أن جميع عناصره متطابقة وأن موثوقية أي عنصر $p = 0.9$. تضمن النظرية (٢,٣) أن موثوقية هذا النظام $h(p)$ يجب أن تحقق المتباينة $0.59049 \le h(p) \le 0.99999$ ، والتي لا تخبر الكثير عن موثوقية النظام.

تقدم الطريقة الثانية حدوداً أفضل من التي تقدمها الطريقة السابقة، ويمكن استخدام هذه الطريقة عندما نستطيع تحديد مجاميع الممرات الصغرى و مجاميع القطوع الصغرى.

نظرية (٢,٤)

ليكن $P_1, P_2, \cdots, P_s$ مجاميع الممرات الصغرى و $K_1, K_2, \cdots, K_k$ مجاميع القطوع الصغرى لنظام ما ، إذن لدينا المتباينة التالية :

$$\prod_{j=1}^{k} \coprod_{i \in K_j} p_i \le h(\boldsymbol{p}) \le \coprod_{j=1}^{s} \prod_{i \in P_j} p_i$$

أو بشكل مكافئ :

$$\prod_{j=1}^{k} \left[1 - \prod_{i \in K_j} (1 - p_i) \right] \le h(\boldsymbol{p}) \le 1 - \prod_{j=1}^{s} \left[1 - \prod_{i \in P_j} p_i \right]$$

البرهان

(يترك كتمرين)

مثال (٢,١٣)

بالعودة إلى النظام المكون من أربع عناصر الموضح في الشكل رقم (٢,٤) والمدروس في المثال (٢,٧).

- يوجد ثلاث $(s = 3)$ مجاميع ممرات صغرى وهي $P_1 = \{1\}$ ، $P_2 = \{2,3\}$ ، $P_3 = \{2,4\}$.
- يوجد مجموعتان $(k = 2)$ من مجاميع القطوع الصغرى وهما $K_1 = \{1,2\}$ ، $K_2 = \{1,3,4\}$.

الحد الأدنى لموثوقية النظام هو :

$$\prod_{j=1}^{2} \left[1 - \prod_{i \in K_j} (1 - p_i) \right] = \left[1 - \prod_{i \in K_1} (1 - p_i) \right] \left[1 - \prod_{i \in K_2} (1 - p_i) \right]$$

$$= [1 - (1 - p_1)(1 - p_2)][1 - (1 - p_1)(1 - p_3)(1 - p_4)]$$

الحد الأعلى هو :

$$1-\prod_{j=1}^{s}\left[1-\prod_{i\in P_j}p_i\right]=1-\left[1-\prod_{i\in P_1}p_i\right]\left[1-\prod_{i\in P_2}p_i\right]\left[1-\prod_{i\in P_3}p_i\right]$$
$$=1-(1-p_1)(1-p_2p_3)(1-p_2p_4)$$

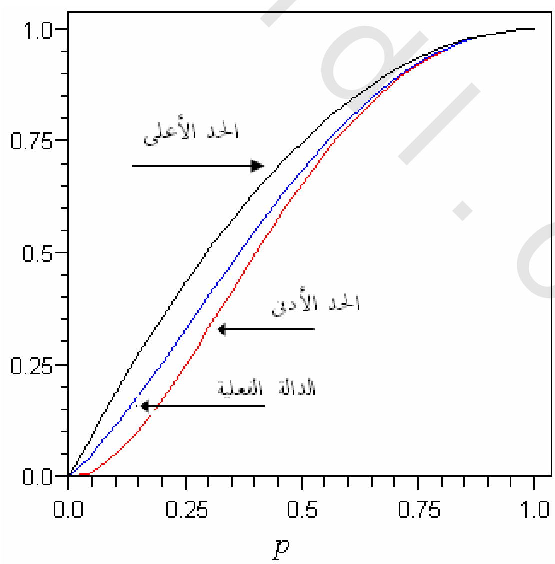
إذا كانت جميع العناصر متطابقة، $p_i = p$ ، $(i=1,\cdots,4)$ ، فإن هذين الحدين يصبحا :

$$\left[1-(1-p)^2\right]\left[1-(1-p)^3\right]\le h(p)\le 1-(1-p)\left(1-p^2\right)^2$$

تذكر من مثال (٢,٧) أن دالة الموثوقية الفعلية هي :

$$h(p)=1-(1-p)^4-3(1-p)^3p-(1-p)^2p^2$$

الشكل رقم (٢,١٠) يمثل الحدين العلوي والسفلي لدالة الموثوقية ودالة الموثوقية الفعلية.



الشكل رقم (٢,١٠). حدود موثوقية نظام مكون من أربع عناصر.

حدي الموثوقية المحسوبة من النظرية (٢,٤) أفضل من حدي الموثوقية المحسوبة من النظرية (٢,٣).

(٢,٤) تمارين

(٢,١) ما هو أصغر عدد ممكن من العناصر المتطابقة بالموثوقية والتي يجب أن تتصل معا على التوازي لتكون نظاماً متماسكاً موثوقيته 0.999 ؟

(٢,٢) ما هي موثوقية كل عنصر من العناصر المتطابقة ذات العدد n والتي تكون نظام توالي موثوقيته 0.8 ؟

(٢,٣) أوجد p_3 في النظام A، الموضح في الشكل رقم (١,٢٣) في تمرين (١,١)، والتي تضمن موثوقية النظام لتكن 0.76 إذا كان:

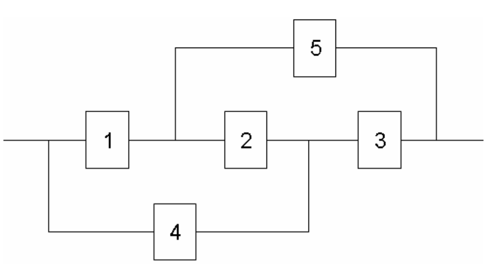
أ) $p_1 = 0.8$ ، $p_2 = 0.4$.

ب) $p_1 = 0.9$ ، $p_2 = 0.9$.

(٢,٤) أوجد موثوقية البناء الموضح في المثال (١,٢٤) الشكل رقم (١,٢٢).

(٢,٥) أوجد موثوقية النظام C، الشكل رقم (١,٢٤) – تمرين (١,٢)، باستخدام طريقة التفكك وبشرط على حالة العنصر 4.

(٢,٦) أوجد موثوقية النظام المكون من خمسة عناصر والموضح في الشكل رقم (٢,١١) باستخدام طريقة التفكك وبشرط على حالة العنصر 1.



الشكل رقم (٢,١١). نظام مكون من خمسة عناصر.

(٢,٧) أوجد دالة الموثوقية الفعلية لنظام القنطرة في المثال (١,٦).

(٢,٨) اكتب تعبيراً، بدون حل، لإيجاد موثوقية العنصر المناسب والذي يضمن أن موثوقية نظام 2− من − 3 بعناصر متطابقة تساوي r.

(٢,٩) أعط تعبيرا والذي يمكن بحله الحصول على موثوقية العناصر التي تضمن أن موثوقية نظام k − من − n هي r حيث أن عناصر النظام جميعها متطابقة.

(٢,١٠) أوجد أهمية موثوقية كل عنصر في النظام A الموضح في الشكل رقم (١,٢٣) تمرين (١,١).

(٢,١١) أوجد أهمية موثوقية كل عنصر من عناصر نظام القنطرة في المثال (١,٦).

(٢,١٢) بفرض نظام توالي مكون من ثلاثة عناصر 1، 2، 3 أهمية موثوقياتهم على الترتيب هي m_1 ، m_2 ، m_3. أوجد p_1 ، p_2 ، p_3 بدلالة m_1 ، m_2 ، m_3.

(٢,١٣) أوجد أهمية الموثوقية لكل عنصر من عناصر نظام توازي مكون من n عنصر.

(٢,١٤) باعتبار الخمس ترتيبات الممكنة للعناصر في النظام المتماسك والمكون من ثلاثة عناصر والموصوف بالشكل رقم (١,١٣) مثال (١,١١)، وبفرض أن جميع العناصر متطابقة ولكل منهم موثوقية p :

أ) احسب موثوقية النظام باستخدام كل ترتيب من الترتيبات الخمس.

ب) رتب الترتيبات من الترتيب ذي أقل موثوقية إلى الترتيب ذي أعلى موثوقية.

(٢,١٥) بفرض نظام توالي مكون من عنصرين مستقلين بالموثوقية $p_1 = 0.6$ ، $p_2 = 0.9$. الهدف من النظام هو الحصول على موثوقية $h(p) = 0.95$. استخدم طريقة تكرار العنصر من أجل زيادة موثوقية النظام، فما أقل عدد من العناصر من كلا النوعين يجب استخدامهم للوصول إلى الهدف المرجو لموثوقية النظام؟

(٢,١٦) يريد أحد المهندسين أن يختار بين تصميمين لنظام مكون من n عنصر متطابق ولكل منهم موثوقية p لزمن محدد مسبقاً. التصميم الأول هو تصميم توالي (1 – من – 2) والثاني هو تصميم 2 – من– 4، فما هو التصميم الذي تنصح المهندس أن يختار؟

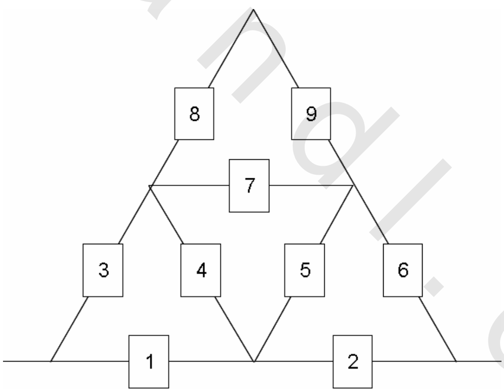
(٢,١٧) بالرجوع إلى النظام A، الشكل رقم (١,٢٣) – تمرين (١,١)،

(أ) أوجد حدود موثوقية النظام باستخدام طريقتين.

(ب) ارسم حدود الموثوقية مع دالة الموثوقية الفعلية كما في الشكل رقم (٢,١٠).

(٢,١٨) أوجد حدود دالة موثوقية النظام B، الشكل رقم (١,٢٤) – تمرين (١,٢).

(٢,١٩) بفرض النظام الموضح بالشكل رقم (٢,١٢)،



الشكل رقم (٢,١٢). شبكة بطرفين.

(أ) أوجد جميع مجاميع الممرات الصغرى لهذا النظام.

(ب) أوجد جميع مجاميع القطوع الصغرى لهذا النظام.

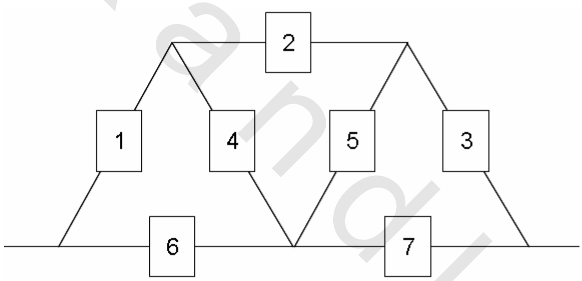
(ج) بفرض أن جميع عناصر النظام متطابقة بالموثوقية p، وضح أن الحد الأدنى والحد الأعلى لموثوقية النظام هما على الترتيب :

$$l(p) = \left(1-q^{2}\right)^{2}\left(1-q^{4}\right)^{6}$$
$$u(p) = 1-\left(1-p^{2}\right)\left(1-p^{3}\right)^{3}\left(1-p^{4}\right)^{4}\left(1-p^{5}\right)^{2}$$

حيث $q = 1-p$

(د) مثل حدي دالة الموثوقية ودالة الموثوقية الفعلية في رسم بياني واحد.

(٢,٢٠) بفرض الشكل البنائي الموضح في الشكل رقم (٢,١٣)، أجب عن نفس الأسئلة في تمرين (٢,١٩).



الشكل رقم (٢,١٣). شبكة بطرفين.

الفصل الثالث

عائلات التوزيعات المعلمية المستخدمة في نظرية الموثوقية

Parametric Families of Distributions Used in Reliability Theory

قدمنا حتى الآن نظام العناصر باستخدام حالات العناصر والتي تكون إما عاملة وإما عاطلة عند لحظة زمنية معينة. وفي هذا الفصل ، سنعمم الموثوقية لتكون دالة في الزمن.

(٣,١) تمثيل التوزيعات
Distribution Representations

ليكن T يرمز إلى متغير عشوائي غير سالب يمثل زمن حياة وحدة ما. تستخدم خمس دوال لوصف توزيع المتغير العشوائي T. اختيرت هذه الدوال لأنها مفيدة في حل بعض المشاكل واستخدامها الواسع في كثير من المراجع التي تتعلق بالموثوقية.

دالة البقاء Survival Function:

نشير بـ $S(t)$ لدالة البقاء عند اللحظة t ، كما أنه يرمز أحيانا لهذه الدالة بالرمز $\overline{F}(t)$. وتعرف بالصيغة التالية :

$$S(t) = P(T > t),\ t \geq 0$$

تفسير: دالة البقاء تعمم الموثوقية:

- موثوقية عنصر ما هي احتمال عمل هذا العنصر عند لحظة زمنية محددة.
- دالة البقاء لعنصر ما هي احتمال أن هذا العنصر يكون عاملاً عند أي لحظة t.

خواص

(أ) تسمى الدالة $S(t)$ أحيانا بدالة الموثوقية، وذلك لأن $S(t)$ هي الموثوقية عند اللحظة t.

(ب) $S(t) = 1$ لكل $t \leq 0$.

(ج) $S(t) = 1 - F(t)$ حيث أن $F(t) = P(T \leq t)$ هي دالة التوزيع التراكمية للمتغير T.

(د) $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$

(هـ) الدالة $S(t)$ غير تزايدية.

الموثوقية المشروطة لعنصر ما عند اللحظة t هي:

$$S(x \mid t) = \frac{S(t+x)}{S(t)} \quad \text{بشرط أن} \quad S(t) > 0$$

بالمثل، احتمال إخفاق عنصر ما خلال فترة طولها x بشرط أن عمره t هو

$$F(x \mid t) = \frac{F(t+x) - F(t)}{S(t)}$$

$$= 1 - S(x \mid t)$$

دالة كثافة الاحتمال Probability density function:

يرمز لدالة كثافة الاحتمال بالرمز f وتعرف بالصيغة التالية:

$$f(t) = -\frac{dS(t)}{dt}$$

بشرط أن يكون الاشتقاق موجود. تمتلك هذه الدالة تفسير احتمالي وهو:

$$f(t)\,\Delta t = P(t \leq T \leq t + \Delta t)$$

لأجل القيم الصغيرة Δt . احتمال الإخفاق بين اللحظتين a ، b يعطى بالعلاقة التالية :

$$P(a \le T \le b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

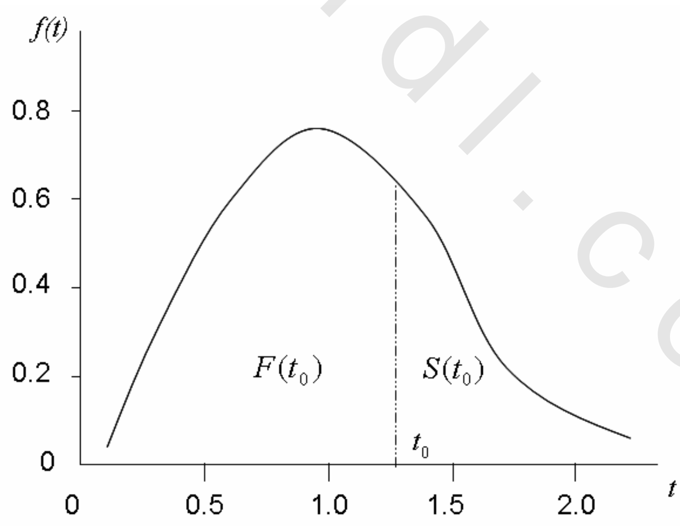
خواص

(أ) $\int_0^\infty f(t)\,dt = 1$.

(ب) $0 \le f(t)$ لكل $t \ge 0$.

(ج) $f(t) = 0$ لكل $t < 0$.

يوضح الشكل رقم (٣,١) العلاقة بين دالة الموثوقية $S(t)$ ودالة التوزيع التراكمية $F(t)$ لزمن حياة متصل. توضح المساحة على يمين الخط المستقيم $t = t_0$ قيمة $S(t_0)$ ، أما المساحة على يسار $t = t_0$ فتمثل $F(t_0)$.



الشكل رقم (٣,١). العلاقة بين دالة الموثوقية ودالة التوزيع التراكمية.

دالة الإخفاق Hazard function

يرمز لدالة الإخفاق بالرمز $r(t)$ ويمكن الحصول عليها باستخدام الاحتمال الشرطي. احتمال الإخفاق بين t ، $t+\Delta t$ هو :

$$P(t \le T \le t+\Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} f(u)\,du$$

$$= S(t) - S(t+\Delta t)$$

بشرط أن الوحدة قيد البحث تعمل حتى اللحظة t ، نحصل على :

$$P(t \le T \le t+\Delta t \mid T \ge t) = \frac{P(t \le T \le t+\Delta t)}{P(T \ge t)}$$

$$= \frac{S(t) - S(t+\Delta t)}{S(t)}$$

بقياس هذا الاحتمال الشرطي على الفترة $[t, t+\Delta t]$ بقسمة الطرف الأيمن للعلاقة السابقة على Δt ، نحصل على متوسط معدل الإخفاق التالي :

$$\frac{S(t) - S(t+\Delta t)}{S(t)\,\Delta t}$$

عندما $\Delta t \to 0$ ، فإن المقدار السابق يصبح معدل الإخفاق اللحظي ، والذي يمثل دالة الإخفاق :

$$r(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t) - S(t+\Delta t)}{S(t)\,\Delta t}$$

$$= -\frac{S'(t)}{S(t)}$$

$$= \frac{f(t)}{S(t)}, \; t \ge 0$$

ومن ثم فإن دالة الإخفاق تكون عبارة عن خارج قسمة دالة كثافة الاحتمال على دالة البقاء. باستخدام الاشتقاق السابق ، يمكن تفسير دالة الإخفاق من وجهة نظر الاحتمالات كالآتي :

$$r(t)\Delta t = P(t \le T \le t + \Delta t \mid T \ge t)$$

للقيم الصغيرة Δt ، والذي يمثل إحدى الصيغ المشروطة لتفسير دالة كثافة الاحتمال.

تفسير: من الممكن أن تكون دالة الإخفاق أكثر دالة مفضلة لتمثيل نماذج اختبارات الحياة نظراً للأسباب التالية:

- تفسيرها البديهي ككمية المخاطرة الملازمة لوحدة ما عند اللحظة t ،
- اهميتها في مقارنة طرق تغير المخاطر مع الزمن لمجتمعات عديدة من الوحدات برسم دوال الإخفاق على نفس الرسم.
- تكون حالة خاصة من دالة الشدة لعملية بواسون غير المتجانسة: تستخدم دالة الإخفاق لنمذجة وقوع حادثة واحدة (إخفاق)، بينما تستخدم دالة الشدة لنمذجة وقوع متتابعة من الحوادث مع الزمن.

يمكن أن تأخذ دالة الإخفاق أحد الأسماء التالية:

- في الموثوقية : تعرف على أنها معدل الفشل أو معدل الإخفاق.
- في علم التأمين: تعرف على أنها قوة الفناء force of mortality أو قوة الانخفاض force of decrement.
- في عملية النقطة point process ونظرية القيمة الشاذة extreme value theory : تعرف غل أنها دالة المعدل أو دالة الشدة.
- في الإحصاء الحيوي vital statistics : تعرف على أنها معدل وفاة العمر المعين age-specific death rate.
- في الاقتصاد: يعرف تبادلها بنسبة مل Mill's ratio.

خواص

(أ) $\int_0^\infty r(t)\, dt = \infty$

(ب) $r(t) \ge 0$ لكل $t \ge 0$.

دالة الإخفاق التراكمية Cumulative hazard function: نرمز إلى هذه الدالة بالرمز $R(t)$ وتعرف بالعلاقة التالية:

$$R(t)=\int_0^t r(u)\,du$$

وبملاحظة أن $r(t)=f(t)/S(t)$ ، فإن:

$$R(t)=\int_0^t \frac{f(u)}{S(u)}\,du$$

$$=-\ln S(t)$$

ومن ثم فإن:

$$S(t)=e^{-R(t)}$$

تعطي هذه المعادلة تمثيل مفيد للموثوقية كدالة في معدل الإخفاق. يمكن كتابة هذه العلاقة في الصيغة المكافئة التالية:

$$S(t)=\exp\left\{-\int_0^t r(u)\,du\right\}$$

تعطي هذه الصيغة دالة الموثوقية بدلالة دالة الإخفاق. أحياناً تسمى دالة الإخفاق التراكمية بمعدل الإخفاق المكامل.

خواص

(أ) $R(0)=0$

(ب) $\lim_{t\to\infty} R(t)=\infty$

(ج) $R(t)$ غير تناقصية.

دالة متوسط الزمن المتبقي Mean residual life function : يرمز لهذه الدالة بالرمز $L(t)$ وتعرف بالصيغة التالية:

$$L(t)=E[T-t\,|\,T\geq t],\ t\geq 0$$

من الواضح أن هذه الدالة عبارة عن متوسط زمن الحياة المتبقي $T-t$ بشرط أن الوحدة قد عاشت حتى اللحظة t.

خواص

(أ) $L(0)=E[T]$ هو متوسط زمن الحياة غير المشروط.

(ب) $L(t)\ge 0$

(ج) $L'(t)\ge -1$

(د) $\int_0^\infty \frac{dt}{L(t)}=\infty$.

لتحديد صيغة لـ $L(t)$ ، نحتاج إلى دالة كثافة الاحتمال المشروطة التالية:

$$f_{T|T\ge t}(u)=\frac{f(u)}{S(t)},\ u\ge t$$

وهذه في الحقيقة عائلة من دوال كثافة احتمال (واحدة لكل t)، ويلازم كل واحدة التوقع التالي:

$$\begin{aligned}E[T\mid T\ge t]&=\int_t^\infty u\, f_{T|T\ge t}(u)\,du\\&=\int_t^\infty \frac{u\,f(u)}{S(t)}du\end{aligned}$$

والآن:

$$\begin{aligned}L(t)&=E[T-t\mid T\ge t]\\&=\int_t^\infty \frac{(u-t)\,f(u)}{S(t)}du\\&=\frac{1}{S(t)}\int_t^\infty u\,f(u)\,du-t\end{aligned}$$

تتكافأ الخمس دوال السابقة من حيث معرفة أي دالة منهم تحدد توزيع زمن الحياة. فبمعرفة واحدة من هذه الدوال يمكن الحصول على الدوال الأربع الأخرى. يوضح الجدول رقم (٣,١) أن العلاقة بين أي دالة من الأربع دوال والدالة الخامسة.

وعلى العموم ليست هذه الخمس دوال هي الطريقة الوحيدة لتعريف توزيع المتغير العشوائي T. فمن بين الطرق الأخرى طريقة الدالة المولدة للعزوم moment generating function $E[e^{sT}]$ ، ودالة التميز characteristic function $E[e^{isT}]$ ، وتحويل ميلان Mellin transformation $E[T^s]$.

الجدول رقم (٣,١). تمثيل علاقات توزيع زمن الحياة.

	$f(t)$	$S(t)$	$r(t)$	$R(t)$	$L(t)$
$f(t)$		$\int_t^\infty f(u)\,du$	$\dfrac{f(t)}{\int_t^\infty f(u)\,du}$	$-\ln\left[\int_t^\infty f(u)\,du\right]$	$\dfrac{\int_t^\infty uf(u)\,du}{\int_t^\infty f(u)\,du}-t$
$S(t)$	$-S'(t)$		$-\dfrac{S'(t)}{S(t)}$	$-\ln S(t)$	$\dfrac{\int_t^\infty S(u)\,du}{S(u)}$
$r(t)$	$r(t)e^{-\int_0^t r(u)\,du}$	$e^{-\int_0^t r(u)\,du}$		$-\int_0^t r(u)\,du$	$\dfrac{\int_t^\infty e^{-\int_0^u r(y)\,dy}\,du}{\int_t^\infty f(u)\,du}$
$R(t)$	$R'(t)e^{-R(t)}$	$e^{-R(t)}$	$R'(t)$		$e^{R(t)}\int_t^\infty e^{-R(u)}\,du$
$L(t)$	$\dfrac{1+L'(t)}{L(t)}e^{-\int_0^t \frac{1+L'(u)}{L(u)}du}$	$e^{-\int_0^t \frac{1+L'(u)}{L(u)}du}$	$\dfrac{1+L'(t)}{L(t)}$	$\int_0^t \dfrac{1+L'(t)}{L(u)}\,du$	

(٣,٢) العزوم والكسور
Moments and Fractiles

بمجرد معرفة تمثيل توزيع زمن حياة وحدة ما ، فإنه من الشيق حساب عزم وكسر التوزيع. تستخدم العزوم والكسور كطرق مفيدة لتلخيص نموذج بقاء وحدة ما ، بالرغم من أنهما لا يحددان توزيع الحياة تحديدا تاما كالتمثيلات الخمس التي تحدثنا عنها في البند السابق. وكأمثلة لهذه المقاييس الهامة إليكم متوسط زمن البقاء $E[T]$ (متوسط الزمن حتى الفشل)، الوسيط $t_{0.5}$ ، والمئينى رقم 95 لتوزيع ما $t_{0.95}$. نتذكر أن توقع بعض الدوال في متغير عشوائي T ، ولتكن $g(T)$ ، هو :

$$E[g(T)] = \int_0^\infty g(t)\, f(t)\, dt$$

متوسط الزمن حتى الفشل Mean time to failure

أكثر المقاييس انتشارا والذي يلازم توزيع ما هو متوسطه أو العزم الأول first moment ، والذي يعرف بـ :

$$\mu = E[T] = \int_0^\infty t\, f(t)\, dt$$

باستخدام التكامل بالتجزيئ والفرضية $\lim_{t\to\infty} tS(t) = 0$ ، يمكن بسهولة الحصول على :

$$\mu = \int_0^\infty S(t)\, dt$$

يعتبر المتوسط أحد مقاييس النزعة المركزية (central tendency) أو القيمة المتوسطة التي يفترضها التوزيع ، وتسمى مركز الجاذبية (الكتلة) في الفيزياء. في الموثوقية ، يطلق على هذا المتوسط بمتوسط زمن الحياة أو متوسط الزمن حتى الفشل (باختصار م.ز.ف MTTF) للوحدات الغير قابلة للإصلاح. وللوحدات القابلة للإصلاح يسمى بمتوسط الزمن بين الإخفاقات (م.ب.ف MTBF).

مثال (٣,١)

مهندس ما قرب (اقترح) موثوقية أحد المعدات بالصيغة التالية :

$$S(t)=\begin{cases}\left(1-\frac{t}{t_0}\right)^2, & 0\le t\le t_0\\ 0, & t>t_0\end{cases}$$

(أ) حدد معدل الفشل.

(ب) هل معدل الإخفاق متناقص أم متزايد مع الزمن؟

(ج) أوجد متوسط الزمن حتى الفشل.

الحل

(أ) معدل الفشل هو :

$$\begin{aligned} r(t) &= -\frac{S'(t)}{S(t)}\\ &= \frac{\frac{2}{t_0}\left(1-\frac{t}{t_0}\right)}{\left(1-\frac{t}{t_0}\right)^2}\\ &= \frac{2}{t_0\left(1-\frac{t}{t_0}\right)},\ 0\le t<t_0 \end{aligned}$$

(ب) يتزايد معدل الإخفاق من $\frac{2}{t_0}$ عندما $t=0$ إلى ∞ عندما $t=t_0$.

(ج) متوسط الزمن حتى الفشل هو :

$$\begin{aligned} MTTF &= \int_0^{t_0}\left(1-\frac{t}{t_0}\right)^2 dt\\ &= \frac{t_0}{3} \end{aligned}$$

مقياسان آخران من مقاييس النزعة المركزية هما الوسيط median والمنوال mode. يعرف الوسيط على أنه القيمة m التي تحقق أن $S(m)=0.5$. يعرف المنوال على أنه قيمة الزمن t التي يقابلها قيمة عظمى لدالة كثافة الاحتمال $f(t)$.

تمرين (٣,١)

أوجد الوسيط والمنوال للتوزيع الذي له دالة الموثوقية المعطاة في المثال (٣,١).

العزوم العليا Higher moments

إحدى القيم التي تلازم توزيع الحياة هي تباين التوزيع ، أو عزمه الثاني حول متوسطه ، والذي يعرف بالصيغة التالية :

$$\sigma^2 = Var(T) = E\left[(T-\mu)^2\right] = E\left[T^2\right] - (E[T])^2$$

ويعتبر التباين أحد مقاييس تشتت التوزيع. يعرف الجذر التربيعي للتباين بالإنحراف المعياري وله نفس وحدة قياس المتغير العشوائي T. إحدى مشاكل استخدام التباين أو الإنحراف المعياري في قياس تشتت التوزيع هي أن هاتين الكميتين تعتمدان على وحدة القياس المستخدمة. إحدى الطرق التي يمكن أن تستخدم للتغلب على هذه المشكلة هي استخدام معامل الاختلاف coefficient of variation والمعرف بالعلاقة التالية :

$$\gamma = \frac{\sigma}{\mu}$$

والتي تكون منعدمة وحدة القياس. هناك مشكلتان تواجه مستخدم معامل الاختلاف وهما أن معامل التغاير يفترض قيما مختلفة للمجتمعات التي لها متغيرات متطابقة ومتوسطات مختلفة ، والمشكلة الأخرى هي أنه غير معرف عندما $\mu = 0$ ، بالرغم من أن هذه الحالة ليست الحالة المثلى لتوزيعات الحياة ، حيث أن متوسط زمن الحياة دائما يكون أكبر من الصفر.

أحد العزوم الأخرى الهام هو العزم المركزي القياسي الثالث standardized third central moment والذي يسمى في الغالب بالإلتواء skewness

$$\gamma_3 = E\left[\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right)^3\right]$$

والذي يستخدم كمقياس لتماثل التوزيع.

وأخيراً التفلطح kurtosis، أو العزم المركزي القياسي الرابع standardized forth central moment ويعرف بالصيغة التالية

$$\gamma_4 = E\left[\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right)^4\right]$$

والذي يستخدم كمقياس لتدبب أو لسلوك الذيل للتوزيع وهو أيضا يقيس درجة علو منحنى التوزيع أو انخفاضة بالنسبة لمنحنى التوزيع الطبيعي.

كسور التوزيع تكون عبارة عن الأزمنة التي عندها تظل نسبة محددة من الوحدات على قيد الحياة (باقية تعمل). يعرف الكسر رقم p لتوزيع ما، ويرمز له بالرمز t_p، والذي يطلق عليه أحيانا الجزئ رقم p (*p*th quantile) أو المئيني رقم p (100*p*th percentile)، على أنه حل المعادلة التالية:

$$F(t_p) = P(T \le t_p) = p$$

والتي تكافئ

$$t_p = F^{-1}(p)$$

تمرين (٣,٢)

بالعودة إلى المثال (٣,١) أوجد المقاييس التالية: معامل الاختلاف، الالتواء، التفلطخ والجزء رقم 75.

تفيد الكسور في تحليل التكلفة المناظرة للضمانات، وللتوضيح نعرض المثال التالي.

مثال (٣,٢)

يعلم مدير أحد مصانع السيارات أن توزيع زمن عمل أحد المحركات حتى أول فشل (عطل) والتي تقاد تحت شروط قيادة معتدلة يتبع توزيع وايبل بالمعالم $\lambda = 77\times10^{-7}$، $k = 1.22$، حيث أن المسافة مقاسة بالميل. أوجد فترة ضمان التي تسمح بأن 1% من المحركات ستتعطل أثناء فترة الضمان.

الحل

لحساب $t_{0.01}$: يجب مساوات دالة التوزيع التراكمية لتوزيع وايبل للقيمة 0.01 :

$$1-\exp\{-(\lambda t_{0.01})^k\}=0.01$$

بحل هذه المعادلة في $t_{0.01}$ نحصل على فترة الضمان :

$$t_{0.01}=\frac{1}{\lambda}[-\ln 0.99]^{\frac{1}{k}}=2992$$

ومن ثم فإن فترة ضمان 3000 ميل تتطلب تقريباً نسبة 1% من المحركات ستحتاج إما إلى صيانة أو الاستبدال أثناء فترة الضمان. تساعد هذه النتيجة، مع متوسط تكلفة معالجة فترة الضمان الذي تعلنه الشركة، في تحديد فترة ضمان إحدى السيارات والتي تحتوي تكلفة خدمة الصيانة أثناء فترة الضمان.

(٣,٣) فصول التوزيعات
Distribution Classes

تم تعريف العديد من فصول التوزيعات من أجل التمييز بين مجاميع التوزيعات المختلفة وذلك باستخدام خواص محددة توزيعات أزمنة حياتها. سنقدم في هذا البند أبسط وأكثر فصلين انتشاراً وهما : التوزيعات ذات معدل الإخفاق المتزايد والتوزيعات ذات معدل الإخفاق المتناقص. سنقدم في الفصل الرابع فصول أخرى من التوزيعات والعلاقات بينها.

تعريف (٣,١)

١- يوصف توزيع زمن الحياة بأنه توزيع بمعدل إخفاق متزايد م.إ.ز (IFR) إذا كانت الدالة $r(t)$ غير متناقصة.

٢- يوصف توزيع زمن الحياة بأنه توزيع بمعدل إخفاق متناقص م.إ.ت (DFR) إذا كانت الدالة $r(t)$ غير متزايدة.

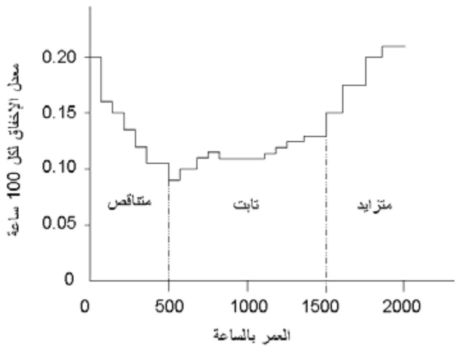
تفسير

١- دالة الإخفاق المتزايدة تكون أكثر انتشاراً، وذلك لأنه من الطبيعي أنه كلما تقادمت وحدة ما كلما ازداد احتمال تعطلها.

٢- دالة الإخفاق المتناقصة تكون أقل انتشاراً، قليل من الوحدات تتمتع بخاصية أنها كلما تقادمت تناقص احتمال إخفاقها، وكمثال توجد بعض المعادن أو الفلزات التي تشتد صلابة كلما كثر استخدامها.

يمكن بناء فصل آخر من فصول توزيعات الحياة باعتبار أن معدل الإخفاق يتناقص في البداية أثناء فترة التوهج (في فترة الاستخدام الأولى)، ثم يثبت بعد ذلك أثناء طور الحياة المفيد (فترة العطاء الطبيعية) وفي النهاية يتزايد نتيجة التقادم (تقدم العمر). يسمى مثل هذا النوع من دوال الإخفاق بدوال الإخفاق التي تأخذ شكل حوض الاستحمام bathtube-shaped failure rate .

يعرض الشكل رقم (٣,٢) توضيحاً تجريبياً لدالة إخفاق تأخذ شكل حوض الاستحمام، كامينز (1962)، يمثل المحور الرأسي معدل إخفاق تجريبي لكل 100 ساعة لنظام يولد غاز ساخن يستخدم لبدء محركات طائرة خطية معينة. خلال الـ 600 ساعة الأولى من العمل لوحظ أن معدل الإخفاق يتناقص حوالي النصف (وتعكس هذه الفترة فترة التوهج)، في الفترة من 600 ساعة عمل حتى 1400 ساعة ظل معدل الإخفاق تقريبا ثابت (والتي تعكس فترة الحياة المفيدة)، ثم بعد مرور 1400 ساعة من العمل لوحظ أن معدل الإخفاق تزايد بشكل متواصل (وتعكس هذه الفترة فترة الفناء أو فترة تقادم العمر).



الشكل رقم (٣,٢). تاريخ اخفاق معدة.

(٣,٤) نماذج أزمنة الحياة المعلمية
Parametric lifetime models

يمكن استخدام العديد من التوزيعات لنمذجة أزمنة الحياة. تحتوي بعض التوزيعات على معلمة واحدة، وتحتوي أخرى على معلمتين، ويحتوي بعضها على ثلاث معالم. سنصف في هذا الجزء بعض التوزيعات الأكثر شيوعاً في نظرية الموثوقية: التوزيع الأسي بمعلمة واحدة، وتوزيعي وايبل وجاما وكل منهما يحتوي على معلمتين.

(٣,٤,١) التوزيع الأسي Exponential distribution

من المعلوم أن التوزيع الطبيعي يلعب دوراً هاما في الإحصاء الكلاسيكي فإن التوزيع الأسي يلعب دوراً رئيساً في الموثوقية ونماذج الحياة وذلك لأنه توزيع متصل ومعدل إخفاقه ثابت. استخدم التوزيع الأسي كثيراً لنمذجة زمن حياة العناصر الإلكترونية، كما أن هذا التوزيع يكون مناسباً عندما يكون العنصر المستخدم، الذي لم يخفق، إحصائياً كالعنصر الجديد. يمكن أن نصيغ بعض الصفات التالية للتوزيع الأسي من بين العديد من صفاته:

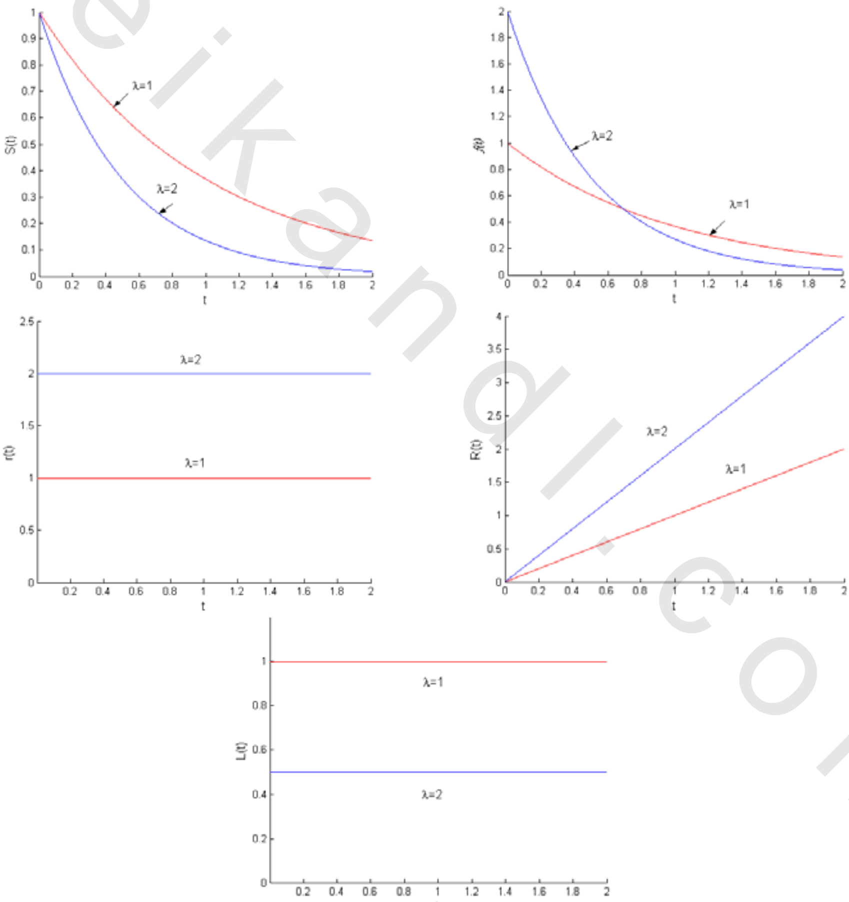
- يلعب دوراً رئيساً في الموثوقية.
- هو التوزيع الوحيد بدالة إخفاق ثابتة.

• له معلمة واحدة موجبة λ ، تسمى معدل الإخفاق، وتمثل عدد الإخفاقات في وحدة الزمن.

• الخمس ممثلات لتوزيع الحياة للتوزيع الأسي هي:

$$S(t) = e^{-\lambda t},\ f(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ r(t) = \lambda,\ R(t) = \lambda t,\ L(t) = \frac{1}{\lambda},\ t \geq 0$$

يوضح الشكل رقم (٣,٣) أشكال هذه الدوال عندما $\lambda = 1$ ، $\lambda = 2$.



الشكل رقم (٣,٣). ممثلات توزيع الحياة للتوزيع الأسي.

لاحظ أن التوزيع الأسي ينتمي إلى كل من عائلتي التوزيعات ذات معدل الإخفاق المتزايد والتوزيعات ذات التوزيع المتناقص.

مثال (٣,٣)

بفرض جهاز معدل إخفاقه ثابت $\lambda = 0.02$ في الساعة.

(أ) ما هو احتمال أنه سوف يخفق أثناء الـ 10 ساعات الأولى من بدء عمله.

(ب) بفرض أن هذا الجهاز قد عمل بنجاح خلال 100 ساعة، ما هو احتمال أنه سيخفق أثناء الـ 10 ساعات التالية؟

الحل

(أ) احتمال أنه سوف يخفق أثناء الـ 10 ساعات الأولى من بدء عمله هو

$$\begin{aligned} P(T \le 10) &= \int_0^{10} f(t)\,dt \\ &= \int_0^{10} 0.02 e^{-0.02t}\,dt \\ &= 1 - e^{-0.02(10)} = 0.181 \end{aligned}$$

(ب) احتمال أنه سيخفق أثناء الـ 10 ساعات تالية بشرط أنه قد عمل بنجاح خلال 100 ساعة هو:

$$\begin{aligned} P(T \le 110 \mid T > 100) &= \frac{P(T \le 110, T > 100)}{P(T > 100)} \\ &= \frac{P(100 < T \le 110)}{P(T > 100)} \\ &= \frac{F(110) - F(100)}{1 - F(100)} \\ &= \frac{e^{-0.02(110)} - e^{-0.02(100)}}{1 - e^{-0.02(100)}} \\ &= 1 - e^{-0.02(10)} \\ &= 0.181 \end{aligned}$$

فيما يلي بعض الخواص التي يتمتع بها التوزيع الأسي.

خواص

فيما يلي سنستخدم الرمز ~ بدلاً من "يتبع التوزيع" .

١-خاصية فقدان الذاكرة Memoryless property : إذا كان $T \sim \exp(\lambda)$ ، إذن :

$$P(T > t + s \mid T > s) = P(T > t) \quad \text{لجميع} \quad t, s \geq 0$$

البرهان

باستخدام قانون الاحتمال الشرطي نحصل على :

$$\begin{aligned} P(T > t + s \mid T > s) &= P(T > t) \\ &= \frac{P(T > t + s, T > s)}{P(T > s)} \\ &= \frac{P(T > t + s)}{P(T > s)} \\ &= \frac{\exp\{-\lambda(t + s)\}}{\exp\{-\lambda s\}} \\ &= \exp\{-\lambda t\} \\ &= P(T > t) \end{aligned}$$

لو نظرنا إلى T على أنه زمن حياة أحد الأجهزة، إذن يمكن تفسير خاصية فقدان الذاكرة كالآتي: احتمال أن هذا الجهاز سيعمل بدون تعطل على الأقل لمدة $s + t$ ساعة بشرط أنه قد عمل بالفعل بدون تعطل لمدة s ساعة هو نفس احتمال أن يعمل هذا الجهاز بدون تعطل لمدة t ساعة. بمعنى آخر، إذا عمل الجهاز لمدة s ساعة، فإن توزيع زمن الحياة المتبقي له سيكون نفس توزيع زمن الحياة الابتدائي له، بمعنى أن الجهاز لن يتذكر فترة استخدامه التي مضت وهي s ساعة.

مثال (٣,٤)

دعنا نرجع إلى السؤال (ب) في المثال (٣,٣) مرة ثانية. باستخدام خاصية فقدان الذاكرة للتوزيع الأسي، نحصل على:

$$\begin{aligned} P(T \le 110 \mid T > 100) &= 1 - P(T > 110 \mid T > 100) \\ &= 1 - P(T > 100 + 10 \mid T > 100) \\ &= 1 - P(T > 10) \\ &= P(T \le 10) \\ &= 1 - \exp\{-10\lambda\} \\ &= 1 - \exp\{-10(0.02)\} \\ &= 0.181 \end{aligned}$$

حصلنا على نفس النتيجة في المثال (٣,٣) بدون استخدام خاصية فقدان الذاكرة للتوزيع الأسي.

٢- التوزيع الأسي هو التوزيع الوحيد الذي يتمتع بخاصية فقدان الذاكرة.

البرهان: (رس (1989) صفحة 205) نفرض أن المتغير يتمتع بخاصية فقدان الذاكرة، إذن:

$$S(h+t) = S(h)S(t) \quad \text{،} \quad t,h \ge 0 \text{ لجميع}$$

حتى نبرهن على صحة هذه الخاصية نحتاج أن نبرهن على أن $S(t) = \exp\{-\lambda t\}$. لأجل أي عددين صحيحين موجبين m,n ، لدينا:

$$S\left(\tfrac{m}{n}\right) = S\left(\tfrac{m-1+1}{n}\right) = S\left(\tfrac{m-1}{n} + \tfrac{1}{n}\right) = S\left(\tfrac{m-1}{n}\right)S\left(\tfrac{1}{n}\right)$$

بالمثل فإن:

$$S\left(\tfrac{m}{n}\right) = \left[S\left(\tfrac{m-2}{n}\right)S\left(\tfrac{1}{n}\right)\right]S\left(\tfrac{1}{n}\right)$$

ومنها نحصل على:

$$S\left(\tfrac{m}{n}\right) = \left[S\left(\tfrac{1}{n}\right)\right]^m \qquad (٣,١)$$

عندما $m = n$ نحصل على :

$$S(1) = \left[S\left(\tfrac{1}{n}\right)\right]^n$$

والتي تكافئ :

$$S\left(\tfrac{1}{n}\right) = \left[S(1)\right]^{1/n} \qquad (٣,٢)$$

بالتعويض من (٣,٢) في (٣,١) نحصل على :

$$S\left(\tfrac{m}{n}\right) = \left[S(1)\right]^{m/n}$$

وحيث أن $S(t)$ دالة متصلة ، إذن يمكن استبدال m/n بـ t ، لنحصل على :

$$S(t) = \left[S(1)\right]^t$$

ولكي تكون الدالة $S(t)$ دالة بقاء مقبولة يجب اختيار $S(1)$ بشرط أن يضمن أن الدالة $S(t)$ غير تزايدية ، أي أن $S(0) = 1$ ، $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$. وبالتالي $0 \le S(t) \le 1$. وبشكل مكافئ يمكن اختيار ثابت ما $\lambda > 0$ حيث أن $S(1) = e^{-\lambda}$ ، وأن :

$$S(t) = e^{-\lambda t} \, , \, t \ge 0$$

٣- إذا كان $T \sim \exp(\lambda)$ ، إذن $U = \lambda T \sim \exp(1)$.

البرهان

لدينا $F_T(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ ، إذن :

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U \le u) \\ &= P(\lambda T \le u) \\ &= P(T \le u/\lambda) \\ &= F_T(u/\lambda) \\ &= 1 - \exp\left\{-\lambda\left(\tfrac{u}{\lambda}\right)\right\} \\ &= 1 - \exp\{-u\} \end{aligned}$$

وهذا يعني أن $U \sim \exp(1)$.

٤- إذا كان $U \sim \text{Unif}[0,1]$ ، إذن $Y = -\ln U \sim \exp(1)$.

البرهان

لدينا $F_U(u) = u,\ 0 \le u \le 1$ ، إذن لأجل $y \ge 0$ فإن:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) \\ &= P(-\ln U \le y) \\ &= P(U \ge e^{-y}) \\ &= 1 - P(U \le e^{-y}) \end{aligned}$$

ولأجل $y \ge 0$ نجد أن $0 \le e^{-y} \le 1$ إذن:

$$F_Y(y) = 1 - e^{-y}$$

وهذا يعني أن $Y \sim \exp(1)$.

٥- إذا كان $T \sim \exp(\lambda)$ ، إذن $E[T^s] = \frac{\Gamma(s+1)}{\lambda^s}, s > -1$ ، حيث أن $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$.

البرهان

لدينا:

$$E[T^s] = \int_0^\infty t^s \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

باستخدام التحويل $x = \lambda t$ ، فإن $t = x/\lambda$ ، $dt = dx/\lambda$ ، ومن ثم نحصل:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\lambda^s} \int_0^\infty x^{(s+1)-1} e^{-x}\, dx \\ &= \frac{\Gamma(s+1)}{\lambda^s} \end{aligned}$$

وهذا يكمل البرهان. لاحظ أنه لأجل القيم الصحيحة لـ s ، نحصل على:

$$E\left[T^{s}\right]=\frac{s!}{\lambda^{s}},\ s=1,2,\cdots$$

ومن ثم فإنه يمكن الحصول على التوقع والتباين في الصيغ التالية:

$$\operatorname{Var}[T]=\frac{1}{\lambda^{2}}\ \text{،}\ E[T]=\frac{1}{\lambda}$$

أيضا يمكن الحصول على معامل الاختلاف والالتواء والتفلطح كما في الصيغ التالية:

$$\gamma_4=9\ \text{،}\ \gamma_3=2\ \ \text{،}\ \gamma=1$$

٦- إذا كان $T_1,T_2,...,T_n$ عبارة عن n من المتغيرات العشوائية المستقلة وأن $T_i\sim\exp(\lambda_i)$ ، لأجل $i=1,2,...,n$ وأن $T=\min\{T_1,T_2,...,T_n\}$ إذن $T\sim\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$.

البرهان

لدينا:

$$\begin{aligned}F_T(t)&=P\left(\min\{T_1,T_2,...,T_n\}\le t\right)\\&=1-P\left(\min\{T_1,T_2,...,T_n\}>t\right)\\&=1-P\left(T_1>t,T_2>t,...,T_n>t\right)\end{aligned}$$

من استقلال $T_1,T_2,...,T_n$ ، نحصل على:

$$\begin{aligned}F_T(t)&=1-P(T_1>t)\,P(T_2>t)\cdots P(T_n>t)\\&=1-\prod_{i=1}^{n}P(T_i>t)\\&=1-\prod_{i=1}^{n}e^{-\lambda_i t}\\&=1-e^{-\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)t}\end{aligned}$$

وهذا يكمل برهان المطلوب.

٧- إذا كان $T_1, T_2, \ldots, T_n$ عبارة عن n من المتغيرات العشوائية المستقلة وأن $T_i \sim \exp(\lambda)$ ، لأجل $i = 1,2,\ldots,n$ وأن $T = 2\lambda\sum_{i=1}^{n} T_i$ إذن $T \sim \chi^2_{2n}$.

البرهان

حيث أن $T_1, T_2, \ldots, T_n$ عبارة عن n من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتطابقة وكل منهم يتبع توزيعاً أسياً بالمعلمة λ ، إذن

$$\sum_{i=1}^{n} T_i \sim \text{Erlang}(\lambda, n)$$

إذن:

$$\lambda\sum_{i=1}^{n} T_i \sim \text{Erlang}(1, n)$$

ومن ثم فإن:

$$2\lambda\sum_{i=1}^{n} T_i \sim \chi^2_{2n}$$

وهذا يكمل برهان المطلوب.

٨- إذا كان $T_1, T_2, \ldots, T_n$ عبارة عن n من المتغيرات العشوائية المستقلة وأن $T_i \sim \exp(\lambda)$ ، لأجل $i = 1,2,\ldots,n$ وأن $T_{(1)}, T_{(2)}, \ldots, T_{(n)}$ هي الإحصاءات المرتبة المناظرة لهذه المتغيرات، وأن $D_k = T_{(k)} - T_{(k-1)}$ ، $k = 1,2,\ldots,n$ ، $T_{(0)} = 0$ إذن:

(أ) $P(D_k \geq t) = e^{-(n-k+1)\lambda t}, \ t \geq 0$ لأجل $k = 1,2,\ldots,n$.

(ب) $D_1, D_2, \cdots, D_n$ مستقلين.

(ج) $E[D_k] = \dfrac{1}{\lambda(n-k+1)}$ ، $\text{Var}[D_k] = \dfrac{1}{\lambda^2(n-k+1)^2}$

البرهان: (بارلو وبروشان (١٩٨١م)، ص ٥٩)

(أ) من الخاصية ٦ ، وحيث أن $D_1 = T_{(1)} = \min\{T_1, T_2, \cdots, T_n\}$ ، إذن:

$$\begin{aligned} F_{D_1}(t) &= P(D_{(1)} \leq t) \\ &= 1 - e^{-n\lambda t}, t \geq 0 \end{aligned}$$

يمكن رؤية D_2 كأنها الإحصاءة المرتبة الأولي في عينة عشوائية بالحجم $n-1$ ، ومن ثم فإن :

$$F_{D_2}(t) = P(D_{(2)} \le t)$$
$$= 1 - e^{-(n-1)\lambda t}, t \ge 0$$

بالمثل نحصل على :

$$F_{D_k}(t) = 1 - e^{-(n-k+1)\lambda t}, t \ge 0$$

(ب) لبرهان أن $D_1, D_2, \cdots, D_n$ مستقلين، نحتاج إلى إثبات أن :

$$f_{D_1, D_2, \cdots, D_n}(d_1, d_2, \cdots, d_n) = f_{D_1}(d_1)\ f_{D_2}(d_2) \cdots f_{D_n}(d_n)$$

دالة كثافة الاحتمال المشترك لـ $T_{(1)}, T_{(2)}, ..., T_{(n)}$ هي :

$$f_{T_1, T_2, \cdots, T_n}(t_1, t_2, \cdots, t_n) = n!\lambda e^{-\lambda t_1} \cdots \lambda e^{-\lambda t_n}, 0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n$$

بتعريف التحويل ϕ والذي ينقل $T_{(1)}, T_{(2)}, ..., T_{(n)}$ إلى $D_1, D_2, \cdots, D_n$ كالآتي :

$$D_1 = T_{(1)}$$
$$D_2 = T_{(2)} - T_{(1)}$$
$$\vdots$$
$$D_n = T_{(n)} - T_{(n-1)}$$

إذن معكوس التحويل ϕ^{-1}

$$T_{(1)} = D_1$$
$$T_{(2)} = D_2 + D_1$$
$$\vdots$$
$$T_{(n)} = D_n + D_{n-1} + \cdots + D_1$$

وهو تحويل واحد إلى واحد من $A=\{T_{(1)},\ldots,T_{(n)}\mid 0\le T_{(1)}\le\ldots\le T_{(n)}\}$ إلى $B=\{D_1,\ldots,D_n\mid D_i\ge 0, i=1,\ldots,n\}$ وأن جاكوبي $|J|=1$ ، ومن ثم فإن دالة كثافة الاحتمال المشترك لـ هي :

$$\begin{aligned}
f_{D_1,D_2,\cdots,D_n}(d_1,d_2,\cdots,d_n) &= f_{T_{(1)},\ldots,T_{(n)}}(\phi^{-1}(d_1,d_2,\cdots,d_n))\,|J| \\
&= n!\,\lambda^n\, e^{-\lambda d_1}\, e^{-\lambda(d_1+d_2)}\cdots e^{-\lambda(d_1+d_2+\ldots+d_n)} \\
&= n!\,\lambda^n\, e^{-\lambda(d_1+(n-1)d_2+\ldots+d_n)} \\
&= \left(n\lambda e^{-n\lambda d_1}\right)\left((n-1)\lambda e^{-(n-1)\lambda d_2}\right)\cdots\left(e^{-\lambda d_n}\right) \\
&= f_{D_1}(d_1)\ f_{D_2}(d_2)\cdots f_{D_n}(d_n)
\end{aligned}$$

لأجل $d_i\ge 0$ ، $i=1,2,\ldots,n$ ، ومن ثم فإن $D_1,D_2,\cdots,D_n$ مستقلين.

(ج) يمكن الوصول للبرهان باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ مع العلاقتين التاليين :

$$E[D_k]=\int_0^\infty t f_{D_k}(t)\,dt \text{ ،}$$
$$E[D_k^2]=\int_0^\infty t^2 f_{D_k}(t)\,dt$$

٩- إذا كان $T_1,T_2,\ldots,T_n$ عبارة عن n من المتغيرات العشوائية المستقلة وأن $T_i\sim\exp(\lambda)$ ، لأجل $i=1,2,\ldots,n$ وأن $T_{(r)}$ هي الإحصاءات المرتبة رقم r ، إذن :

$$E[T_{(r)}]=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\lambda(n-k+1)} \text{ ،} \quad \mathrm{Var}[T_{(r)}]=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\lambda^2(n-k+1)^2}$$

البرهان

حيث أن $T_{(r)}=\sum_{i=1}^{r}D_i$ ، إذن :

$$E[T_{(r)}]=E\left[\sum_{k=1}^{r}D_k\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{r} E[D_k]$$
$$= \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\lambda(n-k+1)}$$

بالمثل:

$$\mathrm{Var}[T_{(r)}] = \mathrm{Var}\left[\sum_{k=1}^{r} D_k\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Var}[D_k]$$
$$= \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\lambda^2 (n-k+1)^2}$$

١٠- إذا كان $T_1, T_2, \ldots, T_n$ عبارة عن n من المتغيرات العشوائية المستقلة وأن $T_i \sim \exp(\lambda)$ يشير إلى زمن الوصول الداخلي لعملية نقطة point process، إذن عدد الحوادث التي تقع في الفترة $[0,t)$ يتتع توزيع بواسون بالمعلمة λt.

البرهان

حيث أن الوصول الأول يحدث عند اللحظة T_1، والوصول الثاني يحدث عند اللحظة $T_1 + T_2$، ... إلخ، إذن زمن الوصول رقم n $T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ يتبع توزيع إيرلنج بالمعلمتين n, λ بدالة كثافة الاحتمال التالية:

$$f_{T_1+T_2+\cdots+T_n}(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda t}, t \ge 0$$

ودالة البقاء:

$$S_{T_1+T_2+\cdots+T_n}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^{k}}{k!} \lambda e^{-\lambda t}, t \ge 0$$

إذا كان N هو عدد الوصول في الفترة $[0,t)$، إذن:

$$\begin{aligned}P(N=n) &= P(T_1+T_2+\cdots+T_n < t \le T_1+T_2+\cdots+T_{n+1})\\ &= P(T_1+T_2+\cdots+T_{n+1}\ge t)-P(T_1+T_2+\cdots+T_n > t)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\lambda e^{-\lambda t}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\lambda e^{-\lambda t}\\ &= \frac{(\lambda t)^n}{n!}\lambda e^{-\lambda t}, n=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

وهذا يعني أن N يتبع توزيع بواسون بالمعلمة λt.

١١- إذا كان $T \sim \exp(1)$ ، فإن $Y=\ln T$ يتبع توزيع بالقيمة الشاذة extreme value distribution بدالة البقاء

$$S_Y(y)=e^{-e^y}, -\infty < y < \infty$$

البرهان

بفرض أن $S_T(t)$ هي دالة البقاء للمتغير العشوائي T ، إذن دالة البقاء للمتغير العشوائي Y تكون:

$$\begin{aligned}S_Y(y) &= P(Y>y)\\ &= P(\ln T > y)\\ &= P(T>e^y)\\ &= S_T(e^y)\\ &= e^{-e^y}, -\infty<y<\infty\end{aligned}$$

التوزيع الأسي المزاح Shifted exponential distribution: التوزيع الأسي المزاح هو توزيع أسي يبدء عند t_0 ، أي أن دالة كثافة احتماله هي:

$$f(t;\beta,t_0)=\begin{cases}0, & t\le t_0,\\ \frac{1}{\beta}e^{-(t-t_0)/\beta}, & t>t_0.\end{cases}$$

تسمى القيمة t_0 بمعلمة الموضع وتأخذ قيماً غير سالبة. يُناسب هذا التوزيع النماذج التي تصف زمن حياة الوحدات التي لا تخفق قبل زمن محدد t_0، ومعدل إخفاقها يكون ثابتاً لجميع قيم t التي تحقق أن $t \geq t_0$. متوسط زمن الحياة لهذا التوزيع هو $\mu = t_0 + \beta$ والانحراف المعياري هو $\sigma = \beta$.

(٣,٤,٢) توزيع وايبل Weibull distribution

التوزيع الأسي يكون محدوداً في التطبيقات وذلك بسبب خاصية فقدان الذاكرة. إضافة إلى ذلك فإن ثبوت معدل الإخفاق في التوزيع الأسي تضع قيداً آخر مما يجعله غير مناسب لوصف العديد من النماذج التي لا يكون فيه معدل الإخفاق ثابت. توزيع وايبل يعمم التوزيع الأسي مما يجعله واسع الانتشار في نظرية الموثوقية ويستطيع تمثيل العديد من نماذج الحياة التي يكون فيها معدل الإخفاق مقداراً ثابتاً، أو متزايد مع الزمن أو متناقص مع الزمن. المثلات الأربع الأولي لتوزيع وايبل تأخذ الأشكال التالية:

$$S(t) = e^{-(\lambda t)^{\alpha}},\ f(t) = \alpha\lambda\,(\lambda t)^{\alpha-1}\,e^{-(\lambda t)^{\alpha}},$$
$$r(t) = \alpha\lambda\,(\lambda t)^{\alpha-1},\ R(t) = (\lambda t)^{\alpha},\ t \geq 0$$

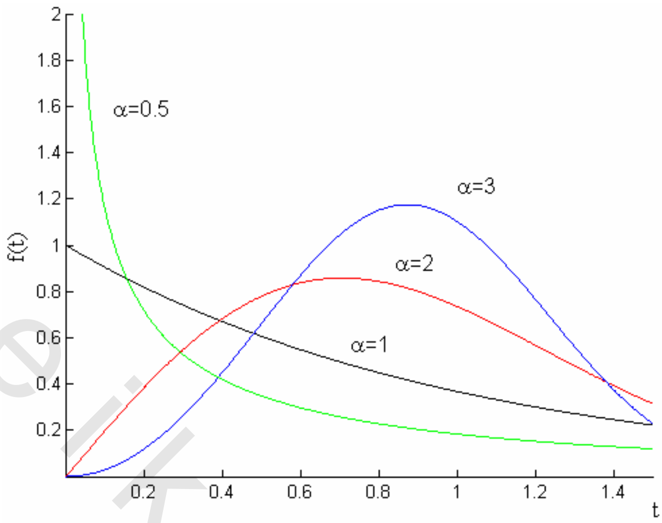
حيث أن $\lambda > 0$ ، $\alpha > 0$ ويسميان على الترتيب بمعلمة المقياس ومعلمة الشكل. متوسط زمن الحياة المتبقي ليس له صيغة مغلقة بسيطة كباقي المثلات الأربعة السابقة. يمكن توضيح أنه يمكن كتابته في الصيغة التالية:

$$L(t) = \frac{e^{(\lambda t)^{\alpha}}}{\lambda\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left[1 - I\left(\frac{1}{\alpha},(\lambda t)^{\alpha}\right)\right],$$

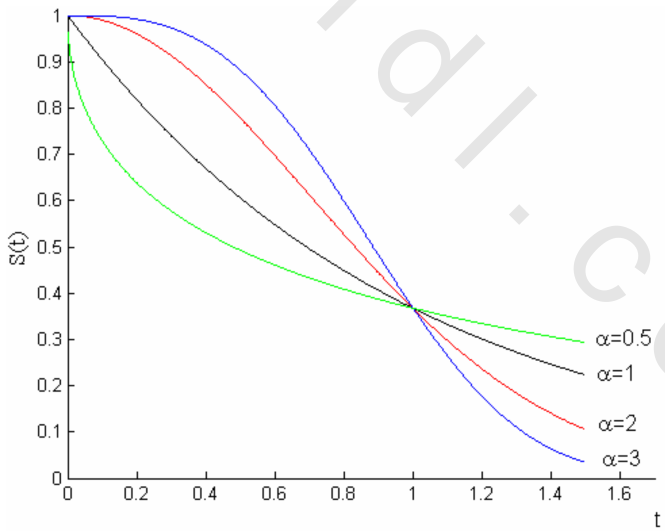
حيث:

$$I(y,x) = \frac{1}{\Gamma(y)}\int_0^x u^{y-1}\,e^{-u}\,du$$

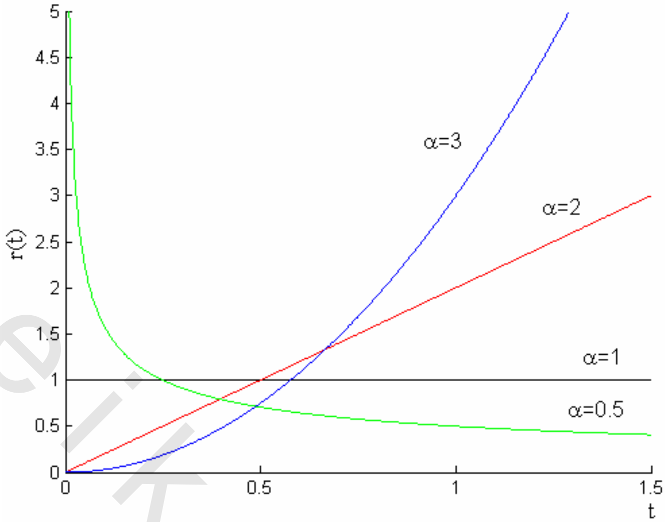
هي دالة جاما غير الكاملة بـ $x, y \geq 0$. يوضح الشكل رقم (٣,٤) أشكال هذه الدوال عندما $\lambda = 1$ وقيم مختلفة لـ α.



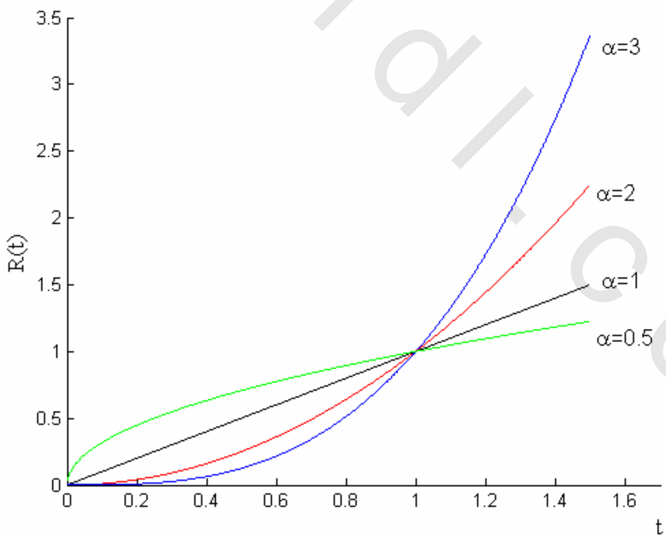
الشكل رقم (٣,٤ أ). دالة كثافة الاحتمال.



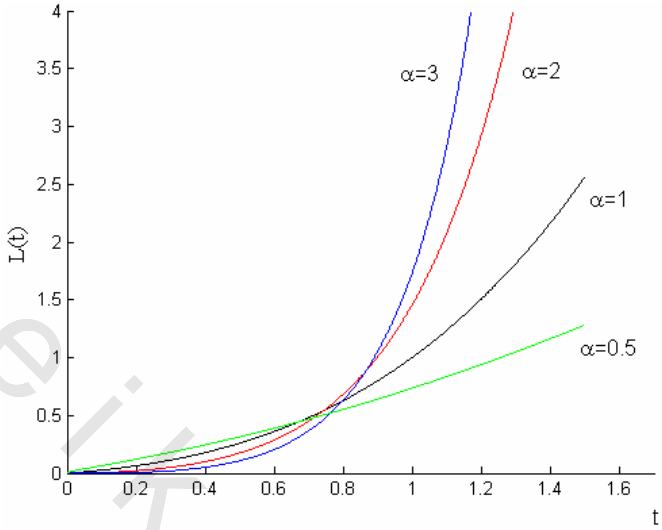
الشكل رقم (٣,٤ ب). دالة البقاء.



الشكل رقم (٣,٤ ج). دالة الإخفاق.



الشكل رقم (٣,٤ د). دالة الإخفاق التراكمي.



الشكل رقم (٣,٤ هـ). دالة متوسط الزمن المتبقي.

الشكل رقم (٣,٤). ممثلات توزيع الحياة لتوزيع وايبل.

تتقارب دالة الإخفاق إلى الصفر من اللانهاية وذلك عندما تكون $\alpha < 1$ ، وتأخذ قيمة ثابتة عندما $\alpha = 1$ (حالة التوزيع الأسي)، وتتزايد من الصفر عندما $\alpha > 1$.

أحد الحالات الخاصة تظهر عندما $\alpha = 2$ والتي تعطي توزيعا يعرف بتوزيع رالي Rayleigh distribution، ودالة إخفاق هذا التوزيع هي $r(t) = 2\lambda t$ ، وهي عبارة عن خط مستقيم ميله 2λ .

عندما $3 < \alpha < 4$ ، فإن دالة كثافة الاحتمال تشبه دالة كثافة احتمال التوزيع الطبيعي ويتساوى المنوال مع الوسيط عندما $\alpha = 3.26$.

باستخدام التعبير:

$$E\left[T^{r}\right] = \frac{r}{\alpha\,\lambda^{r}}\,\Gamma\left(\frac{r}{\alpha}\right), r = 1,2,\cdots$$

فإن المتوسط والتباين يكونان :

$$\mu = E[T] = \frac{1}{\alpha\lambda}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[T^2] - (E[T])^2 \\ &= \frac{2}{\alpha\lambda^2}\,\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \left[\frac{1}{\alpha\lambda}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2 \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\left\{\frac{2}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \left[\frac{1}{\alpha}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\}\end{aligned}$$

وأيضاً يمكن الحصول على معامل الاختلاف والالتواء والتفلطح كما في الصيغ التالية :

$$\gamma = \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

$$\gamma_3 = \frac{\frac{3}{\alpha}\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) - \frac{6}{\alpha^2}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) + 2\left[\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^3}{\left\{\frac{2}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \left[\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\}^{3/2}}$$

$$\gamma_4 = \frac{\frac{4}{\alpha}\Gamma\left(\frac{4}{\alpha}\right) - \frac{12}{\alpha^2}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) + \frac{12}{\alpha^3}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{3}{\alpha^3}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^4}{\left\{\frac{2}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \left[\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\}^2}$$

لاحظ أن توزيع وايبل يكون :

- م.إ.ز (IFR) إذا كان $\alpha > 1$.
- م.إ.ص (DFR) إذا كان $\alpha < 1$.
- م.إ.ث (CFR) إذا كان $\alpha = 1$ ، في هذه الحالة يتطابق توزيع وايبل مع التوزيع الأسي.

مثال (٣,٥)

يمكن لتوزيع وايبل بالمعلمتين $\frac{1}{\lambda} = 108$ عام، $\alpha = \frac{1}{2}$ أن يصف جهاز ما بمعدل إخفاق متناقص. ما هو زمن حياة الجهاز الذي يضمن موثوقية 0.90؟

الحل

لدينا :

$$\alpha = 1/2 \ ، \lambda = 1/180 \ ، S(t) = e^{-(\lambda t)^{\alpha}}$$

والمطلوب هو حساب قيمة t التي تضمن أن $S(t) = 0.90$. باستخدام دالة الموثوقية يمكن الحصول على الصيغة التالية :

$$-(\lambda t)^{\alpha} = \ln S(t)$$

ومن ثم فإن :

$$t = \frac{1}{\lambda}\left[-\ln S(t)\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

إذن الزمن المطلوب هو :

$$t = 180\left[-\ln 0.90\right]^{2} = 2.00 \text{ عام}$$

مثال (٣,٦)

زمن حياة زنبرك من نوع معين، يستخدم تحت شروط عمل معلومة، يتبع توزيع وايبل بالمعلمتين $\lambda = 0.0014$ ، $\alpha = 1.28$ ، حيث الزمن مقاس بالساعة.

أ) أوجد متوسط زمن حياة الزنبرك؟

ب) ما هو احتمال عمل الزنبرك لمدة 500 ساعة؟

ج) إذا علم أن الزنبرك قد عمل لمدة 200 ساعة بدون تعطل فما هو احتمال أن يعمل لمدة 500 ساعة أخرى بدون تعطل؟

الحل

أ) متوسط زمن الحياة هو :

$$\mu = E[T] = \frac{1}{(0.0014)(1.28)}\,\Gamma\left(\frac{1}{1.28}\right) = 661.8 \text{ ساعة}$$

ب) احتمال عمل الزنبرك لمدة 500 ساعة هو :

$$S(500) = e^{-[(0.0014)(500)]^{1.28}} = 0.531$$

ج) لحساب الاحتمال الشرطي بأن يعمل الزنبرك لمدة 500 ساعة أخرى بدون تعطل بشرط أنه قد عمل لمدة 200 ساعة، نحتاج إلى دالة الموثوقية الشرطية. دالة الموثوقية الشرطية للزنبرك الذي عمل لمدة 200 ساعة هي

$$S_{T|T\geq 200}(t)=\frac{S(t)}{S(200)},\ t\geq 200$$

ومن ثم فإن الاحتمال الشرطي المطلوب هو

$$S_{T|T\geq 200}(700)=\frac{S(700)}{S(200)}=\frac{e^{-[(0.0014)(700)]^{1.28}}}{e^{-[(0.0014)(200)]^{1.28}}}$$

$$=0.459$$

ليس من المفاجئ أن احتمال أن يعمل الزنبرك لفترة طولها 500 ساعة بدون تعطل بعد أن عمل لمدة 200 ساعة أقل من احتمال أن يعمل زنبرك جديد لفترة طولها 500 ساعة بدون تعطل، وذلك لأن زمن حياة الزنبرك يتبع توزيع وايبل بالمعلمتين $\lambda=0.0014$ ، $\alpha=1.28$ ، وحيث أن $\alpha>1$ ، إذن معدل إخفاق الزنبرك يتزايد مع الزمن.

عندما نريد استخدام بيانات من توزيع وايبل لتقدير معالم التوزيع تواجهنا بعض الصعوبات في استخدام طرق عددية لحل بعض المعادلات غير الخطية في معالم التوزيع، مما نحتاج وقتها لحساب لوغاريثم البيانات لتجنب بعض هذه الصعوبات. إذا كان T متغير عشوائي يتبع توزيع وايبل بالمعلمتين λ,α ، إذن المتغير العشوائي $Y=\ln T$ يتبع التوزيع ذي القيمة المتطرفة. دالة بقاء التوزيع ذي القيمة المتطرفة هي :

$$S(y)=\exp\left\{-\exp\left\{\frac{y-u}{b}\right\}\right\},\ -\infty<y<\infty,$$

حيث $u=-\ln\lambda$ ، $b=1/\alpha$ يكونان معلمتي الموضع والمقياس لهذا التوزيع.

يتمتع توزيع ويبل بخاصية إعادة الإنتاج الذاتي self-reproducing property. إذا كان $T_1,T_2,\cdots,T_n$ عينة عشوائية بسيطة من توزيع وايبل

بنفس معلمة الشكل، إذن أصغر قيمة في هذه العينة تتبع توزيع وايبل بنفس معلمة الشكل ولكن بمعلمة المقياس عبارة عن مجموع معالم المقياس لعناصر العينة. أي أن $T_i \sim \text{Weibull}(\lambda_i, \alpha)$ ، لكل $i = 1,2,\cdots,n$ إذن $\min\{T_1, T_2, \cdots, T_n\} \sim \text{Weibull}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \alpha)$.

(٣,٤,٣) توزيع جاما Gamma distribution

يعتبر توزيع جاما هو ثاني أهم توزيع يعمم التوزيع الأسي. دالة كثافة توزيع جاما هي

$$f(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} (\lambda t)^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \; t \geq 0$$

حيث أن λ, α يكونان موجبان ويسميان على الترتيب بمعلمتي الشكل والمقياس. عندما $\alpha = 1$ فإن توزيع جاما يؤول إلي التوزيع الأسي. دالة التوزيع التراكمية لتوزيع جاما بالمعلمتين λ, α هي:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \lambda (\lambda u)^{\alpha-1} e^{-\lambda u} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\lambda t} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &= I(\alpha, \lambda t) \end{aligned}$$

حيث أن $I(x, y)$ هي دالة جاما غير الكاملة والتي تم تعريفها من قبل في البند السابق. كما هو واضح أن دالة التوزيع التراكمية لتوزيع جاما ليس لها صيغة بسيطة مغلقة يمكن منها حساب قيمة الدالة عند أي لحظة، لذا يجب استخدام طرق عددية لحساب دالة التوزيع التراكمية لهذا التوزيع، وهذه إحدى النقاط السلبية لتوزيع جاما. أيضا ممثلات التوزيع لتوزيع جاما ليس لهم صيغ مغلقة ومن ثم فإنه يمكن حسابهم عددياً فقط بناءاً على العلاقات التالية، لأجل $t \geq 0$:

$$S(t) = 1 - I(\alpha, \lambda t), \; R(t) = -\ln S(t), \; L(t) = \frac{1}{S(t)} \int_t^{\infty} S(u)\, du$$

يمكن الحصول على دالة الإخفاق كالآتي :

$$r(t)=\frac{f(t)}{S(t)}$$

$$=\frac{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha}\,t^{\alpha-1}\,e^{-\lambda t}}{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{\infty}\lambda^{\alpha}\,u^{\alpha-1}\,e^{-\lambda u}du}$$

$$=\frac{t^{\alpha-1}\,e^{-\lambda t}}{\int_t^{\infty}u^{\alpha-1}\,e^{-\lambda u}du}$$

$$=\frac{1}{\int_t^{\infty}\frac{u^{\alpha-1}\,e^{-\lambda u}}{t^{\alpha-1}\,e^{-\lambda t}}du}$$

$$=\frac{1}{\int_t^{\infty}\left(\frac{u}{t}\right)^{\alpha-1}e^{-\lambda(u-t)}\,du}$$

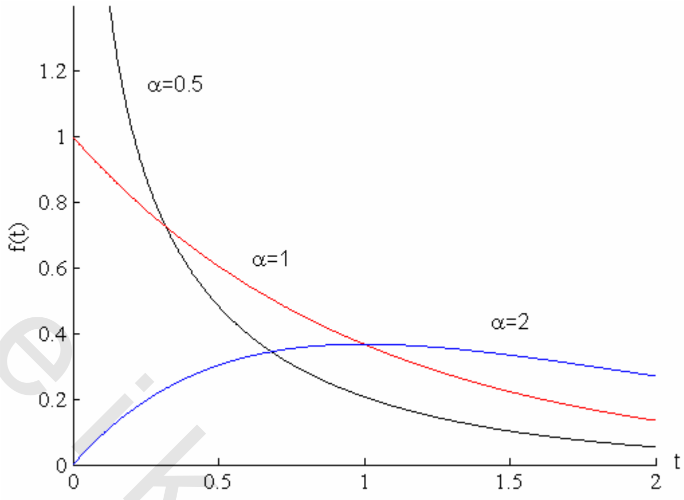
بأخذ $y=u-t$ نحصل على

$$r(t)=\frac{1}{\int_0^{\infty}\left(1+\frac{y}{t}\right)^{\alpha-1}e^{-\lambda y}\,dy}$$

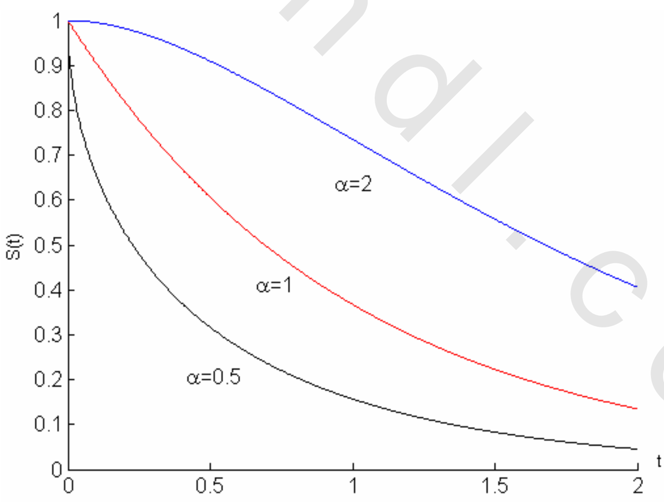
ومن ثم فإن توزيع جاما يكون :

- م.إ.ز (IFR) إذا كان $\alpha>1$.
- م.إ.ص (DFR) إذا كان $\alpha<1$.
- م.إ.ث (CFR) إذا كان $\alpha=1$ ، في هذه الحالة يتطابق توزيع جاما مع التوزيع الأسي.

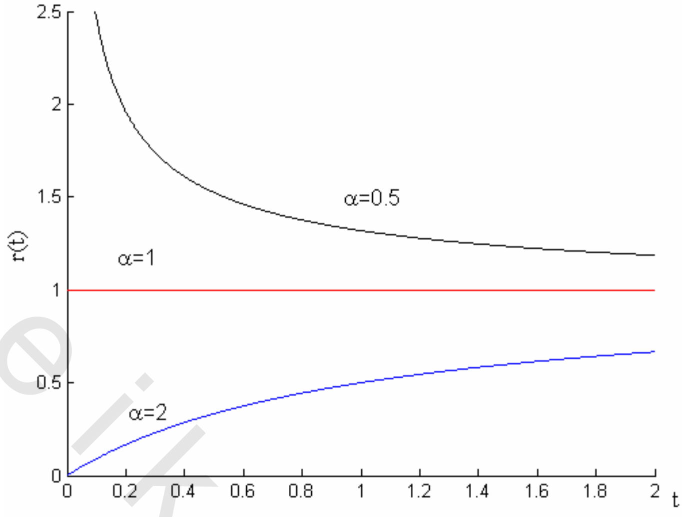
يوضح الشكل رقم (٣,٥) أشكال ممثلات التوزيع لتوزيع جاما عندما $\lambda=1$ وقيم مختلفة لـ α. نلاحظ أنه من الصعب التمييز بين توزيعي وايبل وجاما من حيث شكل دالة كثافة الاحتمال. يظهر الفرق بين توزيعي وايبل وجاما عندما نقارن بين دالتي معدل الإخفاق لكل منهما وخصوصا عند قيم t الكبيرة.



الشكل رقم (٣,٥ أ). دالة كثافة الاحتمال.



الشكل رقم (٣,٥ ب). دالة البقاء.



الشكل رقم (٣,٥ ج). دالة الإخفاق.

الشكل رقم (٣,٥). ممثلات توزيع الحياة لتوزيع جاما.

باستخدام التعبير:

$$E\left[T^r\right]=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+r-1)}{\lambda^r},$$

نحصل على:

$$\gamma_4=3+\frac{6}{\alpha} \text{ ، } \gamma_3=2\alpha^{1/2} \text{ ، } \gamma=\alpha^{1/2} \text{ ، } \operatorname{Var}[T]=\frac{\alpha}{\lambda^2} \text{ ، } E[T]=\frac{\alpha}{\lambda}$$

حالات خاصة: نعرض الحالات الخاصة الثلاث التالية من بين الخواص الشيقة لتوزيع جاما:

- عندما $\alpha=n$ عدد صحيح موجب، فإن توزيع جاما يؤول إلى توزيع إيرلنج. وذلك لأن إذا كان $T_1,T_2,\cdots,T_n \sim \exp(\lambda)$ ، إذن: $\sum_{i=1}^{n} T_i \sim \operatorname{Erlang}(\lambda,n)$. في هذه الحالة، لأجل $t \geq 0$ ،

$$f(t) = \frac{\lambda}{(n-1)!}(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t} , t \geq 0$$

$$S(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

• عندما $\lambda = \frac{1}{2}$ ، $\alpha = \frac{n}{2}$ ، حيث n عدد صحيح موجب، فإن توزيع جاما يؤول إلى توزيع مربع كاي بعدد n درجة حرية، ويرمز له بالرمز χ_n^2 .

• باستخدام الرمز $G(\kappa, \beta)$ ليشير إلى متغير عشوائي يتبع توزيع إيرلنج بالمعلمتين κ ، β . نلاحظ أن المتغير العشوائي $X = \left[G(\kappa, \beta)\right]^{1/2}$ يتبع توزيع يسمى بتوزيع رالي Rayleigh. دالة كثافة احتمال توزيع رالي تأخذ الصورة التالية :

$$f(t) = t\, e^{-t^2/2} , t \geq 0$$

(٣,٥) توزيعات أزمنة حياة الأنظمة المتماسكة

Lifetime distribution of coherent system

جميع المناقشات التي تناولناها سابقاً حول ممثلات التوزيع الخمس $S(t)$ ، $f(t)$ ، $r(t)$ ، $R(t)$ ، $L(t)$ تتعلق بزمن حياة وحدة ما. أما الآن سنفترض نظام مكون من العديد من الوحدات. عموما دالة البقاء تعتمد على الزمن وتعتبر تعميما للموثوقية المقدمة في الفصل الثاني.

نظرية (٣,١)

بفرض نظام مكون من n عنصر مستقل بدوال الموثوقية $S_1(t)$ ، $S_2(t)$ ، ... ، $S_n(t)$. إذن :

١- دالة موثوقية نظام توالي هي :

$$S_S(t) = \prod_{i=1}^{n} S_i(t)$$

٢- دالة موثوقية نظام توازي هي :

$$S_S(t)=\coprod_{i=1}^{n} S_i(t)$$

البرهان

بفرض أن :

T : زمن حياة النظام.

T_i : زمن حياة العنصر رقم i.

إذن :

١- بالمثل، بالنسبة للنظام التوالي لدينا $T=\min\{T_1,T_2,\cdots,T_n\}$ ،

$$\begin{aligned} S_S(t) &= P(T>t) \\ &= P(\min\{T_1,T_2,\cdots,T_n\}>t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(T_i>t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \{1-F_i(t)\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} S_i(t) \end{aligned}$$

٢- بالمثل، بالنسبة للنظام التوازي لدينا $T=\max\{T_1,T_2,\cdots,T_n\}$ ،

$$\begin{aligned} F_S(t) &= P(T\le t) \\ &= P(\max\{T_1,T_2,\cdots,T_n\}\le t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(T_i\le t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} F_i(t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \{1-S_i(t)\} \end{aligned}$$

ومن ثم فإن:

$$S_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\{1 - S_i(t)\}$$
$$= \coprod_{i=1}^{n} S_i(t)$$

مثال (٣,٧)

بفرض نظام توالي مكون من عنصرين، وأن دالة إخفاق العنصرين هما:

$$t \ge 0 \;،\; r_2(t) = 2 \;،\; r_1(t) = 1$$

أوجد دالة البقاء ودالة الإخفاق لزمن حياة النظام.

الحل

دالتي بقاء العنصرين هما:

$$t \ge 0 \;،\; S_2(t) = e^{-2t} \;،\; S_1(t) = e^{-t}$$

وبالتالي فإن دالة بقاء النظام هي:

$$S_S(t) = S_1(t)\,S_2(t)$$
$$= e^{-t}\,e^{-2t}$$
$$= e^{-3t}$$

ومن ثم فإن دالة إخفاق النظام هي

$$t \ge 0 \;،\; r(t) = 3$$

من هذا المثال، نلاحظ أن عناصر النظام تتبع توزيع أسي بالمعلمتين $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = 2$ وزمن حياة النظام يتبع توزيع أسي بالمعلمة $\lambda = 3$.

مثال (٣,٨)

بفرض نظام توازي مكون من عنصرين، وأن دالتي إخفاقهما هما:

$$t \ge 0 \;،\; r_2(t) = 2 \;،\; r_1(t) = 1$$

أوجد دالة البقاء، ودالة الإخفاق لزمن حياة النظام، ومتوسط زمن حياة النظام.

الحل

دالتي بقاء العنصرين هما :

$$S_1(t)=e^{-t} \text{ ،} \quad S_2(t)=e^{-2t} \text{ ،} \quad t\ge 0$$

وبالتالي فإن دالة بقاء النظام هي :

$$\begin{aligned} S_P(t) &= 1-[1-S_1(t)][1-S_2(t)] \\ &= 1-[1-e^{-t}][1-e^{-2t}] \\ &= e^{-t}+e^{-2t}-e^{-3t},\ t\ge 0. \end{aligned}$$

يمكن الحصول على دالة إخفاق النظام كالآتي :

$$\begin{aligned} r(t) &= -\frac{S'_P(t)}{S_P(t)} \\ &= \frac{e^{-t}+2e^{-2t}-3e^{-3t}}{e^{-t}+e^{-2t}-e^{-3t}},\ t\ge 0 \end{aligned}$$

يمكن الحصول على متوسط زمن حياة النظام كالآتي :

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^\infty S_P(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty \left(e^{-t}+e^{-2t}-e^{-3t}\right)dt \\ &= 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

نلاحظ أن متوسط زمن حياة عناصر النظام هي $\mu_1=1/\lambda_1=1$ ، $\mu_2=1/\lambda_2=1/2$ ، أما متوسط زمن حياة النظام هو $\mu=7/6$ ، وهذا يعني أن متوسط زمن حياة النظام أكبر من متوسط زمن حياة أفضل عنصر من عناصره.

مثال (٣,٩)

بفرض أن أزمنة حياة ثلاثة عناصر تتبع التوزيع الأسي بالمتوسطات (بآلاف الساعات) التالية :

$$\mu_3 = 4.0 \ ، \ \mu_2 = 2.5 \ ، \ \mu_1 = 2.0$$

دوال موثوقية هذه العناصر هي :

$$t \geq 0 \ ، S_3(t) = e^{-0.25t} \ ، \ S_2(t) = e^{-0.4t} \ ، S_1(t) = e^{-0.5t}$$

بفرض أن هذه العناصر الثلاث تعمل بشكل مستقل. إذن دالة موثوقية الأنظمة المكونة من هذه العناصر في حالة التوالي والتوازي على الترتيب هما :

$$S_S(t) = S_1(t)\,S_2(t)\,S_3(t)$$
$$= e^{-1.15t} \,,\ t \geq 0$$
$$S_P(t) = 1 - \left[1 - S_1(t)\right]\left[1 - S_2(t)\right]\left[1 - S_3(t)\right]$$
$$= 1 - \left[1 - e^{-0.5t}\right]\left[1 - e^{-0.4t}\right]\left[1 - e^{-0.25t}\right]$$

احتمال أن النظام التوالي سيعمل على الأقل 1000 ساعة هو :

$$S_S(1) = e^{-1.15} = 0.32$$

أما احتمال أن يعمل النظام التوازي على الأقل 1000 ساعة هو :

$$S_P(1) = 1 - \left[1 - e^{-0.5}\right]\left[1 - e^{-0.4}\right]\left[1 - e^{-0.25}\right]$$
$$= 0.97$$

يوجد العديد من الأنظمة التي تتكون من أنظمة جزئية توالي وأنظمة جزئية توازي. يمكن الحصول على دالة موثوقية هذه الأنظمة بتكرار بتطبيق نتيجة النظرية (٣,١)، كما سنوضح في المثال التالي.

مثال (٣,١٠)

بفرض الثلاث عناصر المقدمة في المثال (٣,٩) تم توصيلهم ليكونوا نظام مكون من ثلاث عناصر مستقلة كما هو موضح بالشكل رقم (٣,٦).

يكون العنصران 1 ، 2 نظام جزئي توازي بدالة الموثوقية التالية :

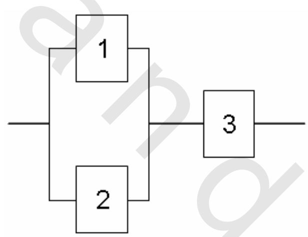
$$S_{12}(t) = S_1(t) \vee S_2(t)$$
$$= 1 - \left(1 - e^{-0.5t}\right)\left(1 - e^{-0.4t}\right)$$

يتصل النظام الجزئي السابق على التوالي من العنصر 3 ليكون النظام. ومن ثم فإن موثوقية النظام هي :

$$S(t) = S_{12}(t)\, S_3(t)$$
$$= \left\{1 - \left(1 - e^{-0.5t}\right)\left(1 - e^{-0.4t}\right)\right\} e^{-0.25t}$$

موثوقية النظام بعد 1000 ساعة هي :

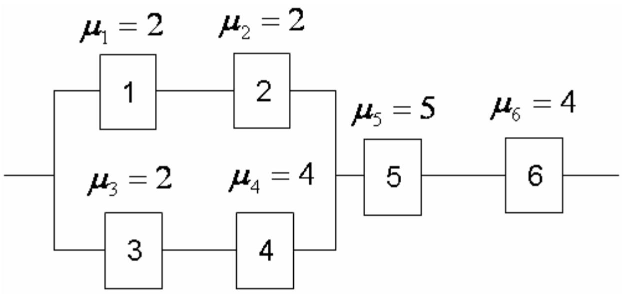
$$S(1) = 0.68$$



الشكل رقم (٣,٦). نظام مكون من أنظمة توالي وتوازي جزئية.

مثال (٣,١١)

نظام مكون من 6 عناصر مستقلة متصلة معاً كما هو موضح بالشكل رقم (٣,٦). بفرض أن أزمنة حياة العناصر مقاسه بآلاف الساعات وتتبع توزيعات أسية بالمتوسطات μ_i ، $i = 1,2,\ldots,6$ ، الموضحة بالشكل.



الشكل رقم (٣,٧). نظام المثال (٣,١١).

نلاحظ أن العنصرين 1 ، 2 يكونان نظام جزئي توالي بدالة الموثوقية التالية :

$$\begin{aligned} S_{12}(t) &= S_1(t)\,S_2(t) \\ &= e^{-t} \end{aligned}$$

أما العنصران 3 ، 4 يكونان نظام جزئي توالي بدالة الموثوقية التالية :

$$\begin{aligned} S_{34}(t) &= S_3(t)\,S_4(t) \\ &= e^{-3t/4} \end{aligned}$$

وحيث أن النظام الجزئي المكون من العنصرين 1 ، 2 يكون متصلاُ على التوازي مع النظام الجزئي المكون من العنصرين 3، 4، إذن موثوقية العناصر الأربع 1 ، 2، 3، 4 هي :

$$\begin{aligned} S_{1234}(t) &= 1-\left[1-S_{12}(t)\right]\left[1-S_{34}(t)\right] \\ &= 1-\left[1-e^{-t}\right]\left[1-e^{-3t/4}\right] \end{aligned}$$

تتصل هذه العناصر الأربع على التوالي مع العنصرين 5 ، 6، وبالتالي فإن موثوقية النظام هي :

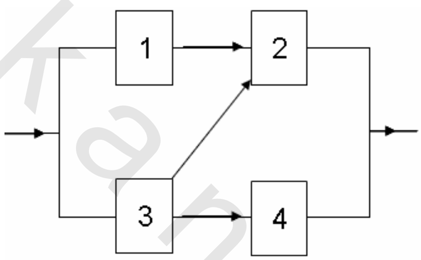
$$\begin{aligned} S(t) &= S_{1234}(t)\,S_5(t)\,S_6(t) \\ &= \left\{1-\left[1-e^{-t}\right]\left[1-e^{-3t/4}\right]\right\}e^{-9t/20} \end{aligned}$$

إذن موثوقية النظام بعد 2000 ساعة هي :

$$S(2) = 0.133$$

مثال (٣,١٢)

باعتبار النظام الموضح بالشكل رقم (٣,٨)، وبفرض أن كل عنصر من عناصره يتبع التوزيع الأسي، وأن متوسط زمن حياة العنصر i هو $\frac{1}{\lambda_i}$ ساعة لكل $i = 1,2,3,4$. أوجد دالة موثوقية النظام ومتوسط زمن حياته.



الشكل رقم (٣,٨). نظام المثال (٣,١٢).

دالة موثوقية النظام هي :

$$S(t) = S_1(t)\,S_2(t) + S_2(t)\,S_3(t) + S_3(t)\,S_4(t)$$
$$- S_1(t)\,S_2(t)\,S_3(t) - S_2(t)\,S_3(t)\,S_4(t)$$
$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} + e^{-(\lambda_2+\lambda_3)t} + e^{-(\lambda_3+\lambda_4)t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} - e^{-(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)t}$$

وحيث أنه لأي $\alpha > 0$ فإن :

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$$

إذن ، يمكن الحصول على متوسط زمن حياة النظام كالآتي :

$$MTTF = \int_0^\infty S(t)dt$$
$$= \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2+\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_3+\lambda_4} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}$$

وكحالة خاصة، إذا كانت جميع العناصر متطابقة، أي أن $\lambda_i = \lambda$ لكل $i = 1,2,3,4$ ، إذن:

$$MTTF = \frac{3}{2\lambda} - \frac{2}{3\lambda}$$
$$= \frac{5}{6\lambda}$$

(٣,٦) تمارين

(٣,١) وضح أن المعلمة λ في توزيع وايبل، بدالة الموثوقية التالية:

$$S(t;\lambda,\alpha) = e^{-(\lambda t)^\alpha} \ , t \geq 0,$$

يكون معلمة مقياس، بمعنى أن أوجد ثابت مناسب α بحيث أن $S(\alpha t;\lambda_1,\alpha) = S(t;\lambda_2,\alpha)$ لأي معلمتي مقياس λ_1 ، λ_2.

(٣,٢) أوجد متوسط زمن حياة وحدة ما دالة بقاءها:

$$S(t) = pe^{-\lambda t} \ , t \geq 0; 0 < p < 1, \lambda > 0.$$

(٣,٣) بفرض أن العناصر تتبع توزيعاً أسيا بالمعلمة λ وضح أن:

أ) متوسط زمن حياة نظام توالي مكون من n من العناصر المتطابقة هو $1/(n\lambda)$؟

ب) متوسط زمن حياة نظام توالي – توازي مكون من أربعة عناصر متطابقة (اثنان متصلان معاً على التوازي متصلين على التوالي مع الإثنين المتبقيين والمتصلين معا على التوازي) هو $11/(12\lambda)$؟.

(٣,٤) ليكن c_1 تكلفة كل عنصر في مجموعة مكون من n من العناصر المتطابقة. وليكن c_2 تكلفة فشل النظام. أعد هذا النظام ليستخدم لفترة عمل مقدارها 300 ساعة. بفرض أن زمن حياة كل عنصر يتبع التوزيع الأسي بمعدل فشل 0.005 في الساعة، أوجد عدد العناصر التي تكون نظام توازي بأقل تكلفة؟

(٣,٥) ثلاث عناصر مستقلة ومتطابقة وتتبع التوزيع الأسي متصلة معا لتكون نظام 2−من−3. أوجد دالة بقاء النظام ومتوسط زمن حياته.

(٣,٦) زمن حياة صمام كهربي يتبع توزيعا أسياً. موثوقية هذا الصمام عند 1000 ساعة هي 0.98. أوجد متوسط زمن الحياة المتبقي للصمام إذا ترك يعمل بعد 567 ساعة من بدء استخدامه؟

(٣,٧) ما هو أصغر عدد من العناصر المتطابقة والتي تتبع توزيعاً أسيا بمعدل فشل $\lambda = 0.0004$ في الساعة، والذي يجب أن يتصل في توازي لنحصل على نظام متوسط زمن حياته 7000 ساعة.

(٣,٨) بفرض نظام توالي مكون من عنصرين مستقلين، العنصر الأول يتبع توزيع أسي بالمعلمة $\lambda = 0.000006$ في الساعة، ويتبع العنصر الثاني توزيع وايبل بالمعلمتين $\lambda = 0.000003$ ، $\alpha 1.364$.

أ) أوجد دالة بقاء النظام وارسمها.

ب) ما هو احتمال أن يبقى النظام لمدة 1000 ساعة؟

(٣,٩) وضح أنه إذا كان المتغير العشوائي T يتبع توزيعا أسيا بالمعلمة ، فإن $\left(T / \lambda^{\alpha-1}\right)^{1/\alpha}$ يتبع توزيع وايبل؟

(٣,١٠) سيستخدم النظام الموضح في الشكل رقم (٣,٩) لفترة محددة. يتبع العنصر 1 توزيعا أسيا بمعدل فشل $\lambda_1 = 0.00001$ ، ويتبع العنصر 2 توزيعا أسياً بمعدل فشل $\lambda_2 = 0.0005$ ، ويتبع العنصر 3 توزيع وايبل بالمعلمتين

$\lambda_3 = 0.0005$ ، $\alpha = 2$. بفرض أن الزمن مقاس بالساعة، أوجد العنصر الذي له أعلى أهمية موثوقية إذا كان:

(أ) فترة الاستخدام هي 10 ساعات.

(ب) فترة الاستخدام هي 5000 ساعة.

فسر النتائج التي تحصل عليها.

(٣,١١) زمن حياة جهاز ما يتبع توزيع وايبل بالمعلمتين $\lambda_3 = 2.7$ ، $\alpha = 0.64$.

(أ) ما هو متوسط زمن حياة الجهاز؟

(ب) ما هو متوسط زمن الحياة المتبقي للجهاز إذا بقي في العمل بعد 0.3 وحدة زمنية؟

(٣,١٢) يريد أحد مهندسي التصميم أن يصمم وحدة ما بموثوقية 0.8 عند شهر واحد. قام بتصميم الوحدة ووجد أن زمن حياتها يتبع توزيع وايبل بالمعلمتين $\lambda = 8.33$ ، $\alpha = 0.334$ ، ولسوء الحظ وجد أن موثوقية شهر للوحدة هو $S(1) = e^{-8.33^{0.334}} = 0.13$ ، ما هو غير المتوقع؟ وحيث أن توزيع وايبل يتمتع بمعدل إخفاق متناقص، إذن يمكن للمهندس أن يزيد من موثوقية الوحدة في الشهر إذا احترقت.

(أ) ما هو الوقت اللازم لاحتراق الوحدة للحصول على موثوفية شهر مقدارها 0.8 للوحدات التي تجتاز الاختبار؟

(ب) ما هي نسبة الوحدات التي تخفق أثناء الاختبار؟

(٣,١٣) أوجد متوسط زمن الحياة المتبقي لتوزيع جاما بالمعلمتين ؤ، $\alpha = 2.5$ لأجل $\lambda = 5,15,\cdots,195$.

(٣,١٤) بفرض أن زمن حياة وحدة ما يتبع توزيع خاص من التوزيع المنطقي logistic distribution دالة بقاءه

$$S(t) = \frac{1}{1+\lambda t}, t \geq 0; \lambda > 0$$

إذا عملت الوحدة لمدة a وحدة زمنية، أوجد:

(أ) احتمال أن الوحدة ستعمل لمدة r وحدة زمنية،

(ب) متوسط زمن الحياة المتبقي للوحدة.

(٣,١٥) أوجد ممثلات التوزيع الخمس للتوزيع المنتظم.

مساعدة: التوزيع المنتظم يكون نموذج بسيط بمعلمتين. التطبيق الرئيس للتوزيع المنتظم هو تقريب توزيع زمن الحياة على فترة صغيرة نسبياً. التوزيع المنتظم له دعم على الفترة $[a,b]$ بمعالم الموضع a ، b حيث $0 \le a < b$. دالة كثافة احتمال التوزيع المنتظم تأخذ الصيغة التالية:

$$f(t) = \frac{1}{b-a}, a \le t \le b$$

(٣,١٦) أوجد ممثلات التوزيع الخمس لتوزيع القوة الأسي exponential power distribution.

مساعدة: لتوزيع القوة الأسي معلمة مقياس موجبة λ ومعلمة شكل موجبة α. يتمتع هذا التوزيع بخاصتين تجعلاه منفرداً. الخاصية الأولى: دالة إخفاقه تتزايد أسياً مع الزمن بينما دالة إخفاق توزيع وايبل تتزايد ككثيرة حدود. الخاصية الثانية: توزيع القوة الأسي هو أحد التوزيعات القليلة بمعلمتين والذي تأخذ دالة إخفاقه شكل حوض الاستحمام. دالة كثافة احتمال توزيع القوة الأسي تأخذ الصيغة التالية:

$$f(t) = \lambda\alpha\, t^{\alpha-1} \exp\left\{1 - e^{\lambda t^{\alpha}}\right\} \exp\left\{\lambda t^{\alpha}\right\}, 0 \le t$$

(٣,١٧) أوجد ممثلات التوزيع الخمس لتوزيع حوض الاستحمام المتزايد والمتناقص.

مساعدة: لتوزيع حوض الاستحمام المتزايد والمتناقص ثلاث معالم $\alpha \ge 0$ ، $\gamma \ge 0$ ، $\delta \ge 0$. دالة إخفاق هذا التوزيع تتزايد عندما $\delta \ge \gamma\alpha$ ، وتناقص عندما $\delta = 0$ وتأخذ شكل حوض الاستحمام عندما $0 < \delta < \gamma\alpha$. يمكن

الحصول على توزيع رالي كحالة خاصة من هذا التوزيع عندما $\gamma = 0$ ، والحصول على التوزيع الأسي عندما $\delta = \alpha = 0$. دالة كثافة احتمال هذا التوزيع تأخذ الصيغة التالية :

$$f(t) = \frac{(1+\alpha t)\delta t + \gamma t}{(1+\alpha t)^{\gamma/\alpha+1}} e^{-\delta t^2/2}, \ t \geq 0$$

(٣,١٨) أوجد ممثلات التوزيع الخمس لتوزيع باريتو Pareto distribution.

مساعدة : دالة كثافة احتمال هذا التوزيع تأخذ الصيغة التالية :

$$f(t) = \frac{\alpha \lambda^{\alpha}}{t^{\alpha+1}}, \ t \geq \lambda; \alpha, \lambda > 0.$$

(٣,١٩) إذا كان $T_i \sim Exp(\lambda_i)$ لأجل $i = 1,2,\cdots,n$ فإن $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ يتبع توزيعا أسيا زائديا hypo-exponential distribution. التوزيع الأسي الزائدي يتحول إلى توزيع إيرلانج بالمعلمتين λ, n عندما $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$. وضح أن التوزيع الأسي الزائدي يكون توزيع بمعدل إخفاق متزايد لجميع قيم معالمه.

(٣,٢٠) إذا كان $T_i \sim Exp(\lambda_i)$ لأجل $i = 1,2,\cdots,n$ وأن دالة كثافة المتغير العشوائي T هي :

$$f_T(t) = p_1 f_{T_1}(t) + p_2 f_{T_2}(t) + \cdots + p_n f_{T_n}(t)$$

حيث أن $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ ، فإن T يتبع توزيعا أسيا زائديا. يتحول التوزيع الأسي الزائدي إلى توزيع أسي بمعدل فشل λ عندما $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$. وضح أن التوزيع الأسي الزائدي يكون توزيع بمعدل إخفاق متناقص لجميع قيم معالمه.

الفصل الرابع

فصول توزيعات الحياة اعتماداً على مفهوم التعمير

Classes of Life Distributions based on the Notion of Aging

ليكن T يرمز إلى زمن حياة أحد العناصر. بالإشارة بـ $f(t)$ إلى دالة كثافة احتماله ، وبـ $F(t)$ إلى دالة توزيعه التراكمية، وبـ $S(t)$ إلى دالة بقاؤه، وبـ $r(t)$ إلى دالة معدل إخفاقه. تذكر أن $S(t\,|x)=\frac{f(t)}{S(t)}$ وأن $S(t\,|x)=\frac{S(t+x)}{S(x)}$.

(٤,١) فصلي م.إ.ز و م.إ.ص

IFR and DFR classes

عرضنا سابقا الفصلين الأولين اللذان سنقدمهما في هذا الفصل وهما فصل توزيعات بمعدل إخفاق متزايد (م.إ.ز) وفصل توزيعات بمعدل إخفاق متناقص (م.إ.ص). إحدى الطرق لتعريف هذين الفصلين هو استخدام دالة الإخفاق.

تعريف (٤,١)

التوزيع F يكون :

(أ) بمعدل إخفاق متزايد (م.إ.ز) إذا كانت الدالة $r(t)$ متزايدة مع الزمن t.

(ب) بمعدل إخفاق متناقص (م.إ.ص) إذا كانت الدالة $r(t)$ متناقصة مع الزمن t.

يمكن تعريف هذين الفصلين بطريقة أخرى وذالك باستخدام الاحتمال الشرطي كما يلي.

تعريف (٤,٢)

التوزيع F يكون :

(أ) م.إ.ز إذا كانت الدالة $S(t|x)$ متناقصة مع الزمن x.

(ب) م.إ.ص إذا كانت الدالة $S(t|x)$ متزايدة مع الزمن x.

نظرية (٤,١)

التعريفان (٤,١) و(٤,٢) متكافئان.

البرهان: بالبدء بفرض أن التعريف (٤,١) صحيح ، إذن لدينا المتكافئات التالية :

التعريف (٤,١) $\Leftrightarrow$ $r(t)$ متزايدة مع الزمن t

$\Leftrightarrow$ $r(t+x) \geq r(x)$ لكل $t \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $r(x) - r(t+x) \leq 0$ لكل $t \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{f(x)}{S(x)} - \dfrac{f(t+x)}{S(t+x)} \leq 0$ لكل $t \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{-\frac{d}{dx}S(x)}{S(x)} - \dfrac{-\frac{d}{dx}S(t+x)}{S(t+x)} \leq 0$ لكل $t \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{[S(x)]^2}\left[S(x)\dfrac{d}{dx}S(t+x) - S(t+x)\dfrac{d}{dx}S(x)\right] \leq 0$ لكل $t \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{d}{dx}S(t\,|\,x) \leq 0$ لكل $t \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $S(t|x)$ متناقصة مع الزمن x.

$\Leftrightarrow$ تعريف (٤,٢).

نظرية (٤,٢)

التوزيع F يكون م.إ.ز إذا وفقط إذا كانت دالة بقاؤها مقعرة لوغاريتمية log concave.

البرهان

هذا الشرط ضروري وكافي. لدينا المتكافئات التالية :

التوزيع F يكون م.إ.ز $\Leftrightarrow$ $r(t)$ متزايدة مع الزمن t

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} r(t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t r(u)\, du \geq 0$$

$\Leftrightarrow \quad \int_0^t r(u)\, du$ محدبة

$\Leftrightarrow \quad R(t) = -\ln S(t)$ محدبة

$\Leftrightarrow \quad \ln S(t)$ مقعرة

$\Leftrightarrow \quad S(t)$ مقعرة لوغاريتمية

نظرية (٤,٣)

إذا كانت دالة الإخفاق $r(t)$ مقعرة لوغاريتمية ، إذن $\overline{R}(x) = \int_x^\infty r(t)\, dt$ تكون مقعرة لوغاريتمية.

البرهان

لدينا المتضمنات التالية :

$r(t)$ مقعرة لوغاريتمية $\Leftarrow$ $r(t)$ متزايدة مع الزمن t

$$\Leftarrow \quad \frac{d}{dt} r(t) \geq 0$$

نتيجة (٤,١)

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال $f(t)$ محدبة لوغاريتمية log convex ، إذن دالة التوزيع التراكمية F يكون م.إ.ز.

البرهان

لدينا المتضمنات التالية :

f مقعرة لوغاريتمية $\Leftarrow$ $S(t)$ مقعرة لوغاريتمية

$$\Leftarrow \quad \frac{d}{dt} r(t) \geq 0$$

$\Leftarrow$ F يكون م.إ.ز، نظرية (٤,٢).

(٤,٢) فصلي م.إ.ز.م و م.إ.ص.م
IFRA and DFRA classes

تعريف (٤,٣)

التوزيع F يكون :

(أ) بمعدل إخفاق متزايد في المتوسط (م.إ.ز.م) إذا كانت الدالة $-\frac{\ln S(t)}{t}$ متزايدة مع الزمن t.

(ب) بمعدل إخفاق متناقص في المتوسط (م.إ.ص.م) إذا كانت الدالة $-\frac{\ln S(t)}{t}$ متناقصة مع الزمن t.

ملاحظة (٤,١)

١– يمكن أن نطلق أحياناً على الفصلين م.إ.ز.م ، م.إ.ص.م أسماء فصل بمعدل إخفاق متزايد في المتوقع بدلا من فصل بمعدل إخفاق متزايد في المتوسط ، فصل بمعدل إخفاق متناقص في المتوقع بدلا من فصل بمعدل إخفاق متناقص في المتوسط.

٢– لاحظ أن هو معدل الإخفاق التراكمي.

٣– حيث أن المتوسط لدالة متزايدة (متناقصة) يكون متزايد (متناقص)، إذن يمكن استنتاج أن توزيع المتغير العشوائي T يكون م.إ.ز (م.إ.ص) زمن ثم فإنه يكون م.إ.ز.م (م.إ.ص.م). العكس دائما لا يكون صحيحاً.

(٤,٣) فصلي ج.ض.س. و ج.س.س
NBU and NWU classes

تعريف (٤,٤)

التوزيع F يكون :

(أ) جديد أفضل من مستعمل (ج.ض.س) إذا كان $S(t+x) \le S(t)\,S(x)$ لكل t ، x.

(ب) جديد أسوء من مستعمل (ج.س.س) إذا كان $S(t+x) \ge S(t)\,S(x)$ لكل t ، x.

ملاحظة (٤,٢)

١- يمكن كتابة الشرط $S(t+x) \le S(t)\,S(x)$ بالصورة $S(t\,|\,x) \le S(t)$ ، هذا يعني أن $P(T \ge t\,|\,T > x) \le P(T \ge t\,|\,T > 0)$. وهذا يكافئ البدء بالاحتمال البقاء الشرطي $S(x+y)/S(x)$ لوحدة ما عمرها x يكون أقل من احتمال البقاء لوحدة جديدة $S(y)$. لاحظ أن المساواة تتحقق فقط وفقط إذا كان يتبع التوزيع الأسي.

٢- بالمثل يمكن تفسير الشرط الخاص بـ ج.س.س باستبدال علامة $\le$ بـ $\ge$.

(٤,٤) فصلي ج.ض.س.م و ج.س.س.م
NBUA and NWUA classes

تعريف (٤,٥)

التوزيع F يكون :

(أ) جديد أفضل من مستعمل في المتوسط (ج.ض.س.م) إذا كان $\int_0^\infty S(t+x)dx \le \mu\,S(t)$.

(ب) جديد أسوء من مستعمل في المتوسط (ج.س.س.م) إذا كان $\int_0^\infty S(t+x)dx \ge \mu\, S(t)$.

حيث $\mu = \int_0^\infty S(t)\, dt$.

ملاحظة (٣ ,٤)

١- يمكن أن نطلق أحياناً على الفصلين ج.ض.س.م ، ج.س.س.م أسماء فصل جديد أفضل من مستعمل في المتوقع بدلاً من فصل جديد أفضل من مستعمل في المتوسط ، فصل جديد أسوء من مستعمل في المتوقع بدلاً من فصل جديد أسوء من مستعمل في المتوسط.

٢- يمكن كتابة الشرط $\int_0^\infty S(t+x)dx \le \mu S(t)$ بالصورة $\int_t^\infty S(u)du \le \mu S(t)$ أو $\int_t^\infty \frac{S(u)}{S(t)} du \le \mu$. يمثل الطرف الأيسر في هذا الشرط متوسط متبقي زمن الحياة لوحدة عمرها t ، إذن هذا الشرط يستلزم أن وحدة مستعملة عمرها t يكون لها متوسط متبقي زمن الحياة أصغر من وحدة جديدة إذا كانت F ج.ض.س.م.

٣- بالمثل يمكن عمل نفس الملاحظة السابقة للفصل ج.س.س.م.

نظرية (٤ ,٤)

أ) م.إ.ز $\Leftarrow$ م.إ.ز.م $\Leftarrow$ ج.ض.س $\Leftarrow$ ج.ض.س.م

ب) م.إ.ص $\Leftarrow$ م.إ.ص.م $\Leftarrow$ ج.س.س $\Leftarrow$ ج.س.س.م

البرهان

أ) بافتراض أولاً أن التوزيع F ينتمي إلى فصل م.إ.ز $\Leftarrow$

$$\forall x \ge t, r(x) \ge r(t)$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^x r(x)dt \geq \int_0^x r(t)dt$$
$$\Rightarrow \quad xr(x) \geq -\ln S(x)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{xr(x)+ \in S(x)}{x^2} \geq 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{d}{x}\left[\frac{-\ln S(x)}{x}\right] \geq 0$$
$$\Rightarrow \quad -\frac{\ln S(x)}{x} \text{ is increasing in } x$$

وهذا يقود إلى أن F ينتمي إلى فصل م.إ.ز.م ومن ثم فإن م.إ.ز $\Leftarrow$ م.إ.ز.م.

والآن نفترض أن التوزيع F ينتمي إلى فصل م.إ.ز.م $\Leftarrow$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\ln S(x)}{x} \text{ is increasing in } x \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\ln S(x+y)}{x+y} \geq -\frac{\ln S(x)}{x} \quad \text{and}$$
$$-\frac{\ln S(x+y)}{x+y} \geq -\frac{\ln S(y)}{y} \quad \forall x, y \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}\right] \ln S(x+y) \leq \ln S(x) + \ln S(y)$$
$$\Rightarrow \quad \ln S(x+y) \leq \ln S(x)S(y)$$
$$\Rightarrow \quad S(x+y) \leq S(x)S(y)$$

وهذا يقود إلى أن F ينتمي إلى فصل ج.ض.س ومن ثم فإن م.إ.ز.م $\Leftarrow$ ج.ض.س.

وأخيراً نفترض أن F ينتمي إلى فصل ج.ض.س ومن ثم فإن

$$\Rightarrow \quad S(x+y) \leq S(x)S(y) \quad \forall x, y \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty S(x+y)dx \le \int_0^\infty S(x)S(y)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty S(x+y)dx \le S(y)\int_0^\infty S(x)dx = S(y)\mu$$

وهذا يقود إلى أن F ينتمي إلى فصل ج.ض.س.م ومن ثم فإن ج.ض.س $\Leftarrow$ ج.ض.س.م ، وهذا يكمل برهان الجزء الأول من النظرية.

ب) يمكن برهان هذا الجزء بطريقة مماثلة لبرهان الفقرة (أ).

(٤,٥) تمارين

(٤,١) وضح أن توزيع وايبل ، بدالة الموثوقية التالية :

$$S(t;\lambda,\alpha) = e^{-(\lambda t)^\alpha} \;, t \ge 0,$$

يكون :

(أ) بمعدل إخفاق ثابت إذا كان $\alpha = 1$ ،

(ب) بمعدل إخفاق متزايد إذا كان $\alpha > 1$ ،

(ج) بمعدل إخفاق متناقص إذا كان $\alpha < 1$ ،

(٤,٢) أثبت أن دالة الإخفاق $r(t)$ لنظام توازي مكون من عنصرين مستقلين زمن حياتهما يتبع توزيع أسي الأول بالمعلمة λ_1 والثاني بالمعلمة λ_2 والذي يعطى بالصيغة التالية :

$$r(t) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - (\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}$$

يكون تزايدي على الفترة $[0,t_0)$ وتناقصي على الفترة (t_0,∞) حيث أن t_0 تعتمد على المعلمتين λ_1 ، λ_2 و تكون $r(t)$ تزايده على الفترة (t_0,∞) إذا وفقط إذا كان $\lambda_1 = \lambda_2$.

(٤,٣) وضح أن بناء أنظمة التوالي تحافظ على خاصية الفصول التالية :

(أ) م.إ.ز.

(ب) م.إ.ز.م.

(ج) م.إ.ص.

(د) م.إ.ص.م.

(٤,٤) أعط مثالاً لتوزيع بمعدل إخفاق متزايد له دعم محدود $[0,b]$ وله قفزة عند b.

(٤,٥) إذا كان $F(x)$ خليط من التوزيعات $F_\alpha(x)$ ، حيث أن α متغير عشوائي توزيعة $G(\alpha)$ ، معرف بالصيغة التالية

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(x)\,dG(\alpha)$$

أثبت أن :

(أ) إذا كان كل من $F_\alpha(x)$ م.إ.ص. فإن $F(x)$ م.إ.ص.

(ب) إذا كان كل من $F_\alpha(x)$ م.إ.ص.م. فإن $F(x)$ م.إ.ص.م.

(٤,٦) إذا $F(x)$ م.إ.ز. بالمتوسط μ ، أثبت أنه لأي $t>0$ فإن :

$$\overline{F}(t)\geq\begin{cases} e^{-t/\mu} & \text{for } t<\mu, \\ 0 & \text{for } t\geq\mu. \end{cases}$$

(٤,٧) إذا $F(x)$ م.إ.ز.م. بالمتوسط μ ، أثبت أنه لأي $t>0$ فإن :

$$\overline{F}(t)\leq\begin{cases} 1 & \text{for } t\leq\mu, \\ e^{-tw} & \text{for } t>\mu. \end{cases}$$

حيث أن $w>0$ تكون دالة في t وتحقق العلاقة التالية :

$$1-w\mu-e^{-tw}=0$$

(٤,٨) إذا $F(x)$ م.إ.ص. بالمتوسط μ ، أثبت أنه لأي $t>0$ فإن :

$$\overline{F}(t)\leq\begin{cases} e^{-t/\mu} & \text{for } t\leq\mu, \\ \frac{\mu e^{-1}}{t} & \text{for } t\geq\mu. \end{cases}$$

(٤,٩) إذا $F(x)$ م.إ.ز.م. وأن $\int_0^\infty x^r dF(x) = E[X^r] = \mu_r (r > 0)$ ، أثبت أن :

$$\overline{F}(x) \geq \begin{cases} \min\left[e^{-b_s s}, e^{-cs}\right] & \text{for } x \leq \mu_r^{1/r}, \\ 0 & \text{for } x \geq \mu_r^{1/r}. \end{cases}$$

حيث أن b_s تعطى بالعلاقة التالية :

$$s^r\left(1 - e^{-b_s s}\right) + \int_0^\infty x^r\, b_s\, e^{-b_s s}\, dx = \mu_r$$

وأن :

$$c = \left[\frac{\mu_r}{\Gamma(r+1)}\right]^{1/r}$$

(٤,١٠) أثبت أنه إذا كان $F(x)$ م.إ.ز.م. (م.إ.ص.م.) إذن $F(x)$ ج.ض.س (ج.س.س) .

(٤,١١) أثبت أن $F(x)$ ج.ض.س.م. إذا وفقط إذا كان $\int_0^t \overline{F}(x)\, dx \geq \mu F(t)$ لأجل $t \geq 0$.

(٤,١٢) أعط مثالاً لتوزيع يكون (أ) ج.ض.س ولكنه ليس م.إ.ز.م. ، (ب) ج.ض.س.م. ولكنه ليس ج.ض.س. .