الفصل السادس

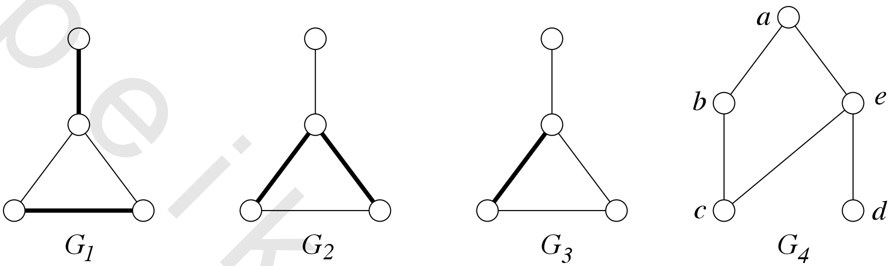
الموائمة
MATCHING

نقدم في هذا الفصل النتائج الأساسية المتعلقة بالموائمات في الرسوم، ومن ثم نقدم بعض أهم مبرهنات الموائمة والتي منها مبرهنتا بيرج وهول، وأخيراً نقدم خوارزمية لإيجاد الموائمة العظمى في رسم ثنائي التجزئة.

(٦,١) تعاريف ونتائج أساسية

نقول إن الضلعين e_1, e_2 **متجاوران** adjacent في الرسم G إذا كان لهما طرف مشترك، و نقول إنهما **مستقلان** independent إذا لم يكونا متجاورين. نسمي مجموعة جزئية، M، من مجموعة الأضلاع لرسم $G = (V, E)$ **موائمة** matching في G إذا كان كل ضلعين من M مستقلين في G. من الواضح أن المجموعة الخالية تمثل موائمة في أي رسم. في شكل(٦,١) الأضلاع الغامقة تمثل موائمة في الرسم G_1 بينما الأضلاع الغامقة لا تمثل موائمة في الرسم G_2. تسمى الموائمة M في رسم G **موائمة أعظمية** maximal matching إذا كان $M \cup \{e\}$ ليست موائمة لكل ضلع $e \notin M$. كما تسمى الموائمة M في رسم G **موائمة عظمى** maximum matching إذا كان $|M| \geq |M'|$ لكل موائمة M' في G (أي M عظمى بالنسبة لعدد الأضلاع).

في شكل(٦,١) الأضلاع الغامقة في الرسم G_1 تمثل موائمة أعظمية وعظمى في نفس الوقت في حين تمثل الأضلاع الغامقة في الرسم G_3 موائمة أعظمية وليست عظمى.



شكل(٦,١).

لتكن M موائمة في رسم G. نقول إن الرأس v في G **مغطى بالموائمة** M covered by إذا كان v طرفاً لضلع في M، ونقول إن v **غير مغطى بالموائمة** M إذا كان v ليس طرفاً لأي ضلع في M. نعرف **الموائمة الكاملة** perfect matching على أنها موائمة تغطي جميع الرؤوس. من الواضح أن الرسم الذي عدد رؤوسه عدد فردي لا يحتوي على موائمة كاملة. لاحظ أن الأضلاع الغامقة في الرسم G_1 تمثل موائمة كاملة.

سنستخدم التمهيدية التالية في إثبات مبرهنة بيرج Berge.

تمهيدية (٦,١)

إذا كانت M_1, M_2 موائمتين في رسم G، فإن أي مركبة للرسم الجزئي H المولّد للرسم G بحيث $E(H) = (M_1 - M_2) \cup (M_2 - M_1)$ تكون واحدة من الأنواع التالية:

١- رأس منعزل.

٢- دورة زوجية متناوبة الأضلاع بين M_1 و M_2.

٣- ممر متناوب الأضلاع بين M_1 و M_2 بحيث تكون بداية الممر مغطاة بإحدى الموائمتين فقط ونهايته مغطاة بالموائمة الأخرى فقط.

البرهان

لاحظ أن $\deg_H(x) \le 2$ لكل $x \in V(H)$ ، لأنه لو كان v رأساً يحقق $\deg_H(v) \ge 3$ فإن هذا يعني أنه يوجد ضلعان متجاوران في إحدى الموائمتين، وهذا يناقض كون M_1, M_2 موائمتين. عليه، أي مركبة في H إما رأس منعزل وإما ممر أو دورة. بما إنه لا يوجد ضلعان متجاوران في موائمة، فإن أضلاع الدورة والممر في H متناوبة بين M_1 و M_2. عليه فكل دورة زوجية. بقي أن نثبت (٣). ليكن الممر P مركبة في H وليكن u طرفاً له. ليكن e هو الضلع الذي أحد طرفيه u في P. لنفرض أن $e \in M_1 - M_2$. بما أن u طرف للممر P فإن $\deg_H(u) = 1$ ومنه فإن u غير مغطى بالموائمة M_2. □

للحصول على موائمات عظمى نحتاج إلى تعريفات جديدة. لتكن M موائمة في الرسم $G = (V, E)$ ، نعرف **المـمر المتناوب بالنسبة لـ M** M-alternating path في G بأنه ممر متناوب الأضلاع بين M و $E - M$. كذلك نقول عن الممر المتناوب بالنسبة لـ M بأنه **ممر موسِّع لـ M** M-augmenting path إذا كان طرفاه غير مغطيين بِـ M.

المبرهنة التالية تعطي تمييزاً للموائمة العظمى وهي تعود إلى العالم الرياضي بيرج، وتعتبر أساس خوارزمية إيجاد موائمة عظمى في رسم.

مبرهنة (٦,١) (بيرج)

الموائمة M في رسم G موائمة عظمى إذا وفقط إذا كان لا يوجد ممر موسِّع لـ M في G.

البرهان

لنفرض أن M موائمة عظمى في G و لنبرهن أنه لا يوجد ممر موسع لـ M في G. نبرهن ذلك بطريقة البرهان بالتناقض. لنفرض أن P ممر موسع لـ M في G. بما إن P ممر توسيع فإنه فردي. لنرمز للأضلاع التي تنتمي إلى كل من P و M بالرمز M' و لتكن M'' هي مجموعة أضلاع P التي لا تنتمي إلى M'. عندئذ $M^* = (M - M')\cup M''$ موائمة في G و $|M^*| = |M| + 1$. وهذا يناقض كون M موائمة عظمى.

لإثبات الاتجاه الآخر، افرض أن M موائمة في G بحيث لا يوجد ممر موسع لها في G. افرض أن M' موائمة عظمى في G. ليكن H هو الرسم المُولد لـ G بحيث $E(H) = (M - M')\cup(M' - M)$. لتكن H_1 مركبة في H ليست رأساً منعزلاً ولا دورة. من تمهيدية (٦,١) H_1 ممر أضلاعه متناوبة بين M و M'. لوكان الممر H_1 فردياً فإنه سيكون ممراً موسعاً في G لـ M أو M' وبما أنه لا يوجد ممر موسع لـ M في G فإن H_1 ممر موسع لـ M' في G. إذن من برهان الجزء الأول من هذه المبرهنة ينتج أن M' ليست موائمة عظمى وهذا يناقض الفرض أن M' موائمة عظمى في G. عليه H_1 زوجي ومنه $|M| = |M'|$. أي أن M موائمة عظمى في G. □

المبرهنة التالية المنسوبة إلى كونج وهول Konig-Hall تقدم خاصية مهمة في مجال المواثمات في الرسوم ثنائية التجزئة. إذا كانت S مجموعة غير خالية من مجموعة الرؤوس في رسم G، فإننا نرمز **لجوار** S في G بالرمز $N(S)$ أو بالرمز $N_G(S)$ عند اللزوم ونعرفه كما يلي: $v \in N(S)$ إذا كان v يجاور رأساً من رؤوس S.

مبرهنة (٦,٢) (كونج- هول)

إذا كان $G=(X\cup Y,E)$ رسماً ثنائي التجزئة، فإنه توجد موائمة في G تغطي X إذا وفقط إذا كان $|N(S)|\geq|S|$ لكل مجموعة جزئية S من X.

البرهان

إذا كانت M موائمة في G تغطي X فإنه من الواضح أن $|N(S)|\geq|S|$ لكل مجموعة جزئية S من X. سنبرهن الاتجاه الآخر بطريقة البرهان باستخدام المكافئ العكسي. افرض أنه لا توجد موائمة في G تغطي X. لتكن M موائمة عظمى في G. عليه يوجد رأس $u\in X$ غير مغطى بـ M. لنرمز بـ A لمجموعة الرؤوس في G التي يربطها بـ u ممر متناوب بالنسبة لـ M في G. من مبرهنة بيرج نستنتج أن u هو الرأس الوحيد في المجموعة A غير المغطى بـ M. أي أن M تغطي $A-\{u\}$. لتكن $S=A\cap X$ و $T=A\cap Y$. عليه M تغطي $S-\{u\}$ و T.

افرض أن $v\in S-\{u\}$. بما أن M تغطي $S-\{u\}$، فإنه يوجد ضلع $e=vw\in M$. بما أن $v\in A$، فإنه يوجد ممر P متناوب بالنسبة لـ M طرفاه u و v. إذا كان e ضلع في P، فإن $P-v$ ممر متناوب بالنسبة لـ M طرفاه u و w. أي أن $w\in A$ ومنه $w\in T$. وإذا كان e ليس ضلعاً في P، فإن $P+e$ ممر متناوب بالنسبة لـ M طرفاه u و w. أي أن $w\in A$ ومنه $w\in T$. عليه $|S|-1\leq|T|$.

لإثبات أن $|T|\geq|S|-1$، افرض أن $w'\in T$. بما أن M تغطي T، فإنه يوجد ضلع $e'=v'w'\in M$. بما أن $w'\in A$، فإنه يوجد ممر P' متناوب بالنسبة

لـ M طرفاه u و w'. إذا كان e' ضلعاً في P' ، فإن $P'-e'$ ممر متناوب بالنسبة لـ M طرفاه u و v'. أي أن $v' \in A$ ومنه $v' \in S$. وإذا كان e' ليس ضلعاً في P' ، فإن $P'+e'$ ممر متناوب بالنسبة لـ M طرفاه u و v'. أي أن $v' \in A$ ومنه $v' \in S$. لاحظ أن $v' \neq u$ لأن v' مغطى بـ M. عليه $v' \in S-\{u\}$ و منه $|T| \leq |S|-1$. □

نقول إن التجمع $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ، $k \geq 1$ ، من المجموعات غير الخالية له **مجموعة من الممثلات المختلفة** system of distinct representatives إذا وجدت مجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ عدد عناصرها k تحقق $a_i \in A_i$ لكل $1 \leq i \leq k$.

نتيجة (٦,١)

التجمع $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ، $k \geq 1$ ، من المجموعات غير الخالية له مجموعة من الممثلات المختلفة إذا وفقط إذا كان اتحاد أي j من هذه المجموعات يحوي على الأقل j من العناصر لكل $1 \leq j \leq k$.

البرهان

نكون الرسم ثنائي التجزئة $G=(A \cup B, E)$ على النحو التالي : $A=\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ ، $B=\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ ، $A_i b \in E$ إذا كان $b \in A_i$. إذا كانت $S=\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_j}\}$ مجموعة جزئية من A ، فإن $N(S)=A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_j}$ ومنه $|N(S)| \geq |S|$ إذا وفقط إذا كانت $A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_j}$ تحتوي على الأقل j عنصراً. إن مجموعة الممثلات، كل مع مجموعته التي يمثلها، تعطينا موائمة في G. من مبرهنة (٦,٢) ينتج المطلوب. □

إذا كان الرأس v طرفاً للضلع e ، فإننا نقول إن v **يغطي** e cover كما نقول إن e **يغطي** v. نقول عن مجموعة رؤوس S من رسم G إنها **غطاء رأسي**

vertex cover في G إذا كانت S تغطي جميع أضلاع G. كما نقول إن رؤوس التغطية S هي **غطاء رأسي أصغر** minimum vertex cover إذا كانت $|S| \geq |T|$ لكل غطاء رأسي T في G. في شكل(٦,١) كل من المجموعتين $\{a,c,d\}$ ، $\{b,e\}$ في الرسم G_4 غطاء رأسي في حين أن $\{b,e\}$ غطاء رأسي أصغر. كما نقول إن مجموعة T من أضلاع G **غطاء ضلعي** edge cover إذا كانت T تغطي جميع رؤوس G. لا حظ أنه لا يوجد غطاء ضلعي لرسم يحتوي على رأس منعزل.

إذا كانت M موائمة في رسم G ، فإن أي ضلعين من M لا يمكن تغطيتهما برأس واحد (لأنه لا يوجد بينهما رأس مشترك). ومنه $|S| \geq |M|$ لأي غطاء رأسي S في G، وعليه $\min|S| \geq \max|M|$.

من المناسب هنا التساؤل عن أنواع الرسوم التي يتحقق فيها $\min|S| = \max|M|$. المبرهنة التالية توضح أن هذه المساواة تتحقق في حالة الرسم ثنائي التجزئة. على سبيل المثال كل موائمة عظمى في مثلث (دورة طولها ثلاثة) تتكون من ضلع واحد في حين أن أي غطاء رأسي أصغر له يحتوي على رأسين.

مبرهنة (٦,٣)

إذا كان G رسماً ثنائي التجزئة فإن عدد أضلاع موائمة عظمى فيه يساوي عدد رؤوس أي غطاء رأسي أصغر.

البرهان

افرض أن $G = (X \cup Y, E)$ رسم ثنائي التجزئة وليكن S غطاءً رأسياً أصغر في G. يكفي لإثبات المطلوب برهان وجود موائمة عدد أضلاعها $|S|$.

لتكن $R = S \cap X$ و $T = S \cap Y$ وليكن H الرسم الجزئي من G المولد بالمجموعة $R \cup (Y - T)$ و H' الرسم الجزئي المولد بالمجموعة $T \cup (X - R)$.

سنستخدم مبرهنة (٦,٢) لإثبات أن H يحتوي على موائمة M_1 تغطي R وأن H' يحتوي على موائمة M_2 تغطي T.

بما أن H و H' منفصلان فإن $M_1 \cup M_2$ موائمة في G عدد أضلاعها يساوي $|S|$.

بما أن $R \cup T$ هي غطاء رأسي في G فإنه لا يوجد ضلع أحد طرفيه في المجموعة $Y - T$ والآخر في $X - R$. لتكن $W \subseteq R$، نلاحظ أن $|N_H(W)| \geq |W|$ لأنه إذا كان $|N_H(W)| < |W|$ فإن $(S - W) \cup N_H(W)$ غطاء رأسي في G لأن $N_H(W)$ تغطي كل الأضلاع التي طرفها في W.

وهذا يناقض أن S غطاء رأسي أصغر في G. عليه $|N_H(W)| \geq |W|$ وهذا يحقق شرط مبرهنة (٦,٢) في H، ومنه H يحتوي على موائمة عدد أضلاعها يساوي $|R|$.

وبالمثل H' يحتوي على موائمة عدد أضلاعها يساوي $|T|$ ومنه G يحتوي على موائمة عدد أضلاعها يساوي $|T|$؛ عليه G يحتوي على موائمة عدد أضلاعها يساوي

$$|R| + |T| = |S \cap X| + |S \cap Y| = |(S \cap X) \cup (S \cap Y)|$$
$$= |S \cap (X \cup Y)| = |S|.$$

نتيجة (٦,٢)

في رسم ثنائي التجزئة G، إذا وجدت موائمة M وغطاء رأسي S بحيث $|M| = |S|$ فإن M موائمة عظمى و S غطاء رأسي أصغر.

البرهان

لتكن M' موائمة عظمى في G و S' غطاء رأسياً أصغر في G. من مبرهنة (٦,٣) ينتج أن $|M'|=|S'|$. إذن $|M| \le |M'| = |S'| \le |S|$. ولكن $|S| = |M|$، إذن $|M| = |M'| = |S'| = |S|$. □

نقول إن مجموعة من رؤوس رسم G **مجموعة مستقلة** independent set إذا كان كل رأسين فيها غير متجاورين. كما نقول إن مجموعة من أضلاع G **أضلاع تغطية** edge covers إذا كان كل رأس من G هو طرف لضلع فيها.

لا حظ أنه لا يوجد أضلاع تغطية لرسم يحتوي على رأس منفصل.

لنعتبر الترميزات التالية :

$$\alpha(G) = \max\{|A| : A \text{ مجموعة مستقلة في } G\}$$

$$\alpha'(G) = \max\{|M| : M \text{ موائمة في } G\}$$

$$\beta(G) = \{\min |S| : S \text{ غطاء رأسي في } G\}$$

$$\beta'(G) = \{\min |T| : T \text{ غطاء ضلعي في } G\}$$

يمكن إعادة صياغة مبرهنة (٦,٣) كما يلي :

إذا كان G رسماً ثنائي التجزئة فإن $\alpha'(G) = \beta(G)$. كذلك، توضح المبرهنة التالية أن $\alpha(G) = \beta'(G)$ إذا كان G رسماً ثنائي التجزئة.

تمهيدية (٦,٢)

A مجموعة مستقلة في رسم G إذا وفقط إذا كانت $V - A$ غطاءً رأسياً في G، وعليه $\alpha(G) + \beta(G) = |V|$.

البرهان

متروك كتمرين للطالب.

مبرهنة (٦,٤)

إذا كان $G=(V,E)$ رسماً لا يحتوي على رؤوس منعزلة فإن

$$\alpha'(G)+\beta'(G)=|V|$$

البرهان

لتكن M موائمة عظمى في G. إذا استخدمنا $|M|$ ضلعاً لتغطية رؤوس M فإنه يمكن تغطية باقي رؤوس G بأضلاع عددها على الأقل $|V|-2|M|$ (ضلع لكل رأس) ومنه يوجد غطاء ضلعي في G عدد أضلاعه يساوي

$$|V|-2|M|+|M|=|V|-|M|=|V|-\alpha'(G)$$

عليه $\beta'(G)\le|V|-\alpha'(G)$.

بالعكس، افرض أن T غطاء ضلعي أصغر في G. إذا كان $e=xy$ ضلعاً في T فإنه لا يمكن أن يوجد ضلعان مختلفان e' و e'' في T بحيث يكون x طرفاً لـ e' و y طرفاً لـ e''. ومنه T عبارة عن اتحاد k نجمة منفصلة (النجمة $K_{1,r}$ عبارة عن شجرة طول أطول ممر فيها 2)، ومنه $|T|=|V|-k$ (لاحظ أن النجوم يمكن النظر إليها على أنها مركبات لغابة، من نتيجة(٢,٣) عدد الأضلاع يساوي $|V|-k$). بالإمكان تكوين موائمة عدد أضلاعها يساوي $|V|-|T|=k$ وذلك باختيار ضلع واحد من كل نجمة في T. عليه

$$\beta'(G)=|T|=|V|-k\ge|V|-\alpha'(G)$$

(٦,٢) خوارزمية إيجاد موائمة عظمى في الرسوم ثنائية التجزئة

تعتمد فكرة خوارزمية إيجاد موائمة عظمى في رسم G على البدء بموائمة M، من الممكن أن تكون M المجموعة الخالية أو مجموعة مفردة، ثم البحث في

G عن ممر موسع لـ M بدءاً من رأس غير مغطى بالمواءمة ومن ثم الحصول على مواءمة جديدة M' بحيث يكون $|M'|=|M|+1$. وبتكرار الإجراء على المواءمة الجديدة يمكن الوصول إلى مواءمة عظمى في الرسم G.

خوارزمية (٦,١)

المدخل: رسم ثنائي التجزئة $G=(X,Y,E)$ حيث $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ و $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$

المخرج: مواءمة عظمى في G.

الخوارزمية

١- اختر مواءمة M في G.

٢- علم رؤوس X غير المغطاة بالمواءمة M بالعلامة (*) واعتبر كل الرؤوس في G غير مفحوصة. انتقل للخطوة(٣).

٣- إذا أعطي أي رأس من رؤوس X في الخطوة السابقة علامة جديدة انتقل للخطوة (٤) .قف إذا لم يتحقق ذلك.

٤- طالما وجدت رؤوس معلمة وغير مفحوصة في X ، اختر رأساً معلماً وغير مفحوص x_i وعلم بالعلامة (x_i) كلاً من رؤوس Y غير المعلمة التي تجاور x_i بضلع ليس في M. اعتبر الرأس x_i مفحوصاً. إذا لم توجد رؤوس معلمة وغير مفحوصة انتقل للخطوة (٥).

٥- إذا أعطي أي رأس من رؤوس Y في الخطوة (٤) علامة جديدة انتقل للخطوة (٦). قف إذا لم يتحقق ذلك.

٦- طالما وجدت رؤوس معلمة وغير مفحوصة في Y، اختر رأساً معلماً وغير مفحوص y_j وعلم بالعلامة (y_j) كلاً من رؤوس X غير المعلمة التي تجاور

y_j بضلع في M. اعتبر الرأس y_j مفحوصاً. إذا لم توجد رؤوس معلمة وغير مفحوصة انتقل للخطوة (٣). □

بما أن كل رأس في G، خلال خطوات خوارزمية (٦,١)، يعلم على الأكثر بعلامة واحدة ويفحص على الأكثر مرة واحدة؛ فإن خوارزمية (٦,١) بعد عدد منتهٍ من الخطوات، ستنتهي بحالتين فقط هما:

حالة التوسع: وجود رأس معلم من Y غير مغطى بالموائمة M.

حالة عدم التوسع: كل رأس معلم من Y مغطى بالموائمة M.

في الحالة الأولى تجد خوارزمية (٦,١) ممراً موسعاً لـ M في G. طرف هذا الممر هو الرأس المعلم $v \in Y$ وغير المغطى بالموائمة M وطرفه الآخر رأس u من رؤوس X معلم بالعلامة (*) (والذي يكون غير مغطى بالموائمة M طبقاً للخطوة (٢) من خوارزمية (٦,١)). يمكن الحصول على هذا الممر بالبدء بالرأس v والاستمرار باتباع العلامات حتى الرأس u. في هذه الحالة وباستخدام مبرهنة (٦,١) يمكن الحصول على موائمة جديدة في G عدد أضلاعها يساوي $|M|+1$.

في الحالة الثانية توضح مبرهنة (٦,٥) التالية أن M موائمة عظمى في G. بل وأكثر من ذلك تعطي المبرهنة غطاء رأسياً أصغر في G عدد رؤوسه يساوي $|M|$.

مبرهنة (٦,٥)

إذا انتهت خوارزمية (٦,١) بحالة عدم التوسع وكانت X^{un} هي رؤوس X غير المعلمة و Y^{lab} هي رؤوس Y المعلمة فإن

١- $S = X^{un} \cup Y^{lab}$ غطاء رأسي أصغر في G.

٢- $|S| = |M|$ و M موائمة عظمى في G.

البرهان

سنبرهن أن S غطاء رأسي في G بالتناقض. افرض أن $e = xy$ ضلع في G بحيث $x \in X$ و $y \in Y$ و $x \notin S$ و $y \notin S$. عليه $x \in X - X^{un}$ و $y \in Y - Y^{lab}$.
أي أن x رأس معلم و y رأس غير معلم.

إذا كان $e \notin M$ فإن y ، طبقاً للخطوة(٤) من الخوارزمية، يأخذ العلامة (x) وهذا يناقض أن y غير معلم.

أما إذا كان $e \in M$، وبما أن x يجاور y ، فإن x لا يأخذ العلامة (*) طبقاً للخطوة (٢) من الخوارزمية. بما أن x رأس معلم وطبقاً للخطوة (٦) من الخوارزمية فإن تعليم x يكون برأس من Y عبر ضلع من M. وبما أنه لا يوجد ضلعان من M لهما طرف مشترك فإن x لا بد أن يكون معلماً بالعلامة (y). وطبقاً للخطوة (٦) من الخوارزمية فإن الرأس y يعطى كعلامة لرؤوس من X إذا كان هو نفسه معلماً، وهذا يناقض كون y رأساً غير معلم. عليه S غطاء رأسي في G.

إذا برهنا أن $|M| = |S|$ فإنه من نتيجة (٦،٢) تكون M موائمة عظمى في G و S غطاء رأسياً أصغر في G. سنثبت ذلك بإيجاد تقابل بين رؤوس S وأضلاع M. نعتبر حالتين :

حالة (١) $y \in Y^{lab}$.

بما أن حالة التوسع لم تظهر فإن y طرف لضلع واحد $e = xy$ من M. طبقاً للخطوة (٦) من الخوارزمية فإن الرأس x ياخذ العلامة (y). عليه $x \notin X^{un}$. ومنه فإن كل رأس من رؤوس Y^{lab} يغطى بالموائمة M عبر ضلع طرفه الآخر لا ينتمي إلى X^{un}.

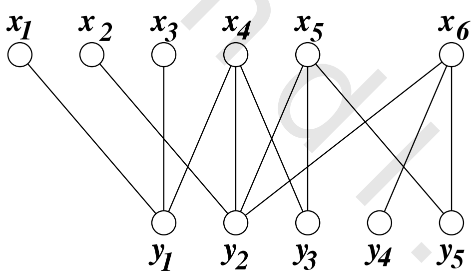
حالة (٢) $x' \in X^{un}$.

بما أن x' غير معلم فإنه طبقاً للخطوة (٦) من الخوارزمية ، x' طرف لضلع واحد $e = x'y' \in M$. لأنه إذا لم يكن كذلك فإن x' معلم بالعلامة (*) وهذا يناقض كون $x' \in X^{un}$. لاحظ أنه إذا كان $y' \in Y^{lab}$ فإنه طبقاً للحالة (١) أعلاه يكون x' معلماً، وهذا يناقض كون $x' \in X^{un}$. عليه $y' \notin Y^{lab}$.

إذن $|M| \leq |X^{un} \cup Y^{lab}| = |S|$. ولكن $|M| \geq |S|$ ، إذن $|M| = |S|$.

مثال (٦,١)

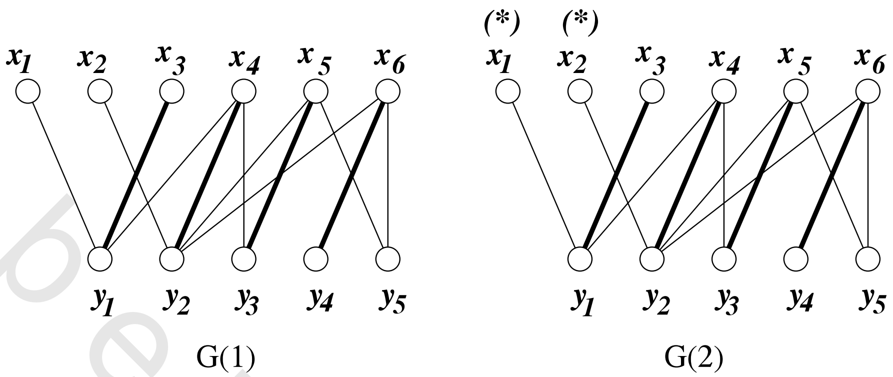
سنستخدم خوارزمية (٦,١) لإيجاد موائمة عظمى في الرسم G الموضح في شكل(٦,٢).



G

شكل(٦,٢).

١- لتكن $M = \{x_3y_1, x_4y_2, x_5y_3, x_6y_4\}$ الموائمة التي اخترناها في الخطوة (١) من الخوارزمية. أضلاع M هي الأضلاع الغامقة في الرسم $G(1)$ في شكل(٦,٣).



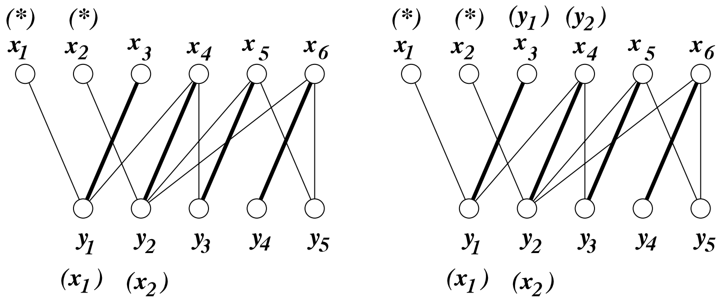
شكل(٦،٣).

٢- بما أن الرأسين x_1, x_2 غير مغطيين بالموائمة M فإن كل واحد منهما يأخذ العلامة (*) وذلك طبقاً للخطوة(٢) من الخوارزمية. انظر الرسم $G(2)$ في شكل(٦،٣).

٣- بما أن هناك رؤوساً معلمة في X ننتقل للخطوة (٤) وذلك طبقاً للخطوة (٣) من الخوارزمية.

٤- بما أن y_1 هو الرأس الوحيد الذي يجاور x_1 بضلع ليس في M فإن y_1 يأخذ العلامة (x_1) وذلك طبقاً للخطوة (٤) من الخوارزمية. نعتبر x_1 مفحوصاً. وبما أن y_2 هو الرأس الوحيد الذي يجاور x_2 بضلع ليس في M فإن y_2 يأخذ العلامة (x_2). نعتبر x_2 مفحوصاً. انظر الرسم $G(3)$ في شكل(٦،٤).

٥- بما أن x_3 يجاور y_1 بضلع في M فإن x_3 يأخذ العلامة (y_1) وذلك طبقاً للخطوة (٦) من الخوارزمية. نعتبر y_1 مفحوصاً. و بما أن x_4 يجاور y_2 بضلع في M فإن x_4 يأخذ العلامة (y_2). نعتبر y_2 مفحوصاً. انظر الرسم $G(4)$ في شكل(٦،٤).



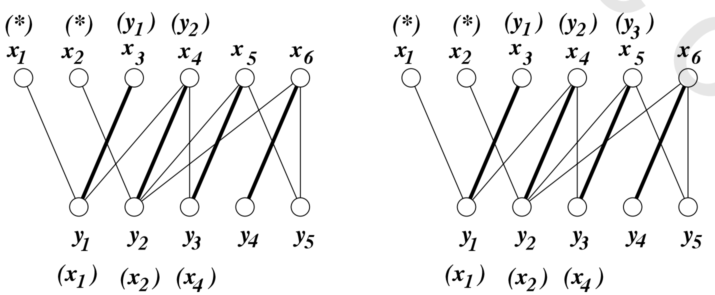
G(3) G(4)

شكل(٦,٤).

٦- بما أن x_3 لا يجاور أي رأس من رؤوس Y غير المعلمة فإننا لا نعلم أي رأس من رؤوس Y بالعلامة (x_3). نعتبر x_3 مفحوصاً. وبما أن y_3 هو الرأس الوحيد الذي يجاور x_4 بضلع ليس في M فإن y_3 يأخذ العلامة (x_4). نعتبر x_4 مفحوصاً. انظر الرسم $G(5)$ في شكل(٦,٥).

٧- بما أن x_5 يجاور y_3 بضلع في M فإن x_5 يأخذ العلامة (y_3). نعتبر y_3 مفحوصاً. انظر الرسم $G(6)$ في شكل(٦,٤).

٨- بما أن y_5 هو الرأس الوحيد الذي يجاور x_5 بضلع ليس في M فإن y_5 يأخذ العلامة (x_5). نعتبر x_5 مفحوصاً. انظر الرسم $G(7)$ في شكل(٦,٦).

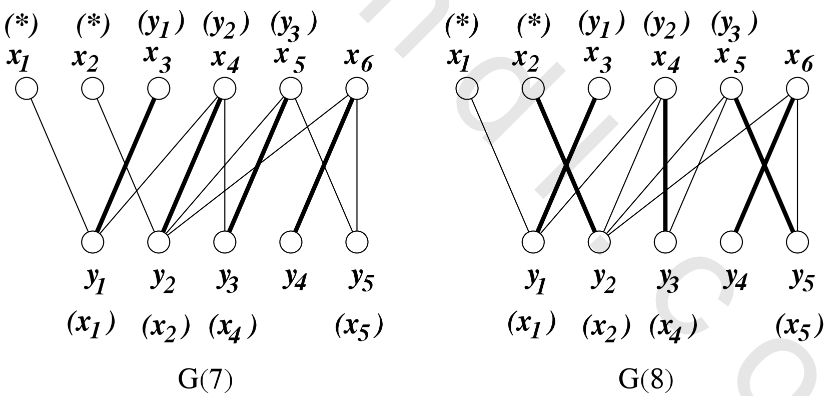


G(5) G(6)

شكل(٦,٥).

٩- بما أن y_5 لا يجاور أي رأس من رؤوس X بضلع في M فإننا نقف وتكون هذه الحالة حالة توسع. نحصل على ممر موسع للموائمة M من y_5 إلى x_2 باتباع علامات الرؤوس كما يلي: $y_5 x_5 y_3 x_4 y_2 x_2$. يمكن توسيع الموائمة باستخدام هذا الممر كما هو موضح في برهان مبرهنة (٦،١) لنحصل على الموائمة الجديدة $M' = \{x_2 y_2, x_3 y_1, x_4 y_3, x_5 y_5, x_6 y_4\}$ الموضحة أضلاعها باللون الغامق في الرسم $G(8)$ في شكل(٦،٦).

١٠- في الحالة العامة نطبق الخوارزمية على الموائمة الجديدة M' كموائمة مختارة ولكننا في حالتنا هذه لا نحتاج إلى ذلك لأن M' تغطي كل رؤوس Y فهي بالضرورة موائمة عظمى.



شكل(٦,٥).

تمارين

١- كم عدد الموائمات الكاملة في الرسم $K_{m,m}$ ؟

٢- كم عدد الموائمات العظمى في الرسم $K_{m,n}$ ؟

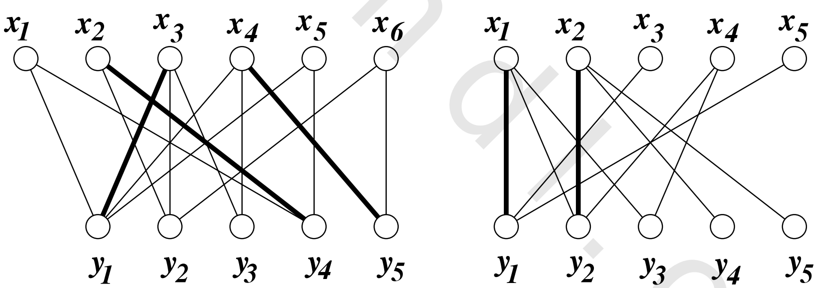
٣- لكل تجمع من المجموعات التالية عيِّن، إن وجدت، ممثلات مختلفة وفي حالة عدم وجودها بيّن أسباب ذلك.

(أ) $\{2,3,4\},\{3,4\},\{1\},\{2,3\}$

(ب) $\{1,2\},\{2,3,4\},\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\}$

٤- إذا كان $A_1=\{1,2\},A_2=\{2,3\},\ldots,A_{n-1}=\{n-1,n\},A_n=\{n,1\}$ تجمعاً من المجموعات، فأثبت أنه يوجد ممثلات مختلفة لهذا التجمع. ثم أوجد عدد طرق اختيار الممثلات المختلفة.

٥- استخدم خوارزمية (٦،١) لإيجاد موائمة عظمى لكل رسم ثنائي التجزئة في شكل(٦،٦) بدءاً من الموائمة التي أضلاعها غامقة.



شكل(٦،٦).