الفصل الثامن

الرسوم الموجَّهة
DIGRAPHS

(٨,١) تعاريف ونتائج أساسية

يتكون الرسم الموجه digraph (directed graph) $D=(V,A)$ من مجموعة غير خالية V، تسمى **مجموعة رؤوس** D، ومجموعة من الأزواج المرتبة $A\subseteq V\times V$، تسمى **مجموعة أقواس** D أو **مجموعة الأضلاع الموجَّهة** لـِ D. إذا كان $a=(u,v)\in A$ فإننا نسمي **ضلعاً موجهاً** directed edge في G فإننا نسمي u **الرأس الابتدائي** tail لِـ a كما نسمي v **الرأس النهائي** head لِـ a. يسمى الضلع الموجه (u,u) **عروة موجهة** directed loop.

ليكن v رأساً في الرسم الموجه $D=(V,A)$. للرأس v، تعرف **الدرجة الداخلة** $d^-(v)$ indegree على أنها عدد الأضلاع التي يكون فيها v رأساً نهائياً؛ وتعرف **الدرجة الخارجة** $d^+(v)$ outdegree على أنها عدد الأضلاع التي يكون فيها v رأساً ابتدائياً. يرمز للجوار الداخل لِـ v بالرمز $N^-(v)$ ويرمز للجوار الخارج لِـ v بالرمز $N^+(v)$ ويعرفان كما يلي:

$$N^-(v)=\{x\in V:(x,v)\in A\}$$
$$N^+(v)=\{x\in V:(v,x)\in A\}$$

مبرهنة (٨,١)

إذا كان $D=(V,A)$ رسمًا موجهاً فإن، $\sum_{v\in V} d^-(v)=\sum_{v\in V} d^+(v)=|A|$.

البرهان

نلاحظ أن كل ضلع موجه له رأس ابتدائي واحد ورأس نهائي واحد، وعليه فإن كل ضلع موجه يساهم بواحد عند حساب كل من $\sum_{v\in V} d^-(v)$ و $\sum_{v\in V} d^+(v)$؛ ومن هنا ينتج المطلوب. □

ليكن $D=(V,A)$ رسمًا موجهاً. **الرسم الرديف** لـ D underlying graph هو الرسم الذي رؤوسه V وأضلاعه $\{\{u,v\}:(u,v)\in A\}$. إذا كان $b,c\in V$، $n\geq 1$ وكانت $W=v_1a_1v_2a_2\cdots a_{n-1}v_n$ متتالية متناوبة من الرؤوس والأقواس بحيث $a_i=(v_i,v_{i+1}),v_1=b,v_n=c$ لكل $1\leq i\leq n-1$ فإننا نسميها **مساراً موجهاً** directed walk من b إلى c. وبالمثل، نعرف **الطريق الموجه** directed trail، **الممر الموجه** directed path، **الدارة الموجهة** directed circuit، **الدورة الموجهة** directed cycle. كما يعرف طول المسار الموجه على أنه عدد أقواسه.

نقول إن الرسم الموجه D **مترابط أو مترابط بضعف** weakly connected إذا كان رسمه الرديف مترابطاً، ونقول إن D **مترابط بقوة** strongly connected إذا وجد ممر موجه من u إلى v وممر موجه من v إلى u لكل $u,v\in V(D)$.

وبشكل موازٍ للتعاريف المتعلقة بالرسومات تعرف الدارة الموجهة الأويلرية، الطريق الموجه الأويلري، الممر الموجه الهاملتوني، الدورة الموجهة الهاملتونية.

تعطينا المبرهنة التالية تمييزاً للرسوم الموجهة الأويلرية.

مبرهنة (٨,٢)

ليكن $D=(V,A)$ رسمًا موجهاً مترابطاً بضعف و$|A|>1$. عندئذٍ، D رسم موجه أويلري إذا وفقط إذا كان $d^-(v)=d^+(v)$ لكل $v\in V$.

البرهان

يمكن إثبات المطلوب بطريقة مشابهة لإثبات مبرهنة (٣,١) ونتركه كتمرين للقارئ. □

إن معالجة الدورات الموجهة في الرسوم الموجهة تشبه إلى حد ما معالجة الدورات في الرسوم. ويمكن تعميم بعض المبرهنات المتعلقة بالرسوم الهاملتونية إلى الرسوم الموجهة الهاملتونية حيث يلاحظ أن الإثباتات تكون أصعب نسبيًا. وهذا ما تبينه المبرهنة التالية حيث نقول إن الرسم الموجه **فعلي** simple digraph إذا لم يحتوِ على عروات موجهة وأضلاع موجهة مكررة.

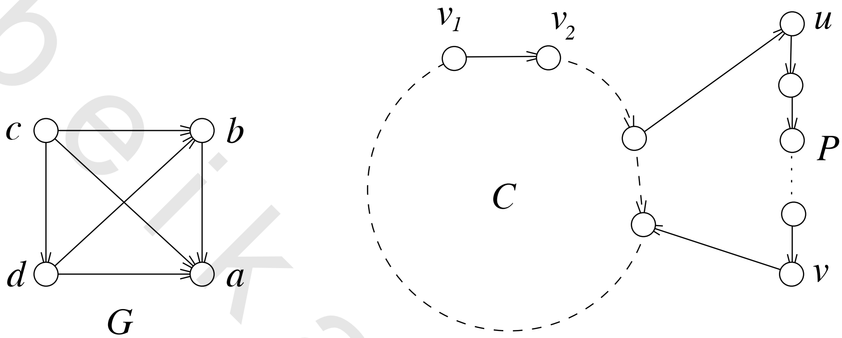
مبرهنة (٨,٣)

إذا كان D رسماً موجهاً فعلياً عدد رؤوسه n وكان $\min\{\delta^+,\delta^-\}\geq\frac{n}{2}>1$ فإن D هاملتوني.

البرهان

لغرض الحصول على تناقض، افرض أن D رسم يحقق فرضيات المبرهنة ولكنه لا يحتوي على دورة موجهة هاملتونية. لتكن $C=v_1v_2\cdots v_lv_1$ دورة في D بحيث يكون طولها $l<n$ أكبر ما يمكن ؛ نلاحظ أن $l>\max\{\delta^+,\delta^-\}$ [انظر تمرين ٢ من تمارين(٨,١)] وعليه فإن $l>\frac{n}{2}>1$. ليكن $P=u\cdots v$ ممراً

موجهاً في $D-V(C)$ بحيث يكون طوله $m \geq 0$ أكبر ما يمكن. نلاحظ أن $n \geq l+m+1$ وبما أن $l > \frac{n}{2}$ فينتج أن $m < \frac{n}{2}$ [انظر شكل(٨,١)(أ)].



(ب) (أ)

شكل(٨,١).

ضع

$$S=\{i : v_{i-1} \in N^-(u)\},\ T=\{i : v_i \in N^+(v)\}$$

$$S'=C \cap N^-(u), T'=C \cap N^+(v)$$

سنثبت الآن أن $S \cap T=\phi$. لِيدل الرمز $C_{j,k}$ على جزء C الذي يبدأ بالرأس v_j وينتهي بالرأس v_k. إذا كان $i \in S \cap T$ فإن $C_{i,i-1}(v_{i-1},u)P(v,v_i)$ دورة موجهة طولها $l+m+1$ في D ؛ وهذا يتناقض مع اختيار C. إذن $S \cap T=\phi$.

بما أن P ممر موجه طوله أكبر ما يمكن في $D-V(C)$ فإن $N^-(u) \subseteq V(P) \cup V(C)$.

ولكن $|S'|=|S|$ ، إذن

$d_D^-(u)=d_P^-(u)+|S|$. بما أن $d_D^-(u)\geq \delta^- \geq \frac{n}{2}$ و $d_P^-(u)\leq m$ فإن $|S|\geq \frac{n}{2}-m$.

وبما أن $m<\frac{n}{2}$ فينتج أن $S\neq \phi$. بالمثل، نجد أن $|T|\geq \frac{n}{2}-m$ و $T\neq \phi$.

نلاحظ أن $|S|+|T|\geq n-2m$ وبما أن $n\geq l+m+1$ فينتج أن $|S|+|T|\geq l-m+1$.

ولكن $S\cap T=\phi$، إذن $|S\cup T|\geq l-m+1$.

إذا كان $S'=T'=\{v_r\}$ فإن $(v_r,u)P(v,v_r)$ دورة موجهة طولها $m+2$ في D بينما $|S'|=|S|$ و $|T'|=|T|$ و $|S|+|T|\geq l-m+1$ تقتضي أن $l\leq m+1$ وهذا يتناقض مع اختيار C. وعليه فإنه يوجد عددان صحيحان موجبان k,i بحيث $i\in S$ و $i+k \mod l\in T$ و $i+j \mod l\notin S\cup T$ لكل $1\leq j\leq k$.

إذن

$$l-(k-1)\geq |S\cup T|\geq l-m+1$$

وينتج أن $k\leq m$. وهكذا، فإن $C_{i+k,i-1}(v_{i-1},u)P(v,v_{i+k})$ دورة موجهة طولها $l+m+1-k$ وهذا يتناقض مع اختيار C.

تمارين (٨,١)

١- إذا كان G رسماً بسيطًا بحيث $\delta\geq k$ فأثبت أن G يحتوي على ممر طوله k على الأقل. وإذا كان $k\geq 2$ فأثبت أن G يحتوي على دورة طولها $k+1$ على الأقل.

٢- إذا كان D رسماً موجهاً فعلياً و $k=\max\{\delta^-,\delta^+\}$ فأثبت أن D يحتوي على ممر موجه طوله k على الأقل. وإذا كان $k>0$ فأثبت أن D يحتوي على دورة موجهة طولها $k+1$ على الأقل.

(٨,٢) رسوم المسابقة

يسمى الرسم الموجه الذي مجموعة رؤوسه V **رسم مسابقة tournament** إذا تحقق ما يلي: لكل مجموعة جزئية ثنائية $\{x, y\}$ من V فإن واحداً فقط من (x, y) و (y, x) يكون ضلعاً موجهاً في G.

إن إيجاد ممر موجَّه هاملتوني على وجه العموم أمر صعب عموماً؛ غير أن المبرهنة التالية تبين أن ذلك أمر سهل في حالة رسوم المسابقة.

مبرهنة (٨,٤)

إذا كان G رسم مسابقة فإنه يوجد في G ممر موجه هاملتوني.

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس n. واضح أن المطلوب صحيح عندما $n = 1$. نفرض الآن أن كل رسم مسابقة عدد رؤوسه n يحتوي على ممر موجه هاملتوني، كما نفرض أن G رسم مسابقة عدد رؤوسه $n + 1$. اختر أي رأس v في G واعتبر رسم المسابقة $G - v$ الناتج من G بعد حذف v وكل ضلع يكون v أحد طرفيه. ينتج من فرضية الاستقراء أنه يوجد ممر موجه هاملتوني $v_1 v_2 \cdots v_n$ في $G - v$. إذا كان (v, v_1) ضلعاً موجهاً في G فإن $v v_1 v_2 \cdots v_n$ ممر موجه هاملتوني في G. نفرض الآن أن (v_1, v) ضلع موجه في G. إذا كان (v, v_2) ضلعاً موجهاً في G فإن $v_1 v v_2 \cdots v_n$ ممر موجه هاملتوني في G؛ وخلاف ذلك فإن (v_2, v) ضلع موجه في G. وبالاستمرار على هذا المنوال، نجد أنه إما يوجد $1 < i < n$ بحيث $v_1 v_2 \cdots v_{i-1} v v_i \cdots v_n$ ممر موجه هاملتوني في G أو $v_1 v_2 \cdots v_n v$ ممر موجه هاملتوني في G.

مثال (٨,١)

نعتبر رسم المسابقة الموضح في شكل(٨,١)(ب). وننشئ، كما في إثبات مبرهنة (٨,٤)، ممراً موجهاً هاملتونيًا في G بدءًا من الرأس a. إذا أضفنا b ثم c ثم d فإننا نحصل على الممرات الموجهة ba ، cba ، $cdba$ على الترتيب.

مبرهنة (٨,٥)

إذا كان G رسم مسابقة فإنه يوجد رأس x في G بحيث يمكن الوصول إلى أي رأس من x بممر موجّه طوله على الأكثر 2.

البرهان

ليكن x_1 رأساً في G. إذا كان x_1 لا يحقق المطلوب فإنه يوجد رأس x_2 في G بحيث (x_2,x_1) ضلع موجه في G و (x_2,v) ضلع موجه كلما كان (x_1,v) ضلعاً موجهاً.

إذن $N^+(x_1)\subsetneq N^+(x_2)$ ، وعليه فإن $d^+(x_1)<d^+(x_2)$. إذا كان x_2 لا يحقق المطلوب فإنه يوجد رأس x_3 بحيث $d^+(x_2)<d^+(x_3)$. وهكذا فإننا نحصل على متتالية من الرؤوس $x_1,x_2,\cdots$ بحيث $d^+(x_1)<d^+(x_2)<\cdots$ وبما أن G منتهٍ فإنه لا بد من وجود رأس x يحقق المطلوب.

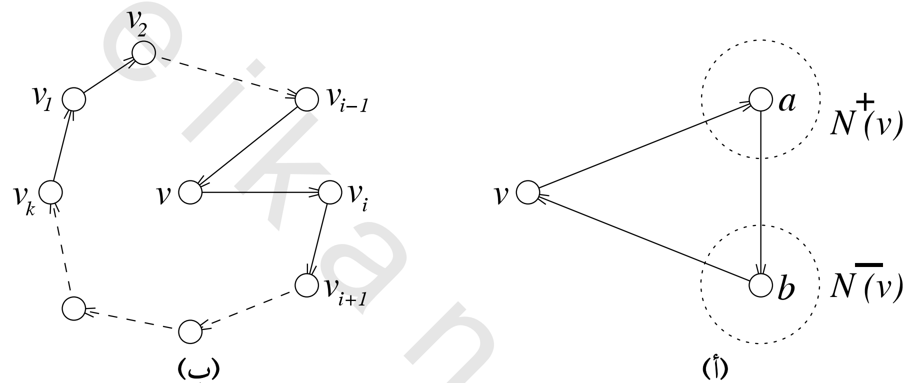
مبرهنة (٨,٦)

إذا كان G رسم مسابقة مترابطاً بقوة وعدد رؤوسه n ؛ فإنه يوجد في G دورات موجهة من الأطوال $3,4,\cdots,n$. وبشكل خاص فإن G رسم موجه هاملتوني.

البرهان

سنثبت أولاً وجود دورة موجهة ثلاثية ثم نستخدم الاستقراء الرياضي لإكمال البرهان.

ليكن v رأساً في G. بما أن G مترابط بقوة فإن $N^-(v) \neq \phi$ و $N^+(v) \neq \phi$ ؛ وبما أن G رسم مسابقة فإن $N^-(v) \cap N^+(v) = \phi$. كذلك، بما أن G مترابط بقوة فإنه يوجد $a \in N^+(v)$ و $b \in N^-(v)$ بحيث (a,b) ضلع موجه في G. إذن $vabv$ دورة موجهة ثلاثية في G (انظر شكل(٨,٢)(أ)).



شكل(٨,٢).

نفرض الآن أن $3 \leq k < n$ عدد صحيح وأن G يحتوي على دورة موجهة $C: v_1v_2v_3 \cdots v_kv_1$ طولها k. سنثبت أن G يحتوي على دورة موجهة طولها $k+1$.

لنفرض أولاً أنه يوجد رأس v في G مختلف عن رؤوس C بحيث يوجد $v_r \in N^-(v)$ و $v_t \in N^+(v)$. بما أن G رسم مسابقة فإنه يوجد i بحيث $v_{i-1} \in N^-(v)$ و $v_i \in N^+(v)$ ؛ وعليه فإن

$$C': v_1v_2 \cdots v_{i-1}vv_iv_{i+1} \cdots v_kv_1$$

دورة موجهة طولها $k+1$ في G (انظر شكل(٨,٢)(ب)).

نفرض الآن أنه لا يوجد أي رأس v في G بحيث يحقق الخاصة المذكورة أعلاه ؛ ونعرف A, B كما يلي :

$$A=\left\{v \in V(G)-V(C): v \in N^{+}\left(v_{i}\right), i=1,2, \cdots, k\right\}$$

$$B=\left\{v \in V(G)-V(C): v \in N^{-}\left(v_{i}\right), i=1,2, \cdots, k\right\}$$

بما أن G مترابط بقوة فإن $A \neq \phi$ و $B \neq \phi$ وبما أن G رسم مسابقة فإن $A \cap B=\phi$. كذلك، بما أن G مترابط بقوة فإنه يوجد $b \in B, a \in A$ بحيث (a,b) ضلع موجه في G. إذن

$$C'': v_{1} a b v_{3} v_{4} \cdots v_{k} v_{1}$$

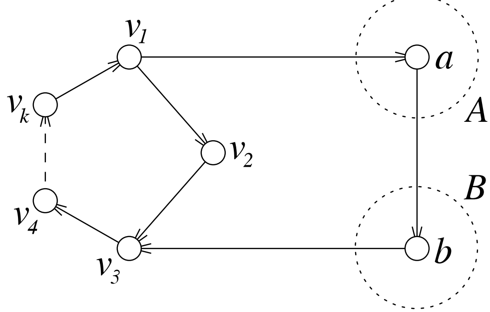
دورة موجهة طولها $k+1$ في G (انظر شكل(٨,٣)).

مبرهنة (٨,٧)

ليكن G رسم مسابقة. عندئذٍ، G رسم موجه هاملتوني إذا وفقط إذا كان G مترابطاً بقوة.

البرهان

متروك كتمرين للقارئ.



شكل(٨,٣).

(٨,٣) توجيه الرسوم

نقول إن الرسم G **قابل للتوجيه بقوة** strongly orientable إذا كان G مترابطاً ويوجد توجيه لأضلاع G بحيث يكون الرسم الموجه الناتج، D، مترابطاً بقوة. ويسمى D **توجيهاً** orientation للرسم G.

مبرهنة (٨,٨)

يكون الرسم G قابلاً للتوجيه بقوة إذا وفقط إذا كان G مترابطاً ولا يحتوي على جسور.

البرهان

نفرض أولاً أن G قابل للتوجيه بقوة. إذن يمكن توجيه أضلاع G بحيث نحصل على رسم موجه مترابط بقوة D. بما أن D مترابط بقوة فإن G مترابط. لغرض الحصول على تناقض، نفرض أن الضلع uv جسر في G وأن (u,v) ضلع موجه في D بينما (v,u) ليس ضلعاً موجهاً في D. بما أن D مترابط بقوة فإنه يوجد ممر موجه $v,v_1,\cdots,v_m,u$ لا يحتوي على (v,u). وعليه فإن uv ضلع في الدورة $u,v,v_1,\cdots,v_m,u$ في G. إذن uv ليس جسرًا في G، وهذا يعطي التناقض المطلوب.

نفرض الآن أن G مترابط ولا يحتوي على جسور. بما أن G لا يحتوي على جسور فإن كل ضلع في G يكون محتوى في دورة. لغرض الحصول على توجيه قوي للرسم G نختار أي دورة $C_1: v_1,v_2,\cdots,v_n,v_1$ في G ونوجه أضلاعها بحيث يكون (v_i,v_{i+1}) ضلعاً موجهاً لكل $1 \le i \le n-1$ كما يكون (v_n,v_1) ضلعاً موجهاً. كذلك، نوجه أقطار الدورة C_1 إن وجدت (أي، الأضلاع التي تصل رؤوسًا غير متعاقبة في C_1) اختياريًا. ليكن D_1 الرسم الموجه الناتج من

الرسم الجزئي المحدث $\langle V(C_1)\rangle$ من G بعد توجيه الأضلاع كما وصف أعلاه. إذن $v_1,v_2,\cdots,v_n,v_1$ دورة موجهة هاملتونية في D_1، وعليه فإن D_1 مترابط بقوة ويكون G قابلاً للتوجيه بقوة عندما $V(C_1)=V(G)$.

نفرض الآن أن $V(C_1)\neq V(G)$. بما أن G مترابط فإنه يوجد رأس ω_1 لا ينتمي إلى $V(C_1)$ ويوجد v_j بحيث يكون $\omega_1 v_j$ ضلعاً في G. بما أن $\omega_1 v_j$ ليس جسرًا في G فإنه محتوى في دورة $C_2:\omega_1,v_j=\omega_2,\omega_3,\cdots,\omega_m,\omega_1$ في G. نقوم الآن بتوجيه الأضلاع التي لم يتم توجيهها سابقًا في الرسم الجزئي المحدث $\langle V(C_1)\cup V(C_2)\rangle$ من G بحيث يتحقق ما يلي: (ω_1,ω_2) ضلع موجه، (ω_m,ω_1) ضلع موجه، لكل $i=2,3,\cdots,m-1$ فإن كل ضلع $\omega_i\omega_{i+1}$ لم يتم توجيهه سابقًا يوجه بحيث يكون (ω_i,ω_{i+1}) ضلعاً موجهاً، يوجه اختياريًا كل ضلع آخر لم يتم توجيهه سابقًا. ليكن D_2 الرسم الموجه الناتج من $\langle V(C_1)\cup V(C_2)\rangle$ بعد توجيه الأضلاع كما وصف أعلاه. ولبيان أن D_2 مترابط بقوة ننشئ فيما يلي مسارًا موجهاً مغلقًا مولِّدًا لِـ D_2. نبدأ الإنشاء باعتبار المسار الموجه المغلق $W_1:v_1,v_2,\cdots,v_n,v_1$. ننشئ الآن مسارًا موجهاً مغلقًا W_2 كما يلي: نبدأ بِـ ω_1,ω_2 ولكل $2\le i\le m-1$ نضيف ω_i,ω_{i+1} عندما يكون (ω_i,ω_{i+1}) ضلعاً موجهاً في D_2 بينما نضيف ممراً موجهاً من ω_i إلى ω_{i+1} محتوى في D_1 عندما لا يكون (ω_i,ω_{i+1}) ضلعاً موجهاً في D_2؛ ثم نضيف ω_m,ω_1. نقوم الآن بتوسعة W_1 وذلك بإضافة W_2 إليه عند الرأس $v_j=\omega_2$ فنحصل على W_3 وهو مسار موجه مغلق مولد لِـ D_2. وعليه فإن D_2 مترابط بقوة ويكون G قابلاً للتوجيه بقوة عندما $V(C_1)\cup V(C_2)=V(G)$.

وختامًا، إذا كان $V(C_1) \cup V(C_2) \neq V(G)$ فإن تكرار العملية المتبعة أعلاه كلما لزم الأمر يؤدي إلى الحصول على رسم موجه مترابط بقوة D بحيث $V(D) = V(G)$؛ وعليه فإن G قابل للتوجيه بقوة. □

نقدم فيما يلي بعض التعريفات والنتائج التي نحتاج إليها في ختام هذا البند لكي نقدم خوارزمية جيدة لإيجاد توجيهات للرسوم المترابطة التي لا تحتوي على جسور. لتكن T شجرة تقصٍ عمقي للرسم G ولتكن $v_1, v_2, \ldots, v_n$ هي رؤوس T. نسمي $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **ترقيماً عمقياً** depth first numbering لِـ G كما نسمي k **الدليل العمقي** depth first index للرأس v_k ونكتب $DFI(v_k) = k$. إذا كان j هو أكبر دليل بحيث يوجد ممر من v_i إلى v_j في الشجرة T فإننا نسمي j **دليل الوصول العمقي** depth first reach index للرأس v_i ونكتب $DRI(v_i) = j$.

إذا أضيف الرأس w عند الرأس v فإننا نسمي v **المرجع المباشر** immediate predecessor لِـ w ونكتب $p(v) = w$.

إذا وُجِّه كل ضلع في T من طرفه ذي الدليل العمقي الأصغر إلى طرفه ذي الدليل العمقي الأكبر فإننا نحصل على شجرة موجهة T'. وإذا كان $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$ ممراً موجهاً في T' فإن كلاً من $v_{i_2}, v_{i_3}, \ldots, v_{i_r}$ يسمى **تابعاً** successor لِـ v_{i_1} ويسمى v_{i_2} **تابعاًمباشراً** immediate successor لِـ v_{i_1}.

تمهيدية (٨,١)

لتكن T شجرة تقصٍ عمقي للرسم G وليكن $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ترقيماً عمقياً لِـ G. إذا كان j دليل الوصول العمقي للرأس v_i فإن توابع v_i في T هي $v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_j$.

البرهان

واضح من طريقة إنشاء T أن v_k ليس تابعاً لـِ v_i لكل $k > j$ ولكل $k < i+1$. لغرض الحصول على تناقض افرض أن $i+1 \le m < j$ أصغر دليل بحيث v_m ليس تابعاً لِ v_i. عليه، $p(v_m) = v_r$ حيث $r < i$. إذن من طريقة إنشاء T يتضح أنه إذا كان v_h مجاوراً لأي من الرؤوس $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{m-1}$ فإن $h < i$. وهذا يناقض كون v_j تابعاً لـِ v_i يقتضي وجود رأس v_t مجاور لأحد الرؤوس $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{m-1}$ بحيث $t > i$. إذن، لكل $i+1 \le k \le j$، v_k تابع لِ v_i.

مبرهنة (٨,٩)

لتكن T شجرة تقصٍ عمقي للرسم G وليكن $v_1, v_2, \dots, v_n$ ترقيماً عمقياً لـِ G. ليكن $v_h v_i$ ضلعاً في G بحيث $h < i$ وليكن j دليل الوصول العمقي للرأس v_i. عندئذٍ، $v_h v_i$ جسر في G إذا وفقط إذا كان كل من الرؤوس $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j$ ليس مجاوراً في G لأي رأس v_k بحيث $k < i$ والرأس v_i ليس مجاوراً في G لأي رأس v_t بحيث $h \ne t < i$.

البرهان

بناءً على تمهيدية(٨,١) فإن توابع v_i في T هي $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j$. ليكن $v_h v_i$ جسراً في G ولتكن G_1, G_2 مركبتي $G - v_h v_i$ بحيث v_h رأس في G_1 و v_i رأس في G_2. إذن توابع v_i رؤوس في G_2 بينما $v_1, v_2, \dots, v_h, \dots, v_{i-1}$ رؤوس في G_1 وعليه يتحقق المطلوب.

لإثبات الاتجاه الآخر ولغرض الحصول على تناقض نفرض أن $v_h v_i$ ليس جسراً في G. إذن يوجد ممر $v_i, v_{k_1}, v_{k_2}, \dots, v_{k_m}, v_h$ في G لا يحتوي على الضلع

$v_h v_i$. إذا كان v_{k_1} ليس تابعاً لـِ v_i فإن v_i مجاور للرأس v_{k_1} في G و $h \neq k_1 < i$ وهذا تناقض. بينما إذا كان v_{k_1} تابعاً لِ v_i فإن v_{k_r}، حيث r أكبر دليل بحيث v_{k_r} تابع لِ v_i، يعطينا التناقض المطلوب.

خوارزمية (٨,١) (خوارزمية إنشاء توجيه)

المدخل: رسم مترابط G بدون جسور.

المخرج: توجيه للرسم G.

الخوارزمية

١- اختر رأساً x في G وأنشئ شجرة تقصٍ عمقي T لِ G جذرها x.

٢- وجِّه كل ضلع في T من طرفه ذي الدليل العمقي الأصغر إلى طرفه ذي الدليل العمقي الأكبر.

٣- وجِّه كل ضلع ليس في T من طرفه ذي الدليل العمقي الأكبر إلى طرفه ذي الدليل العمقي الأصغر.

مبرهنة (٨,١٠)

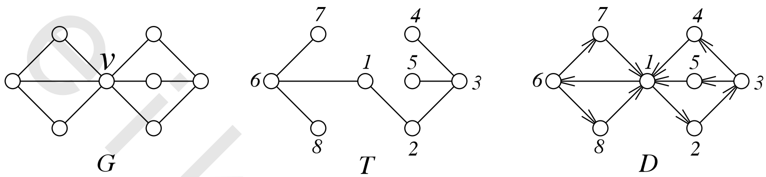
خوارزمية (٨,١) تعطي توجيهاً للرسم G.

البرهان

ليكن $v_1, v_2, \ldots, v_n$ الترقيم العمقي المصاحب للشجرة T. ينتج من مبرهنة (٨,٩) أنه لكل رأس $v_i \neq v_1$ يوجد رأس v_k بحيث $k < i$ و $v_k v_i$ ضلع في G أو يوجد تابع v_r لِ v_i بحيث $v_k v_r$ ضلع في G. إذن يوجد ممر موجه من v_i إلى v_1. ولكن يوجد ممر أضلاعه في T من v_1 إلى أي رأس آخر، وعليه يوجد ممر موجه من أي رأس إلى أي رأس آخر. وعليه نحصل على رسم مترابط بقوة. أي، نحصل على توجيه للرسم G.

مثال (٨,٢)

في شكل(٨,٤)، بتطبيق خوارزمية (٨,١) على الرسم G بدءاً من الجذر v نحصل أولاً على الشجرة T ومن ثم نحصل على توجيه D للرسم G حيث عُلّم كل من الرؤوس بدليله العمقي.

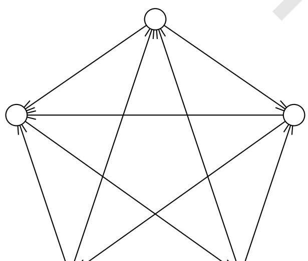


شكل(٨,٤).

تمارين (٨,٢)

١- أعط مثالاً لرسم موجه نصف هاملتوني بحيث لا يكون رسم مسابقة.

٢- جد ممراً موجهاً هاملتونيًا في رسم المسابقة المعطى في شكل(٨,٥).



شكل(٨,٥).

٣- إذا كان G رسم مسابقة وكان x رأساً في G بحيث $d^+(x) = \Delta^+(G)$ فأثبت أنه يمكن الوصول إلى أي رأس من x بممر موجه طوله على الأكثر 2.

٤- أثبت مبرهنة (٨,٧).

٥- إذا كان G رسم مسابقة فأثبت أن $\sum_{v \in V}\left(d^{+}(v)\right)^{2}=\sum_{v \in V}\left(d^{-}(v)\right)^{2}$.

٦- ليكن G رسم مسابقة. نقول إن G متعدٍ إذا تحقق ما يلي : كلما كان (x,y) و (y,z) ضلعين موجهين في G فإن (x,z) ضلع موجه في G.

(أ) أثبت أنه إذا كان G رسم مسابقة عدد رؤوسه $n>1$ ويحتوي على دورة موجهة فإن G غير متعدٍ.

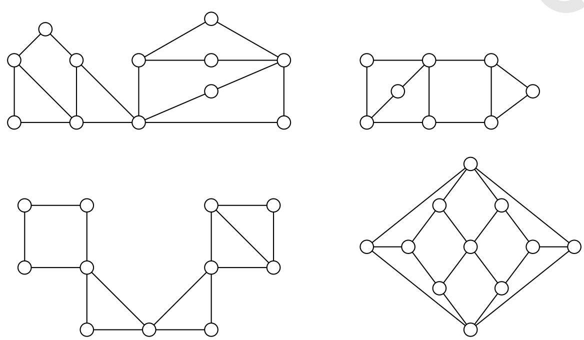
(ب) أثبت أنه إذا كان G رسم مسابقة ولا يحتوي على دورات موجهة فإن G متعدٍ.

(جـ) أثبت أنه إذا كان G رسم مسابقة فإن G يكون متعديًا إذا وفقط إذا كان G لا يحتوي على دورات موجهة ثلاثية.

(د) أثبت أنه إذا كان G رسم مسابقة فإن G يكون متعديًا إذا وفقط إذا كان G يحتوي على ممر موجه هاملتوني وحيد.

(هـ) أثبت أنه إذا كان G رسم مسابقة متعدٍ عدد رؤوسه $n \geq 2$ فإن G غير مترابط بقوة.

٧- بيّن أنه يوجد توجيه لكل رسم من الرسوم الموضحة في شكل(٨,٦)، ثم جد توجيهاً له.



شكل(٨,٦).