الفصل السابع

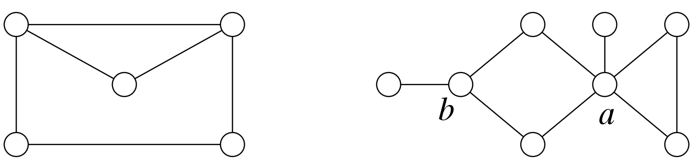
الترابطية والترابطية الضلعية
CONNECTIVITY AND EDGE CONNECTIVITY

(٧,١) المفاصل

ليكن $G=(V,E)$ رسمًا وليكن $v\in V$. نقول إن v **مفصل** articulation point أو رأس **قطع** cut vertex في G إذا كان $\omega(G-v)>\omega(G)$ ، حيث $\omega(G)$ ترمز إلى عدد مركبات G.

مثال (٧,١)

ليكن G و H الرسمين المبينين أدناه في شكل(٧,١). بما أن $\omega(G-a)=3>\omega(G)=1$ فإن a مفصل في G. كذلك، b مفصل في G لأن $\omega(G-b)=2>\omega(G)=1$. أما الرسم H فإنه لا يحتوي على أي مفصل لأن $\omega(H-x)=\omega(H)$ لكل رأس x في H.



H G

شكل(٧,١).

المبرهنة التالية تبين أنه يمكن تمييز المفاصل باستخدام الممرات.

مبرهنة (٧,١)

ليكن $G=(V,E)$ رسماً مترابطًا وليكن $v\in V$. عندئذٍ، التقارير التالية متكافئة :

(أ) v مفصل في G.

(ب) توجد تجزئة $\{A_1,A_2\}$ للمجموعة $V-\{v\}$ بحيث لكل $x\in A_1$ و $y\in A_2$ فإن v ينتمي إلى كل ممر من x إلى y.

(ج) يوجد رأسان $v_1,v_2\in V$ مختلفان عن v بحيث ينتمي v إلى كل ممر من v_1 إلى v_2.

البرهان

(أ) $\Leftarrow$ (ب) بما أن v مفصل في الرسم المترابط G فإن $\omega(G-v)\geq 2$. لتكن $C_i=(V_i,E_i),\ i=1,2,\cdots,m$ هي جميع مركبات $G-v$. ضع $A_1=V_1$ و $A_2=V_2\cup V_3\cup\cdots\cup V_m$. واضح أن $\{A_1,A_2\}$ تجزئة للمجموعة $V-\{v\}$ وأنه إذا كان $x\in A_1$ و $y\in A_2$ فإن x و y ينتميان إلى مركبتين مختلفتين من مركبات الرسم $G-v$. وعليه فإن v ينتمي إلى كل ممر من x إلى y.

(ب) $\Leftarrow$ (ج) واضح أن (ج) حالة خاصة من (ب).

(ج) $\Leftarrow$ (أ) إذا كان v ينتمي إلى كل ممر من v_1 إلى v_2 في الرسم المترابط G فإنه لا يوجد ممر من v_1 إلى v_2 في الرسم $G-v$ ؛ وعليه فإن $G-v$ غير مترابط. إذن v مفصل في G. □

النتيجة التالية تقول إنه لا يوجد رسم بحيث تتكون مجموعة رؤوسه من مفاصل فقط.

مبرهنة (٧,٢)

إذا كان $G=(V,E)$ رسماً بحيث $|V|=n\geq 2$ فإنه يوجد على الأقل رأسان $x,y\in V$ بحيث كل من x و y ليس مفصلاً في G.

البرهان

نفرض أولاً أن G رسم مترابط، ولغرض التناقض نفرض أن جميع رؤوس G مفاصل باستثناء رأس واحد على الأكثر. ليكن $a,b\in V$ رأسين بحيث

$$d(a,b)=\max\{d(u,v):u,v\in V\}$$

استنادًا إلى الفرض فإن واحداً على الأقل من a و b مفصل. ليكن a مفصلاً في G. إذن $G-a$ رسم غير مترابط، وعليه فإنه يوجد $v\in V$ بحيث v و b لا ينتميان إلى المركبة نفسها في الرسم $G-a$؛ واضح أن a ينتمي إلى كل ممر من v إلى b. إذن، في الرسم G، أقصر ممر من v إلى b يحتوي على أقصر ممر من a إلى b. وهذا يتناقض مع اختيارنا للرأسين a و b.

واضح أنه إذا كان G غير مترابط ويتكون من رؤوس منعزلة فقط فإن G يحقق المطلوب. أما إذا كان G غير مترابط وإحدى مركباته تحتوي على رأسين على الأقل فإن G يحقق المطلوب بناءً على الفقرة الأولى. □

نقول إن الرسم H **قالب** block إذا كان مترابطًا ولا يحتوي على مفاصل. وإذا كان G رسماً مترابطاً وكان B رسماً جزئيًا من G فإن B يسمى قالباً في G إذا كان B قالباً وأعظمياً بالنسبة إلى هذه الخاصة. ويسمى B **قالباً طرفياً** end – block في G إذا احتوى B على مفصل واحد من مفاصل G.

ملحوظة

١- إذا كان B قالباً في G فإن B محدث بالمجموعة $V(B)$.

٢- إذا كانت $\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$ مجموعة قوالب $G=(V,E)$ فإن $P=\{E(B_1),E(B_2),\cdots,E(B_m)\}$ تجزئة للمجموعة E.

٣- إذا كان B_1 و B_2 قالبين في G فإن $V(B_1)\cap V(B_2)$ تكون ϕ أو تكون مجموعة مفردة تحتوي على مفصل.

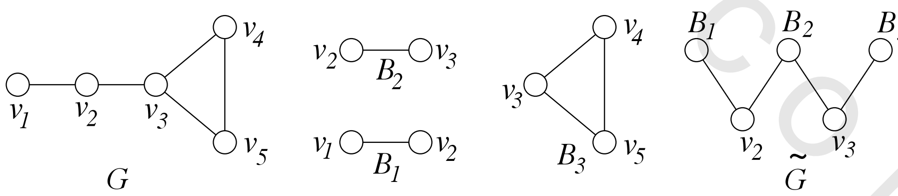
٤- إذا كان e_1 و e_2 ضلعين متجاورين ولم يكن طرفهما المشترك مفصلاً فإنهما ينتميان إلى القالب نفسه.

٥- الرسم الجزئي المكون من ضلع واحد e يكون قالباً إذا وفقط إذا كان e جسرًا.

٦- إذا كانت C دورة فإن C تكون محتواة في قالب.

مثال (٧,٢)

شكل(٧,٢) يبين رسماً G مع قوالبه B_1,B_2,B_3 :



شكل(٧,٢).

ليكن $G=(V,E)$ رسماً، $A\neq\phi$ مجموعة مفاصل G، B مجموعة قوالب G. نقرن بالرسم G رسماً ثنائي التجزئة $\tilde{G}=(A\cup B,\tilde{E})$ بحيث لكل

$x \in A \,, y \in B$ فإن $\{x, y\} \in \tilde{E}$ إذا وفقط إذا كان المفصل x رأسًا في القالب y. نسمي $\tilde{G}$ **رسم القوالب والمفاصل** block-cutpoint graph للرسم G.

مثال (٧,٣)

بالإشارة إلى الرسم G ، المعطى في مثال(٧,٢) فإن $\tilde{G}$ مبين في شكل(٧,٢).

مبرهنة (٧,٣)

إذا كان $G = (V, E)$ رسماً بحيث $A \neq \phi$ فإن $\tilde{G} = \left(A \cup B, \tilde{E}\right)$ غابة.

البرهان

لغرض التناقض، نفرض أن $\tilde{G}$ يحتوي على دورة $\tilde{C} : a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_n b_n a_1$ حيث $b_i \in B, a_i \in A$. إذن توجد دورة $C : a_1 e_1 \cdots a_2 e_2 \cdots a_n e_n \cdots a_1$ في G بحيث ينتمي الضلع e_i إلى القالب b_i. بما أن e_i ينتمي إلى القالب b_i وإلى الدورة C فإن b_i يحتوي على C. إذن b_1 و b_2 لديهما أكثر من رأس مشترك، وهذا تناقض. وعليه فإن $\tilde{G}$ لا يحتوي على دورات.

مبرهنة (٧,٤)

إذا كان $G = (V, E)$ رسماً مترابطاً بحيث $A \neq \phi$ فإن $\tilde{G} = \left(A \cup B, \tilde{E}\right)$ شجرة أوراقها قوالب.

البرهان

ليكن $P : x = a_1, e_1, v_2, e_2, \cdots, a_n = y$ ممرًا من المفصل x إلى المفصل y في الرسم المترابط G. بما أن أي ضلعين ينتميان إلى القالب نفسه عندما لا يكون طرفهما المشترك مفصلاً ؛ فإن P يعطينا مسارًا

$$Q : a_1 b_0' a_1' b_1' a_2' b_2' \cdots a_m' b_m' a_m$$

من $x=a_1$ إلى $y=a_n$ في $\tilde{G}$ حيث $a_i' \in A$ و $b_i' \in B$.وإذا كان $a,a' \in A$ و $b,b' \in B$ بحيث a رأس في b و a' رأس في b' فإنه يمكن إنشاء مسار S من a إلى a' في $\tilde{G}$. وبإضافة b أو b' إلى S حسب الحاجة فإنه يمكن إنشاء مسار بين أي اثنين من a,a',b,b'. وعليه فإن $\tilde{G}$ رسم مترابط. وبما أن $\tilde{G}$ غابة فإن $\tilde{G}$ شجرة.

واضح أن $\deg_{\tilde{G}}(x)>1$ لكل $x \in A$. إذن، لكل $x \in A$، فإن x ليس ورقة في الشجرة $\tilde{G}$. وهكذا فإن أوراق $\tilde{G}$ قوالب.

نتيجة (٧,١)

إذا كان G رسماً بحيث $A \neq \phi$ فإنه يوجد على الأقل قالبان طرفيان في G.

البرهان

بما أن $\tilde{G}$ شجرة عدد رؤوسها أكبر من 1 فإنه يوجد على الأقل رأسان y,x في $\tilde{G}$ بحيث درجة كل من y,x تساوي 1. وبما أن أوراق $\tilde{G}$ قوالب فينتج أن كلاً من y,x قالب.

تمارين (٧,١)

١- إذا كان $G=(V,E)$ رسماً بحيث $A \neq \phi$ وعدد مركباته k فأثبت أن عدد قوالب G يساوي $k+\sum_{v \in V}(b(v)-1)$ حيث $b(v)$ هو عدد القوالب التي تحتوي على v.

٢- في أي رسم، أثبت أن عدد المفاصل أصغر من عدد القوالب.

٣- إذا كان $G=(V,E)$ رسماً فأثبت ما يلي:

لكل $x \in V$ فإن $\deg x$ عدد زوجي إذا وفقط إذا كان كل قالب في G أويلريًا.

٤- ليكن $G=(V,E)$ رسماً بحيث $V=\{1,2,\cdots,11\}$ و $\{x,y\}\in E$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(x,y)>1$. عين قوالب G.

٥- ليكن B قالباً بحيث يحتوي على أكثر من ضلع. أثبت أن أي ضلع من أضلاع B يجب أن يكون محتوىً في إحدى دورات B.

٦- إذا كان $G=(V,E)$ رسماً بحيث $A\neq\phi$ فأثبت أنه يوجد $x\in A$ بحيث تكون الرؤوس المجاورة للمفصل x في $\bar{G}$، باستثناء واحد على الأكثر، قوالب في G.

٧- أثبت أنه إذا كان x مفصلاً في الرسم المترابط G فإن x ليس مفصلاً في الرسم المتمم $\bar{G}$.

٨- أثبت ما جاء في الملحوظة.

٩- ليكن G رسماً مترابطاً عدد رؤوسه أكبر من 2. أثبت أنه إذا وجد جسر في G فإنه يوجد مفصل في G.

١٠- أثبت أن الرأس x مفصل في الشجرة T إذا وفقط إذا كان $\deg(x)>1$.

١١- إذا كان G رسماً متمركزاً ذاتياً فبيّن أن G لا يحتوي على مفاصل.

(٧,٢) الترابطية

ليكن $G=(V,E)$ رسماً مترابطاً.

(أ) تسمى $W\subseteq V$ **مجموعة مفصلية** vertex cut في G إذا كان $G-W$ غير مترابط.

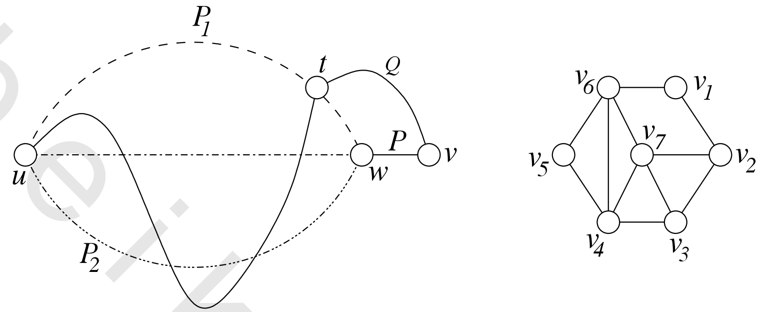
(ب) الرمز $\kappa(G)$ يدل على **ترابطية** connectivity G التي تعرف كما يلي :

$$\kappa(G)=\min\{|W|:W\subseteq V \text{ حيث } G-W \text{ تافه أو غير مترابط}\}$$

(ج) نقول إن G **مترابط من النوع** n n-connected إذا كان $\kappa(G)\geq n\geq 1$.

مثال (٧,٤)

ليكن $G=(V,E)$ هو الرسم الموضح في شكل(٧,٣)(أ).



(ب) (أ)

شكل(٧,٣).

نلاحظ أن G قالب وأن كلاً من $\{v_1,v_7,v_4\}$ ، $\{v_6,v_7,v_3\}$ ، $\{v_6,v_4\}$ **مجموعة مفصلية** في G. ونلاحظ أن $\kappa(G)=2$ ، وعليه فإن G مترابط من النوع 2 كما أنه مترابط من النوع 1 ولكنه ليس مترابطاً من النوع 3.

ملحوظة

من السهل التحقق مما يلي :

١- $\kappa(K_n)=n-1$ وإذا كان G رسماً غير تام عدد رؤوسه n فإن $\kappa(G)\le n-2$.

٢- $\kappa(K_{m,n})=\min\{m,n\}$.

٣- $G=(V,E)$ مترابط من النوع 1 إذا وفقط إذا كان G مترابطاً و $|V|\ge 2$.

٤- $G=(V,E)$ مترابط من النوع 2 إذا وفقط إذا كان G قالباً و $|V|\ge 3$.

٥- $\kappa(G)=0$ إذا وفقط إذا كان G تافهًا أو غير مترابط.

لتكن $S=\{P_1,P_2,\cdots,P_m\}$ مجموعة ممرات من الرأس u إلى الرأس v. نقول إن S **منفصلة داخلياً** internally disjoint إذا كان $V(P_i)\cap V(P_j)=\{u,v\}$ لكل $i\neq j$.

المبرهنة التالية تعطينا تمييزًا للرسوم المترابطة من النوع 2 باستخدام الممرات المنفصلة داخليًا.

مبرهنة (٧,٥)

ليكن $G=(V,E)$ رسماً بحيث $|V|\geq 3$. عندئذٍ، G مترابط من النوع 2 إذا وفقط إذا كان لكل $u,v\in V$، $u\neq v$، يوجد ممران منفصلان داخليًا من u إلى v.

البرهان

لنفرض أولاً أنه لكل $u,v\in V$، $u\neq v$، يوجد ممران منفصلان داخليًا من u إلى v. إذن G مترابط. ولإثبات أن G لا يحتوي على مفاصل باستخدام التناقض، نفرض أن w مفصل في G. ينتج من مبرهنة (٧,١) أنه يوجد رأسان مختلفان $u\neq w$, $v\neq w$ بحيث ينتمي w إلى كل ممر من u إلى v. وهذا يناقض الفرض أنه يوجد ممران منفصلان داخليًا من u إلى v. وعليه فإن G مترابط من النوع 2.

نفرض الآن أن G مترابط من النوع 2. نستخدم الاستقراء الرياضي على المسافة لإثبات أنه لكل رأسين مختلفين $u,v\in V$ يوجد ممران منفصلان من u إلى v.

لتكن $d(u,v)=1$. إذن u,v يصل بينهما ضلع وليكن $e=\{u,v\}$. بما أن كلاً من u,v ليس مفصلاً في G فإن e ليس جسرًا في G. وعليه فإن e محتوى في دورة C في G. واضح أن C تعطينا ممرين منفصلين داخليًا من u إلى v.

نفرض الآن أن $k \ge 1$ وأن المطلوب صحيح لكل رأسين مختلفين المسافة بينهما أقل من أو تساوي k ونفرض أن $d(u,v)=k+1$. ليكن $p: u\cdots wv$ ممرًا طوله $k+1$ من u إلى v. إذن $d(u,w)=k$ وعليه فإنه يوجد ممران منفصلان داخليًا P_1 و P_2 من u إلى w في G. انظر شكل(٧,٣)(ب).

بما أن w ليس مفصلاً في G فإن $G-w$ مترابط. إذن يوجد ممر Q من u إلى v في $G-w$. ليكن t هو آخر رأس ينتمي إلى Q بحيث t ينتمي أيضًا إلى P_1 أو إلى P_2. نفرض الآن أن t ينتمي إلى P_1 وننشئ ممرين منفصلين داخليًا من u إلى v في G [إذا كان t ينتمي إلى P_2 فالإنشاء مشابه] كما يلي:

الممر الأول يتكون من جزئين: جزء مأخوذ من P_1 بحيث يبدأ من u وينتهي في t والجزء الآخر مأخوذ من Q بحيث يبدأ من t وينتهي في w. أما الممر الثاني فيتكون أيضًا من جزئين: جزء مأخوذ من P_2 بحيث يبدأ من u وينتهي في w والجزء الآخر هو v, wv, w. □

للحصول على تمييزات أخرى للرسوم المترابطة من النوع 2 فإننا نحتاج إلى التمهيدية التالية.

تمهيدية (٧,١)

ليكن $G=(V,E)$ رسماً مترابطاً من النوع k، وليكن G' رسماً حصلنا عليه من G بعد إضافة رأس جديد x بحيث $|N(x)| \ge k$. عندئذٍ، G' رسم مترابط من النوع k.

البرهان

لتكن A مجموعة مفصلية في G'. إذا كان $x \in A$ فإن $A-\{x\}$ مجموعة مفصلية في G. وبما أن G مترابط من النوع k فإن $|A-\{x\}| \ge k$؛ أي

$|A| \geq k+1$. نفـــرض الآن أن $x \notin A$. إذا كانـــت $N(x) \subseteq A$ فـــإن $|A| \geq |N(x)| \geq k$. أما إذا كانت $N(x) \not\subseteq A$ فإن مركبة $G'-A$ التي تحتوي على x تحتوي أيضًا على $N(x)-A$ ؛ وعليه فإن A مجموعة مفصلية في G. إذن $|A| \geq k$.

مبرهنة (٧,٦)

ليكن $G=(V,E)$ رسماً بحيث $|V| \geq 3$. عندئذٍ، العبارات التالية متكافئة.

١- G مترابط وبلا مفاصل ؛ أي G مترابط من النوع 2.

٢- لكل $u,v \in V$ ، $u \neq v$ ، فإنه يوجد ممران منفصلان داخليًا من u إلى v.

٣- لكل $u,v \in V$ ، $u \neq v$ ، فإنه توجد دورة تحتوي على v,u.

٤- $\delta(G) \geq 1$ ولكل $c,e \in E$ ، $c \neq e$ ، فإنه توجد دورة تحتوي على e,c.

البرهان

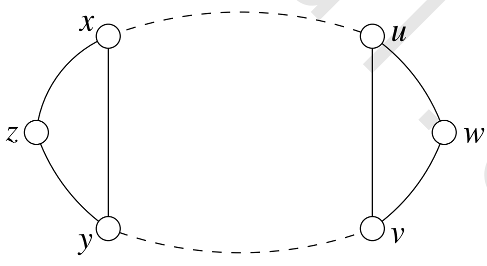
تبين مبرهنة (٧,٥) أن (١) $\Leftrightarrow$ (٢).

واضح أن (٢) $\Leftrightarrow$ (٣) لأنه إذا وجد ممران منفصلان داخليًا من u إلى v فإنهما يعطيان دورة تحتوي على u و v ؛ وإذا وجدت دورة تحتوي على u و v فإنها تعطينا ممرين منفصلين داخليًا من u إلى v.

نثبت الآن أن (٤) $\Leftarrow$ (٣). افرض أن u و v رأسان مختلفان. بما أن $\delta(G) \geq 1$ فإن كلاً من u و v رأس غير منعزل. إذن يوجد ضلع c' ساقط على u وضلع e' ساقط على v. إذا كان $c' \neq e'$ فإنه ينتج من (٤) أنه توجد دورة تحتوي على c' و e' ؛ وهذه الدورة تحتوي على u و v. أما إذا كان $c'=e'$ فإننا نختار أي ضلع آخر $f \neq c'$ لنحصل على دورة تحتوي على c' و f ؛ وهذه الدورة تحتوي على u و v.

يتبقى إثبات أن (٣)⇐(٤). بما أن (٣) متحققة فينتج أن (١) متحققة، وعليه فإن G مترابط. إذن $\delta(G) \geq 1$. ليكن $c = \{u,v\}$ و $e = \{x,y\}$ ضلعين بحيث $c \neq e$. وليكن G' الرسم الذي نحصل عليه من G بعد إضافة رأسين جديدين w و z بحيث $N(w) = \{u,v\}$ و $N(z) = \{x,y\}$. انظر شكل(٧,٤).

بما أن G مترابط من النوع 2، فإنه ينتج من تمهيدية(٧,١) أن G' مترابط من النوع 2. وعليه فإن G' يحقق العبارة (٣) المكافئة للعبارة (١). إذن توجد دورة C' في G' تحتوي على كل من w و z. وبما أن درجة كلٍ من w و z في G' تساوي 2 فإن C' تحتوي على كل من الممرين x,z,y و u,w,v ولكنها لا تحتوي على أي من الضلعين xy و uv. نستبدل الآن الضلع xy بالممر x,z,y والضلع uv بالممر u,w,v في C' فنحصل على دورة C في G تحتوي على كل من الضلعين xy و uv.



شكل(٧,٤).

(٧,٣) الترابطية الضلعية

ليكن $G = (V,E)$ رسماً مترابطاً.

(أ) تسمى $L \subseteq E$ **مجموعة جسرية** edge cut في G إذا كان $G - L$ غير مترابط.

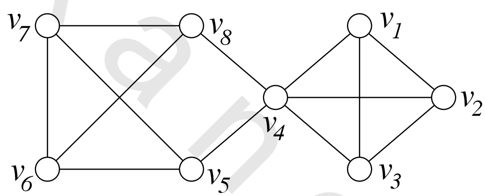
(ب) الرمز $\kappa'(G)$ يدل على **الترابطية الضلعية** edge connectivity للرسم G والتي تعرف كما يلي :

$$\kappa'(G) = \min\{|L| : \text{تافه أو غير مترابط } G-L \text{ بحيث } L \subseteq E\}$$

(ج) نقول إن G **مترابط ضلعياً من النوع** n n-edge connected إذا كان $\kappa'(G) \geq n \geq 1$.

مثال (٧,٥)

ليكن $G = (V, E)$ هو الرسم الموضح في شكل(٧,٥).



شكل(٧,٥).

نلاحظ أن G مترابط وأن كلاً من $\{v_4v_8, v_4v_5\}$ ، $\{v_4v_8, v_5v_7, v_5v_6\}$ ، $\{v_6v_5, v_6v_8, v_7v_5, v_7v_8\}$ مجموعة جسرية في G. ونلاحظ أن $\kappa'(G) = 2$ ، وعليه فإن G مترابط ضلعياً من النوع 2 كما أنه مترابط ضلعياً من النوع 1 ولكنه ليس مترابطاً ضلعياً من النوع 3.

تصف المبرهنة التالية العلاقة بين الترابطية والترابطية الضلعية.

مبرهنة (٧,٧)

إذا كان $G = (V, E)$ رسماً فإن

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$$

البرهان

سنثبت أولاً أن $\kappa'(G) \le \delta(G)$. نختار رأسًا $v \in V$ بحيث $\deg v = \delta(G)$ ونعتبر الرسم H الناتج من G بعد حذف جميع الأضلاع الساقطة على v. واضح أن v رأس منعزل في H وعليه فإن H تافه أو غير مترابط. إذن $\kappa'(G) \le \delta(G)$.

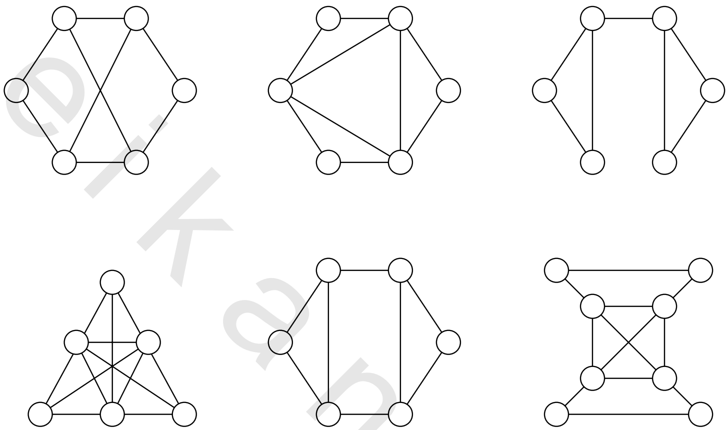
سنثبت الآن أن $\kappa(G) \le \kappa'(G)$. إذا كان $\kappa'(G) = 0$ فإن G تافه أو غير مترابط ؛ وعليه فإن $\kappa(G) = 0$. أما إذا كان $\kappa'(G) = 1$ فإن G رسم مترابط يحتوي على جسر ؛ وعليه فإن $G \cong K_2$ أو G يحتوي على مفصل واحد على الأقل. إذن $\kappa(G) = 1$.

نفرض الآن أن $\kappa'(G) = m \ge 2$. نختار مجموعة جسرية $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ في G. ليكن $G_1 = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_{m-1}\}$ و $e_m = uv$. واضح أن G_1 رسم مترابط وأن e_m جسر في G_1. لكل $i = 1, 2, \cdots, m-1$ نختار الآن طرفًا للضلع e_i مختلفًا عن كل من u , v ونفرض أن A هي مجموعة الأطراف المختارة. واضح أن $|A| \le m-1$. ليكن $G_2 = G - A$. إذا كان G_2 غير مترابط فإن $\kappa(G) \le m-1 < m = \kappa'(G)$. أما إذا كان G_2 مترابطاً فإنه ينتج من كون G_2 رسماً جزئيًا محدثًا في G_1 ومن كون e_m جسرًا في G_1 أن $G_2 \cong K_2$ أو e_m جسر في G_2. أي $G_2 \cong K_2$ أو G_2 يحتوي على مفصل. وعليه فإنه يوجد رأس في G_2 بحيث إذا حذف هذا الرأس نحصل على رسم تافه أو غير مترابط. إذن $\kappa(G) \le \kappa'(G)$.

تمارين (٧,٢)

١- إذا كان G هاملتونيًا فأثبت أن G مترابط من النوع 2.

٢- جد ترابطية كل رسم من الرسوم في شكل(٧,٦).



شكل(٧,٦).

٣- إذا كان G رسماً عدد رؤوسه $n \geq 2$ فأثبت أن $\kappa(G) \leq \frac{2m}{n}$ حيث m هو عدد أضلاع G.

٤- إذا كان $\delta(G) \geq n-2$، حيث n عدد رؤوس G، فأثبت أن $\kappa(G)=\delta(G)$. أعط مثالاً لرسم G بحيث $\delta(G)=n-3$، $\kappa(G)<\delta(G)$.

٥- إذا كان G رسماً قطره يساوي 2 فأثبت أن $\kappa'(G)=\delta(G)$.

٦- احسب $\kappa'(K_{m,n})$ حيث $1 \leq m \leq n$.

٧- أعط مثالاً لرسم G بحيث $\kappa(G)<\kappa'(G)<\delta(G)$.

٨- جد الترابطية الضلعية لكل من الرسوم المعطاة في التمرين ٢.

٩- ليكن G رسماً مترابطاً من النوع n ولتكن $v_1,v_2,\cdots,v_n$ رؤوسًا مختلفة في G. ننشئ رسماً H بإضافة رأس جديد x مجاورٍ لكل من $v_1,v_2,\cdots,v_n$. أثبت أن H مترابط من النوع n.

١٠- ليكن G رسماً مترابطاً من النوع n. أثبت أن $G+K_1$ (أي مضموم G و K_1) مترابط من النوع $n+1$.

١١- إذا كان $\delta(G)\geq\frac{n}{2}$، حيث n عدد رؤوس G، فأثبت أن $\kappa'(G)=\delta(G)$.

أعط مثالاً لرسم G بحيث

$$\kappa'(G)<\delta(G),\delta(G)=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)$$