الفصل الخامس

تلوين الرسوم
GRAPH COLORING

(٥,١) تلوين الرؤوس

ليكن $G=(V,E)$ رسماً بسيطاً ولتكن C مجموعة نسميها **مجموعة الألوان** ونرمز لعناصرها بالرموز $c_1,c_2,\cdots$. كل تطبيق $f:V\to C$ بحيث $f(x)\neq f(y)$ لكل رأسين متجاورين $x,y\in V$ يسمى **تلويناً لرؤوس** G أو اختصاراً تلويناً للرسم G graph coloring. نقول إن G قابل للتلوين بالنوع k إذا وجد تلوين لـ G عندما $|C|=k$ ويسمى التلوين في هذه الحالة تلويناً من الدرجة k. نسمي $\chi(G)$ **العدد اللوني** chromatic number للرسم G ونعرِّفه كما يلي:

$\chi(G)=\min\{k:$ يوجد تلوين من الدرجة k لـ $G\}$.

تحتوي المبرهنة التالية على معلومات بسيطة ومباشرة حول العدد اللوني.

مبرهنة (٥,١)

(أ) إذا كان عدد رؤوس G يساوي n فإن $\chi(G)\leq n$.

(ب) إذا كان H رسماً جزئياً من G فإن $\chi(H)\leq\chi(G)$.

(ج) إذا كانت $G_1,G_2,\cdots,G_r$ هي مركبات G ، فإن $\chi(G)=\max\limits_{1\leq i\leq r}\chi(G_i)$

(د) $\chi(G)=1$ إذا وفقط إذا كان G رسماً صفرياً.

(هـ) $\chi(K_n)=n$ لكل $n\geq 1$.

(و) إذا كان K_n رسماً جزئياً من G فإن $\chi(G)\geq n$.

البرهان

الإثبات مباشر ونترك التفاصيل كتمرين للقارئ. □

تعطي المبرهنة التالية تمييزاً سهلاً للرسومات التي عددها اللوني 2.

مبرهنة (٥,٢)

ليكن G رسماً غير صفري. عندئذٍ، $\chi(G)=2$ إذا وفقط إذا كان G ثنائي التجزئة.

البرهان

ليكن $G=(V,E)$ ثنائي التجزئة بحيث $V=X\cup Y$. بما أن G غير صفري فإن $\chi(G)\geq 2$. بتلوين عناصر X باللون c_1 وعناصر Y باللون c_2 نجد أن G قابل للتلوين بالنوع 2، وعليه فإن $\chi(G)=2$.

بالعكس، افرض أن $\chi(G)=2$. إذن يوجد تلوين من الدرجة 2 لـِ G. لتكن X مجموعة الرؤوس الملونة باللون c_1 و Y مجموعة الرؤوس الملونة باللون c_2. إذن كل رأسين في X يكونان غير متجاورين كما أن كل رأسين في Y يكونان غير متجاورين أيضاً. وهكذا فإن كل ضلع في G يكون أحد طرفيه في X والطرف الآخر في Y. عليه، $G=(V,E)$ ثنائي التجزئة حيث $V=X\cup Y$. □

ينتج من المبرهنتين السابقتين أن تمييز الرسومات التي عددها اللوني 1 أو 2 أمر سهل. لا يوجد تمييز بسيط للرسومات التي عددها اللوني 3، ولكن توجد نتائج تعطينا حدوداً دنيا وحدوداً عليا للعدد اللوني.

نتيجة (٥,١)

$\chi(G) \geq 3$ إذا وفقط إذا كان G يحتوي على دورة فردية.

البرهان

نعلم من مبرهنة (١,٦) أن G ثنائي التجزئة إذا وفقط إذا كان G لا يحتوي على دورات فردية ؛ وبتطبيق مبرهنة (٥,٢) ينتج المطلوب. □

نذكِّر الآن بدلالات بعض الرموز.

(أ) $\Delta(G) = \max\{\deg v : v \in V(G)\}$

(ب) $\delta(G) = \min\{\deg v : v \in V(G)\}$

(ج) $N(x) = \{y : x$ رأس مجاور للرأس $y\}$

مبرهنة (٥,٣)

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

البرهان

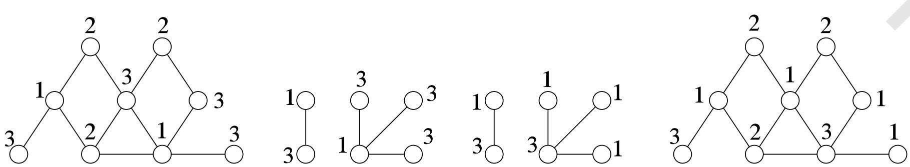
نستخدم الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس n. إذا كان $n = 1$ فإن $\Delta(G) = 0$ ، $\chi(G) = 1$ ويتحقق المطلوب. افرض الآن أن النتيجة صحيحة لكل رسم بسيط عدد رؤوسه $n \geq 1$ وافرض أن G رسم عدد رؤوسه $n+1$. اختر رأساً v في G واعتبر الرسم $G-v$. بما أن عدد رؤوس $G-v$ يساوي n فإنه ينتج من فرضية الاستقراء أن $\chi(G-v) \leq \Delta(G-v)+1$ وعليه فإنه يوجد تلوين من الدرجة $\Delta(G-v)+1$ لـِ $G-v$. افرض أن $\Delta(G) = \Delta(G-v)$. إن المتباينة $|N(v)| \leq \Delta(G)$ تبين لنا أنه يمكن تلوين v بأحد الألوان المعطاة والذي يختلف عن ألوان الرؤوس المجاورة لـِ v وعليه نحصل على تلوين من الدرجة

$\Delta(G)+1$ لـِ G. أما إذا كان $\Delta(G)\neq\Delta(G-v)$ فإن $\Delta(G-v)<\Delta(G)$ وعليه فإنه يمكن تلوين v بلون مختلف عن الألوان المعطاة فنحصل على تلوين من الدرجة $\Delta(G-v)+2$ لـِ G. أي، نحصل على تلوين من الدرجة $\Delta(G)+1$ لِ G. □

واضح أنه إذا كان G رسماً تاماً أو دورة فردية فإن $\chi(G)=\Delta(G)+1$. وإذا استثنينا هذه الرسوم فإنه يمكن تقوية مبرهنة (٥,٣) بحيث يصبح الحد العلوي $\Delta(G)$. نستخدم في إثبات المبرهنة المقوَّاة طريقة لتغيير ألوان رؤوس ما بحيث نحصل على تلوين آخر للرسم. تسمى هذه الطريقة إعادة التلوين ونقدمها فيما يلي. ليكن لدينا تلوين من الدرجة $k\geq 2$ للرسم G ولتكن C مجموعة الألوان. لتكن S مجموعة جزئية من C بحيث $|S|\geq 2$ وليكن $H(S)$ الرسم الجزئي من G المحدث بمجموعة الرؤوس التي ألوانها من S. واضح أنه إذا كان لدينا تبديل لِ S فإن إجراء هذا التبديل على ألوان رؤوس مركبات ما لِ $H(S)$ يعطينا تلويناً جديداً لِ G. سنكتب $H(s_1,s_2,\cdots,s_m)$ بدلاً من $H(S)$ عندما تكون $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_m\}$.

مثال (٥,١)

نستخدم $1,2,3$ بدلاً من c_1,c_2,c_3 للدلالة على ألوان الرؤوس في شكل(٥,١) التالي الذي يوضح تقنية إعادة التلوين باستخدام $H(1,3)$.



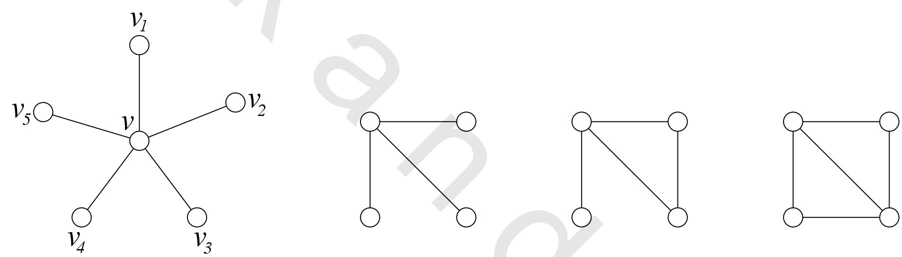
شكل(٥,١).

مبرهنة (٥,٤) (مبرهنة بروكس Brooks)

إذا كان $G=(V,E)$ رسماً بسيطاً مترابطاً غير تام بحيث $\Delta(G)\geq 3$ فإن $\chi(G)\leq\Delta(G)$.

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس n. بما أن $\Delta(G)\geq 3$ فإن $n\geq 4$. إذا كان $n=4$ فإن G يمكن أن يكون أحد الرسوم الثلاثة (أ)، (ب)، (ج) الموضحة في شكل(٥,٢).



(أ) (ب) (ج) (د)

شكل(٥,٢).

واضح أن العدد اللوني لكل من الرسمين في الشكلين (٥,٢)(أ) و (٥,٢)(ب) يساوي 3 وأن العدد اللوني للرسم في شكل(٥,٢)(ج) يساوي 2 ؛ وعليه فإن $\chi(G)\leq\Delta(G)$. نفرض الآن أن $n\geq 5$ وأن المبرهنة صحيحة عندما يكون عدد الرؤوس يساوي $n-1$. ليكن عدد رؤوس G يساوي n. إذا وجد $v\in V$ بحيث $\deg v<\Delta(G)$ فإنه يمكن تلوين الرؤوس في $N(v)$ بألوان عددها أقل من $\Delta(G)$ وبتلوين v بلون آخر نجد أن G قابل للتلوين بالنوع $\Delta(G)$. إذن نفرض أن G منتظم من النوع $\Delta=\Delta(G)$.

ليكن $v \in V$. ينتج من فرضية الاستقراء أن $H = G - v$ قابل للتلوين بالنوع Δ. إذا وجد c_i بحيث إن الرؤوس في $N(v)$ غير ملونة به فإنه يمكن تلوين v بـ c_i ويكون G قابلاً للتلوين بالنوع Δ. إذن نفرض أن $N(v) = \{v_1, v_2, \cdots, v_\Delta\}$ وأن $v_1, v_2, \cdots, v_\Delta$ ملونة على الترتيب بالألوان $c_1, c_2, \cdots, c_\Delta$ في تلوين من الدرجة Δ للرسم H.

نعتبر الآن الرسم $H(c_i, c_j)$ حيث $i \neq j$. إذا كان v_i و v_j ينتميان إلى مركبتين مختلفتين في هذا الرسم فإننا نعيد تلوين رؤوس إحدى المركبتين فنحصل على تلوين من الدرجة Δ لِ H بحيث يكون أحد الألوان غير مستخدم في تلوين الرؤوس في $N(v)$ وبتلوين v بهذا اللون نحصل على تلوين من الدرجة Δ لِ G. إذن نفرض الآن أن v_i و v_j ينتميان إلى إحدى مركبات $H(c_i, c_j)$ ولتكن H_{ij}.

إذا كانت درجة v_i في H_{ij} أكبر من 1 فإنه يوجد رأسان في $N(v_i)$ لهما اللون c_j، وهكذا فإنه يوجد لون c_k مختلف عن c_i و c_j لم يستخدم في تلوين الرؤوس في $N(v_i)$ عند تلوين H. وعليه فإنه يمكن إعادة تلوين v_i باللون c_k ومن ثم تلوين v باللون c_i فنحصل على تلوين من الدرجة Δ لِ G. لذلك يمكن فرض أن درجة v_i في H_{ij} تساوي 1. وبالمثل يمكن فرض أن درجة v_j في H_{ij} تساوي 1. ليكن P ممراً من v_i إلى v_j في H_{ij}، ولنفرض أن درجة أحد رؤوس P الداخلية في H_{ij} أكبر من 2. ليكن ω هو أول رأس بهذه الصفة من جهة v_i ولنفرض أن ω له اللون c_i. إذن يوجد ثلاثة رؤوس في $N(\omega)$ لها اللون c_j؛ وهكذا فإنه يوجد لون c_k مختلف عن c_i و c_j لم يستخدم في تلوين الرؤوس في $N(\omega)$ عند تلوين H. وعليه فإنه يمكن إعادة تلوين ω باللون c_k

ومن ثم إعادة تلوين الممر الجزئي من P بدءاً من v_i وانتهاءً بالرأس الذي يسبق ω مباشرة فنحصل على تلوين يكون فيه v_i له اللون c_j. وهكذا فإنه يمكن تلوين v باللون c_i. وبالمثل إذا كان ω له اللون c_j فإنه يمكن تلوين v باللون c_i أيضاً. إذن يمكن الافتراض أن H_{ij} ممر من v_i إلى v_j لكل $i \neq j$.

ليكن $z \neq v_i$ رأساً بحيث z ينتمي إلى كل من H_{ij} و H_{ik} حيث $k \neq j$. إذن z له اللون c_i ويوجد رأسان في $N(z)$ لهما اللون c_j كما يوجد رأسان في $N(z)$ لهما اللون c_k. وهكذا فإنه يوجد لون c_r مختلف عن c_i, c_j, c_k لم يستخدم في تلوين الرؤوس في $N(z)$ عند تلوين H. وعليه فإنه يمكن إعادة تلوين z باللون c_r ومن ثم إعادة تلوين الممر الجزئي من H_{ik} بدءاً من الرأس الذي يلي z مباشرة وانتهاءً بالرأس v_k فنحصل على تلوين يكون فيه v_k له اللون c_i. وهكذا فإنه يمكن تلوين v باللون c_k. إذن يمكن الافتراض أن H_{ij} و H_{ik} لهما رأس مشترك واحد هو v_i.

الآن، نتم البرهان وذلك بأن نبيّن أن الافتراضات تؤدي إلى التناقض بأن G رسم تام. افرض أنه يوجد رأسان غير متجاورين v_i و v_j. ليكن ω هو الرأس المجاور للرأس v_i في H_{ij}. واضح أن ω له اللون c_j. ليكن v_k رأساً مختلفاً عن كل من v_i و v_j. بإعادة تلوين H_{ik} نحصل على تلوين يكون فيه v_i له اللون c_k. في التلوين الجديد، تنتمي ω إلى كل من H_{ji} و H_{jk}. إن هذا يناقض الفرض بأن H_{ji} و H_{jk} لهما رأس مشترك واحد هو v_j. إذن v_i و v_j متجاوران لكل $i \neq j$. عليه، الرسم التام $K_{\Delta+1}$ رسم جزئي من G. ولكن G رسم منتظم من النوع Δ ومترابط، إذن $G = K_{\Delta+1}$. وهذا هو التناقض المطلوب. □

يمكن الاستناد إلى مبرهنة (٥,٤) للحصول على تقريب للعدد اللوني $\chi(G)$ ؛ كما يمكن استخدامها أحياناً لمعرفة $\chi(G)$ بدون أن نلون G وذلك عندما تكون درجات رؤوسه متقاربة.

مثال (٥,٢)

نعتبر رسم بيترسن P. بما أن P منتظم من النوع 3 فإنه ينتج من مبرهنة (٥,٤) أن $\chi(P) \le 3$. وبما أن P يحتوي على دورة فردية فإن $\chi(P) \ge 3$ حسب النتيجة (٥,١). وعليه فإن $\chi(P) = 3$. □

لما كانت النجمة $K_{1,r}$ رسماً ثنائي التجزئة فإن $\chi(K_{1,r}) = 2$ ولكن $\Delta(K_{1,r}) = r$. ويجد القارئ بسهولة أن $\Delta(W_n) = n-1$ بينما $\chi(W_n) = 4$ لكل عدد زوجي $n \ge 4$ و $\chi(W_n) = 3$ لكل عدد فردي $n \ge 5$. وعليه توجد رسومات G بحيث يكون الفرق كبيراً بين $\chi(G)$ و $\Delta(G)$ وتكون مبرهنة بروكس قليلة الفائدة بالنسبة لها.

نقتصر الآن الدراسة على الرسوم المستوية حيث توجد نتائج قوية. تعتبر مبرهنة الألوان الأربعة أبرز هذه النتائج وقد استند الإثبات بقوة إلى الحاسوب ؛ من الجدير بالذكر أن السعي لإثباتها قد أثرى نظرية الرسومات بالعديد من النتائج ونورد فيما يلي نص إحدى صيغ هذه المبرهنة.

مبرهنة (٥,٥) (مبرهنة الألوان الأربعة)

إذا كان G رسماً مستوياً، فإن $\chi(G) \le 4$.

يمكن بسهولة إثبات أن $\chi(G) \le 6$. في الحقيقة، يمكن استخدام الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس ومبرهنة (٤,٢) التي تفيد أنه يوجد في G رأس v

بحيث $\deg v \le 5$. كما يمكن بالطريقة نفسها وبقليل من الجهد إثبات أن $\chi(G) \le 5$.

مبرهنة (٥,٦) (مبرهنة الألوان الخمسة)

إذا كان G رسماً مستوياً فإن $\chi(G) \le 5$.

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس n. واضح أن النتيجة صحيحة عندما $n \le 5$. افرض الآن أن G رسم مستوٍ عدد رؤوسه $n \ge 6$ وأن النتيجة صحيحة للرسوم المستوية التي عدد رؤوسها أقل من n. يوجد في G رأس v بحيث $\deg v \le 5$ (انظر مبرهنة (٤,٢)). ينتج من فرضية الاستقراء أنه يوجد تلوين من الدرجة 5 للرسم $H = G - v$. إذا كانت $\deg v < 5$ فإن $|N(v)| \le 4$ وعليه يوجد لون لم يستخدم في تلوين الرؤوس في $N(v)$. وبتلوين v بهذا اللون نحصل على تلوين من الدرجة 5 للرسم G.

نفرض الآن أن $\deg v = 5$ وأن $N(v) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. ونفرض أن v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 مرتبة في المستوى حول v مع عقارب الساعة كما في شكل(٥,٢)(د). إذا وجد لون لم يستخدم في تلوين الرؤوس في $N(v)$ فإنه يمكن تلوين v به والحصول على تلوين من الدرجة 5 لِـ G. لذلك نفرض أن v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 ملونة على الترتيب بالألوان المختلفة c_1, c_2, c_3, c_4, c_5. نعتبر الآن الرسم $H(c_1, c_3)$. إذا كان v_1 و v_3 ينتميان إلى مركبتين مختلفتين في هذا الرسم فإننا نعيد تلوين إحدى المركبتين فنحصل على تلوين من الدرجة 5 لِـ H بحيث يكون أحد الألوان غير مستخدم في تلوين الرؤوس في $N(v)$ وبتلوين v بهذا اللون نحصل على تلوين من الدرجة 5 لِـ G. أما إذا كان v_1 و v_3 ينتميان

إلى المركبة نفسها فإنه يوجد ممر من v_1 إلى v_3 ملون باللونيين c_1 و c_3. وبما أن G مستوٍ فينتج أن v_2 و v_4 ينتميان إلى مركبتين مختلفتين في الرسم $H(c_2,c_4)$ ؛ وبإعادة تلوين إحدى المركبتين يمكننا إنشاء تلوين من الدرجة 5 لِـ G.

تمارين (٥,١)

١- أثبت جميع فقرات مبرهنة (٥,١).

٢- أثبت أنه إذا كان G رسماً مترابطاً فإن $\chi(G)=\Delta(G)+1$ إذا وفقط إذا كان G رسماً تاماً أو دورة فردية.

٣- أثبت أن $\chi(C_n)=2$ لكل عدد زوجي $n\geq 4$ وأن $\chi(C_n)=3$ لكل عدد فردي $n\geq 3$.

٤- أثبت أن $\chi(W_n)=4$ لكل عدد زوجي $n\geq 4$ وأن $\chi(W_n)=3$ لكل عدد فردي $n\geq 5$.

٥- جد $\chi(Q_k)$.

٦- جد $\Delta(Q_k)$.

٧- أثبت أنه إذا كان G يحتوي على دورة فردية وحيدة فإن $\chi(G)=3$.

٨- أثبت أنه إذا كان G رسماً بسيطاً مستوياً عدد رؤوسه أقل من أو يساوي 11 فإنه يوجد رأس x في G بحيث $\deg x\leq 4$ ؛ ثم أثبت أن $\chi(G)\leq 4$.

٩- أثبت أنه إذا كان G رسماً بسيطاً مستوياً عدد أضلاعه اقل من أو يساوي 29 فإنه يوجد رأس x في G بحيث $\deg x\leq 4$ ؛ ثم أثبت أن $\chi(G)\leq 4$.

١٠- إذا كان G رسماً بسيطاً بحيث $\delta(G)=r$ وكان عدد رؤوسه n فأثبت أن $\chi(G)\geq \dfrac{n}{n-r}$.

١١- (أ) أعط مثالاً لرسم مستوٍ G بحيث لا يحتوي على K_4 ولكن $\chi(G)=4$.

(ب) أعط مثالاً لرسم مستوٍ G بحيث لا يحتوي على K_3 ولكن $\chi(G)=3$.

١٢- إذا كان $\chi(G)\le 4$ فهل يقتضي هذا أن يكون G مستوياً أم لا؟

١٣- أثبت أنه إذا كان G رسماً بسيطاً مستوياً ولا يحتوي على دورات ثلاثية فإنه يوجد رأس x في G بحيث $\deg x \le 3$ ؛ ثم أثبت أن $\chi(G)\le 4$.

١٤- إذا كان G رسماً بسيطاً بحيث يكون لكل دورتين فرديتين رأس مشترك فأثبت أن $\chi(G)\le 5$.

١٥- أثبت أنه إذا كان G رسماً بسيطاً مستوياً عدد رؤوسه 8 وعدد أضلاعه 13 فإن $\chi(G)\neq 2$.

١٦- يسمى الرسم G رسماً حرجاً من النوع k إذا كان $\chi(G)=k\,,\,\chi(G-v)<k$ لكل رأس v في G.

(أ) جد الرسوم الحرجة من النوع 2 والرسوم الحرجة من النوع 3.

(ب) أعط مثالاً لرسم حرج من النوع 4.

(جـ) أثبت أنه إذا كان G حرجاً من النوع k فإن $\delta(G)\ge k-1$.

(د) أثبت أنه إذا كان $\chi(G)=k$ فإن G يحتوي على رسم جزئي حرج من النوع k.

١٧- إذا كان $\chi(G)=k\ge 3$ فأثبت أن G يحتوي على دورة طولها على الأقل k.

١٨- إذا كان طول أطول ممر في G يساوي m فأثبت أن $\chi(G)\le m+1$.

(٥,٢) تلوين الأضلاع

ليكن $G=(V,E)$ رسماً بسيطاً غير صفري . لتكن C **مجموعة** نسميها **مجموعة الألوان** ونرمز لعناصرها بالرموز $c_1,c_2,\ldots$. كل تطبيق $f:E\to C$ بحيث $f(e)\neq f(e')$ لكل ضلعين متجاورين $e,e'\in E$ يسمى **تلويناً لأضلاع** G أو اختصاراً **تلويناً ضلعياً** للرسم G edge coloring. نقول إن G **قابل للتلوين ضلعياً بالنوع** k إذا وجد تلوين ضلعي لِـ G عندما $|C|=k$ ويسمى التلوين الضلعي في هذه الحالة **تلويناً ضلعياً من الدرجة** k k-edge coloring. ونقول إن اللون c_i **حاضر** عند x إذا كان x طرفاً لضلع ملون باللون c_i. يسمى

$$\chi_e(G)=\min\{k : \text{يوجد تلوين ضلعي من الدرجة } k \text{ لِـ } G\}$$

العدد اللوني الضلعي للرسم G edge chromatic number.

تزودنا المبرهنة التالية بمعلومات بسيطة حول العدد اللوني الضلعي.

مبرهنة (٥,٧)

(أ) $\Delta(G)\le\chi_e(G)$

(ب) إذا كان H رسماً جزئياً من G فإن $\chi_e(H)\le\chi_e(G)$.

(ج) $\chi_e(C_n)=2$ لكل عدد زوجي $n\ge 4$ و $\chi_e(C_n)=3$ لكل عدد فردي $n\ge 3$.

(د) $\chi_e(W_n)=n-1$ لكل $n\ge 4$.

البرهان

الإثبات مباشر ونتركه كتمرين للقارئ. □

تعيّن النتيجة التالية العدد اللوني الضلعي للرسم التام.

مبرهنة (٥,٨)

(أ) $\chi_e(K_n)=n$ لكل عدد فردي $n\ge 3$.

(ب) $\chi_e(K_n)=n-1$ لكل عدد زوجي $n\ge 2$.

البرهان

(أ) بما أن $\Delta(K_n)=n-1$ فإن $\chi_e(K_n)\ge n-1$. افرض أنه يوجد تلوين ضلعي من الدرجة $n-1$ لِـ K_n. بما أن n عدد فردي فإن عدد الأضلاع التي لها اللون نفسه أقل من أو يساوي $\frac{n-1}{2}$ ؛ وعليه فإن عدد أضلاع K_n أقل من أو يساوي $(n-1)\times\frac{(n-1)}{2}$. وهذا يناقض أن عدد أضلاع K_n يساوي $\frac{n(n-1)}{2}$. إذن $\chi_e(K_n)\ge n$. ولبيان أن $\chi_e(K_n)=n$ فإننا ننشئ فيما يلي تلويناً ضلعياً من الدرجة n لِـ K_n. نمثّل رؤوس K_n برؤوس مضلع منتظم في المستوى ويلون كل ضلع من أضلاع المضلع المنتظم بلون مختلف عن ألوان الأضلاع الأخرى. بما أن كل قطر من أقطار المضلع المنتظم يوازي ضلعاً واحداً من أضلاعه فإننا نلون كل قطر بلون الضلع الوحيد الموازي له فنحصل على التلوين الضلعي المطلوب.

(ب) ليكن v أحد رؤوس K_n. بما أن K_n-v يماثل الرسم التام K_{n-1} و$n-1$ عدد فردي فإننا نلون أضلاع K_n-v كما في الفقرة (أ). ليكن x رأساً في الرسم K_n-v. بما أن درجة x في K_n-v تساوي $n-2$ فإنه يوجد لون غائب عن x ؛ أي، لم يستخدم في تلوين الأضلاع الساقطة على x. نلون الضلع vx بهذا اللون. واضح أنه إذا لونا الأضلاع الساقطة على v بهذه الطريقة فإننا نحصل على تلوين ضلعي من الدرجة $n-1$ للرسم K_n. وبما أن $\chi_e(K_n)\ge\Delta(K_n)=n-1$ فإن $\chi_e(K_n)=n-1$. □

سنستخدم طريقة إعادة تلوين الأضلاع في إثبات المبرهنة المتعلقة بالعدد اللوني الضلعي لرسم ثنائي التجزئة وغير صفري. تستخدم هذه الطريقة لتغيير ألوان أضلاع ما بحيث نحصل على تلوين ضلعي آخر للرسم. ليكن لدينا تلوين ضلعي من الدرجة $k \geq 2$ للرسم G وليكن c_j, c_i لونين مختلفين. ليكن $H(c_i, c_j)$ الرسم الجزئي من G المحدث بمجموعة الأضلاع الملونة باللون c_i أو باللون c_j. لتكن K مركبة في $H(c_i, c_j)$. واضح أن K ممر مفتوح أو دورة زوجية وأننا إذا بدلنا لوني أضلاع K فإننا نحصل على تلوين ضلعي آخر للرسم G.

مبرهنة (٥,٩)

إذا كان G رسماً بسيطاً ثنائي التجزئة وغير صفري فإن $\chi_e(G) = \Delta(G)$.

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على عدد الأضلاع m. إذا كان $m = 1$ فإن $\chi_e(G) = \Delta(G) = 1$. نفرض الآن أن $m > 1$ وأن النتيجة صحيحة لكل رسم بسيط ثنائي التجزئة وغير صفري وعدد أضلاعه أقل من m. ليكن G رسماً بسيطاً ثنائي التجزئة عدد أضلاعه يساوي m. بما أن $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$ فيكفي أن نثبت أنه يوجد تلوين ضلعي من الدرجة $\Delta(G)$ للرسم G.

نعتبر الرسم $G - e$ حيث إن $e = xy$ ضلع في G. ينتج من فرضية الاستقراء أنه يوجد تلوين ضلعي من الدرجة $\Delta(G - e)$ وعليه يوجد تلوين ضلعي من الدرجة $\Delta(G)$ للرسم $G - e$ وذلك لأن $\Delta(G - e) \leq \Delta(G)$. سنبين أنه يمكن استخدام هذه الألوان نفسها والتي عددها $\Delta(G)$ لتلوين أضلاع الرسم G. بما أن $\deg_G(x) \leq \Delta(G)$ والضلع $e = xy$ غير ملون فإنه يوجد لون غائب عن

الرأس x ؛ وبالمثل يوجد لون غائب عن الرأس y. إذا وجد لون غائب عن x و y فإننا نلون e بهذا اللون. لذلك نفرض أنه يوجد لون c_i حاضر عند x وغائب عن y كما أنه يوجد لون c_j حاضر عند y وغائب عن x.

لتكن K هي مركبة $H\left(c_i, c_j\right)$ التي تحتوي على x. سنبيّن الآن أن K لا تحتوي على y. لغرض الحصول على تناقض، نفرض أن K تحتوي على y. عليه، يوجد ممر P من x إلى y في K ؛ وبما أن x و y متجاوران في الرسم ثنائي التجزئة G فلا بد أن يكون P ممراً فردياً. وعليه فإن الضلع الساقط على y في P ملون باللون c_j. وهذا يناقض أن c_j غائب عن y. إذن K لا تحتوي على y.

نقوم الآن بإعادة تلوين أضلاع K فنحصل على تلوين ضلعي يكون فيه c_i غائباً عن x. ولما كان c_i غائباً عن y أيضاً، فإننا نلون e باللون c_i لنحصل على تلوين ضلعي من الدرجة $\Delta(G)$ للرسم G. □

في النتائج التي عُرضت حتى الآن، وُجد أن العدد اللوني الضلعي يساوي $\Delta(G)$ أو $\Delta(G)+1$. المبرهنة التالية تحصر العدد اللوني الضلعي بين هذين العددين، وتعتبر أهم النتائج المتعلقة بالعدد اللوني الضلعي التي أمكن الحصول عليها. ونشير إلى أنه، حتى الآن، لم تكتشف أي طريقة تجيب عن السؤال: أي من $\Delta(G)$ و $\Delta(G)+1$ هو العدد اللوني الضلعي للرسم G؟

مبرهنة (٥,١٠) (مبرهنة فزنج Vizing)

إذا كان G رسماً بسيطاً غير صفري فإن $\Delta(G) \le \chi_e(G) \le \Delta(G)+1$.

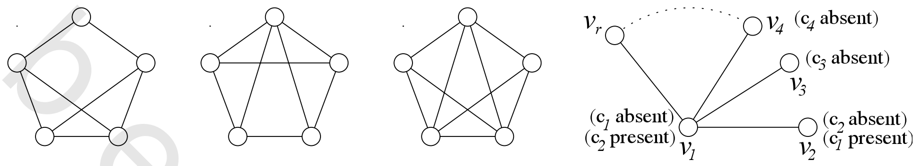
البرهان

لقد سبق أن رأينا أن $\Delta(G) \le \chi_e(G)$. سنستخدم الاستقراء الرياضي على عدد الأضلاع m لإثبات المتباينة الأخرى $\chi_e(G) \le \Delta(G)+1$. إذا كان $m=1$ فإن $\chi_e(G)=\Delta(G)=1$. نفرض الآن أن G رسم بسيط عدد أضلاعه $m>1$ وأن النتيجة صحيحة لكل رسم بسيط غير صفري عدد أضلاعه أقل من m.

ليكن $e=v_1v_2$ ضلعاً في G. ينتج من فرضية الاستقراء أنه يوجد تلوين ضلعي من الدرجة $\Delta(G)+1$ للرسم $G-e$. بما أن $\deg v_1 \le \Delta(G)$ و $\deg v_2 \le \Delta(G)$ فإنه يوجد لون غائب absent عن v_1 كما يوجد لون غائب عن v_2. إذا وجد لون غائب عن v_1 وعن v_2 فإننا نلوّن e بهذا اللون ونحصل على تلوين ضلعي من الدرجة $\Delta(G)+1$ للرسم G. لذلك، نفرض أنه يوجد لون c_1 غائب عن v_1 ولكنه حاضر present عند v_2 كما نفرض أنه يوجد لون c_2 غائب عن v_2 ولكنه حاضر عند v_1.

ننشئ الآن متتالية من الرؤوس المختلفة $v_1,v_2,\cdots,v_r$ بحيث $v_2,v_3,\cdots,v_r \in N(v_1)$. بما أن اللون c_2 حاضر عند v_1 فإنه يوجد ضلع ساقط على v_1 ولونه c_2. ليكن هذا الضلع هو v_1v_3. لاحظ أن $\deg v_3 \le \Delta(G)$ وعليه فإنه يوجد لون غائب عن v_3. إذا وجد لون c_3 غائب عن v_3 وحاضر عند v_1 فإنه يوجد ضلع ساقط على v_1 ولونه c_3. ليكن هذا الضلع هو v_1v_4. نجري الإنشاء السابق كلما أمكن ذلك، ونفرض أن v_r هو آخر رأس في المتتالية. واضح أن $r \le \Delta(G)+1$ لأن $\deg v_1 \le \Delta(G)$ ويوجد لون غائب عن v_r لأن $\deg v_r \le \Delta(G)$ كما أن كل

لون غائب عن v_r وحاضر عند v_1 يكون لون أحد الأضلاع $v_1v_3, v_1v_4, \cdots, v_1v_{r-1}$ (انظر شكل(٥,٣)(أ)).



(د) (ج) (ب) (أ)

شكل(٥,٣).

إذا وجد لون c_r غائب عن v_r وعن v_1 فإننا نلون الضلع $e = v_1v_2$ باللون c_2 ثم نعيد تلوين v_1v_i باللون c_i لكل $i = 3, 4, \cdots, r$ فنحصل على تلوين ضلعي من الدرجة $\Delta(G)+1$ للرسم G.

نفرض الآن أن كل لون غائب عن v_r يكون حاضراً عند v_1 ويكون لون أحد الأضلاع $v_1v_3, v_1v_4, \cdots, v_1v_{r-1}$. ليكن c_r لوناً غائباً عن v_r وليكن $c_r = c_{j-1}$ هو لون v_1v_j. نلون $e = v_1v_2$ باللون c_2 ثم نعيد تلوين v_1v_i باللون c_i لكل $i = 3, 4, \cdots, j-1$ ونزيل اللون c_r عن الضلع v_1v_j. وبذلك نحصل على تلوين ضلعي من الدرجة $\Delta(G)+1$ للرسم $G - v_1v_j$.

نعلم أن كل مركبة في $H(c_1, c_r)$ تكون ممراً مفتوحاً أو دورة زوجية ؛ وبما أن درجة كلٍ من v_j, v_r, v_1 في $H(c_1, c_r)$ تساوي 1 فإنه لا توجد مركبة في $H(c_1, c_r)$ بحيث تحتوي على v_j, v_r, v_1.نفرض أن K هي المركبة التي تحتوي

على v_r وأن M هي المركبة التي تحتوي على v_j. إذن إما $v_1 \notin V(K)$ وإما $v_1 \notin V(M)$.

إذا كان $v_1 \notin V(M)$ فإننا نعيد تلوين أضلاع M ثم نلوّن v_1v_j باللون c_1 فنحصل على تلوين ضلعي من الدرجة $\Delta(G)+1$ للرسم G.

في الحالة الأخرى عندما يكون $v_1 \in V(M)$ فإن $v_1 \notin V(K)$. نلون الضلع v_1v_j باللون c_j ونعيد تلوين v_1v_i باللون i لكل $i = j+1, j+2, \cdots, r-1$ ثم نزيل اللون $r-1$ عن الضلع v_1v_r. نعيد الآن تلوين أضلاع K ثم نلون v_1v_r باللون c_1 فنحصل على تلوين ضلعي من الدرجة $\Delta(G)+1$ للرسم G.

تمارين (٥,٢)

١- جد $\chi_e(G)$ لكل رسم من الرسوم الموضحة في الشكل(٥,٣)(ب) وشكل(٥,٣)(ج) والشكل(٥,٣)(د).

٢- جد $\chi_e(K_{m,n})$.

٣- جد $\chi_e(T)$ ، حيث T شجرة.

٤- أثبت فقرات المبرهنة (٥,٧).

٥- (أ) أثبت أن العدد اللوني الضلعي لرسم بيترسن يساوي 4.

(ب) إذا كان G رسماً هاملتونياً منتظماً من النوع 3 فأثبت أن $\chi_e(G)=3$.

(ج) استخدم (أ) و (ب) لبيان أن رسم بيترسن غير هاملتوني.

٦- ليكن $K_{n,n}=(X \cup Y, E)$ حيث $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ و $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ وليكن لدينا تلوين ضلعي من الدرجة n للرسم $K_{n,n}$ بالألوان $c_1,c_2,\cdots,c_n$. نعرّف مصفوفة مربعة $A=[a_{ij}]$ من النوع $n \times n$ كما يلي : $a_{ij}=k$ إذا وفقط

إذا كان $x_i y_k$ هو الضلع الساقط على x_i والملون باللون c_j. أثبت أن A تكون مربعاً لاتينياً؛ أي، عناصر A هي $1,2,\cdots,n$ ولا يتساوى عنصران في أي صف وفي أي عمود.

(٥,٣) كثيرات الحدود اللونية

في هذا البند، نقدم مقاربة عدّية للحصول على معلومات تتعلق بالعدد اللوني $\chi(G)$. ليكن $P_G(k)$ عدد تلوينات G بالنوع k. واضح أن $0 \geq P_G(k)$ وأن

$$\chi(G) = \min\{k : P_G(k) > 0\}$$

ويمكن بسهولة إيجاد $P_G(k)$ لكل من الرسوم الصفرية N_n والرسوم التامة K_n كما يتبين من المبرهنة التالية.

مبرهنة (٥,١١)

(أ) إذا كان G هو N_n فإن $P_G(k) = k^n$

(ب) إذا كان G هو K_n فإن $P_G(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$

البرهان

(أ) بما أن كل رأسين في N_n غير متجاورين فإنه يمكن تلوين كل من رؤوس N_n بـ k طريقة وينتج المطلوب من مبدأ الضرب للعد.

(ب) بما أن كل رأسين في K_n متجاوران فإنه يمكن تلوين الرأس الأول بـِ k طريقة والرأس الثاني بِـ $k-1$ طريقة، وهلم جرا. عليه، ينتج المطلوب من مبدأ الضرب للعد. □

أحد أصناف الرسومات التي يمكن إيجاد $P_G(k)$ لها بشكل مباشر هو الأشجار.

مبرهنة (٥,١٢)

إذا كانت $T=(V,E)$ شجرة عدد رؤوسها n فإن

$$P_T(k)=k(k-1)^{n-1}$$

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على n. واضح أن المطلوب يكون صحيحاً عندما $n=1$ أو $n=2$. افرض أن المطلوب صحيح لكل شجرة عدد رؤوسها $n\geq 2$. ولتكن $T=(V,E)$ شجرة عدد رؤوسها $n+1$. اختر $v\in V$ بحيث $\deg v=1$ وليكن $u\in V$ هو الرأس المجاور لِ v. ينتج من فرضية الاستقراء أن $P_{T-v}(k)=k(k-1)^{n-1}$ لأن $T-v$ شجرة. وبما أنه، في أي تلوين لِ T، يمكن تلوين v بأي لون مختلف عن لون u؛ فإنه ينتج من مبدأ الضرب للعد أن

$$P_T(k)=(k-1)P_{T-v}(k)=k(k-1)^n \quad \square$$

تزوّدنا المبرهنة التالية بعلاقة ارتدادية بسيطة وفعّالة في إيجاد $P_G(k)$.

مبرهنة (٥,١٣)

إذا كان $G=(V,E)$ رسماً بسيطاً وكان $e\in E$ فإن $P_G(k)=P_{G-e}(k)-P_{G\circ e}(k)$.

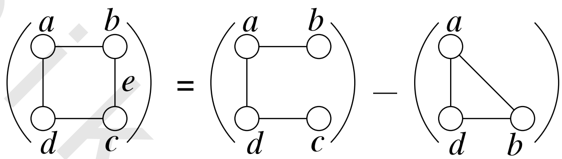
البرهان

ليكن u,v طرفي الضلع e. نعتبر تلوينات الرسم $G-e$. يوجد تقابل بين تلوينات $G-e$ التي يختلف فيها لونا u و v وتلوينات G، كما يوجد تقابل بين تلوينات $G-e$ التي تلون u و v باللون نفسه وتلوينات $G\circ e$ حيث نحذف التكرار الناتج عن التقليص. عليه فإن $P_{G-e}(k)=P_G(k)+P_{G\circ e}(k)$ ومنه ينتج مطلوب. $\square$

من المعتاد، عند استخدام العلاقة الارتدادية السابقة، وضع الرسم G بين قوسين للدلالة على $P_G(k)$.

مثال (٥,٣)

لتكن $abcda$ دورة رباعية C_4 حيث c,b طرفا الضلع e. بتطبيق العلاقة الارتدادية نجد ما يلي:



ومن مبرهنة (٥,١٢) و مبرهنة (٥,١١) نجد أن

$$
\begin{aligned}
P_{C_4}(k) &= P_{C_4-e}(k) - P_{C_4\circ e}(k) \\
&= k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) \\
&= k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k
\end{aligned}
$$

ونلاحظ أن $P_{C_4}(1)=0$ بينما $P_{C_4}(2)=2$. وعليه فإن $\chi(C_4)=2$. □

تبيّن النتائج التالية أن $P_G(k)$ كثيرة حدود في k ترتبط معاملاتها بعلاقات محددة. تسمى $P_G(k)$ **كثيرة الحدود اللونية** chromatic polynomial للرسم G.

مبرهنة (٥,١٤)

ليكن $G=(V,E)$ رسماً بسيطاً عدد رؤوسه n. عندئذٍ،

(أ) $P_G(k)$ كثيرة حدود في k درجتها تساوي n، معاملاتها أعداد صحيحة، ومعامل k^n فيها يساوي 1.

(ب) الحد الثابت في $P_G(k)$ يساوي صفراً.

(ج) $P_G(k)=k^n$ أو مجموع معاملات $P_G(k)$ يساوي صفراً.

البرهان

(أ) كلما استخدمنا العلاقة الارتدادية فإننا نحذف ونقلص ضلعاً ؛ فإذا قمنا بإجراء هذه العملية على الرسوم الناتجة بشكل متكرر ثم توقفنا عندما يتم حذف جميع الأضلاع فإننا نحصل على رسوم صفرية. وبما أن $P_{N_r}(k)=k^r$ لكل رسم صفري N_r فإن $P_G(k)$ مجموع كثيرات حدود في k، وعليه فإن $P_G(k)$ كثيرة حدود في k. وبما أن $r\le n$ لكل رسم صفري N_r حصلنا عليه فإن درجة $P_G(k)$ تساوي n. كذلك، بما أننا نحصل على رسم صفري واحد N_n فإن معامل k^n يساوي 1.

(ب) بما أن عدد تلوينات G بالنوع 0 يساوي 0 فإن $P_G(0)=0$.

(ج) إذا كان G هو الرسم الصفري N_n فإن $P_G(k)=k^n$ ؛ أما إذا وجد ضلع في G فإن $P_G(1)=0$.

مبرهنة (٥,١٥)

ليكن G رسماً بسيطاً عدد رؤوسه n وعدد أضلاعه m.

(أ) $P_G(k)$ مجموع قوى متعاقبة لـِ k وتتناوب إشارات معاملات هذه القوى. أي، يوجد $0\le r\le n-1$ بحيث

$$P_G(k)=k^n-a_{n-1}k^{n-1}+\cdots+(-1)^r a_{n-r}k^{n-r}$$

و $a_i>0$ لكل i.

(ب) $a_{n-1}=m$

البرهان

يمكن استخدام الاستقراء الرياضي على عدد أضلاع G للحصول على برهان، ونترك التفاصيل كتمرين للقارئ.

مبرهنة (٥,١٦)

إذا كان G رسماً بسيطاً مركباته $G_1,G_2,\cdots,G_r$ فإن:

(أ) $P_G(k)=\prod_{i=1}^{r}P_{G_i}(k)$.

(ب) إن r هو أصغر i بحيث يكون معامل k^i في $P_G(k)$ لا يساوي صفراً.

البرهان

متروك كتمرين للقارئ.

ملاحظات

١- إذا كان عدد الأضلاع صغيراً فإن العلاقة الارتدادية $P_G(k)=P_{G-e}(k)-P_{G\circ e}(k)$ تكون مناسبة لإيجاد كثيرة الحدود اللونية للرسم حيث تكون الرسوم الناتجة رسوماً صفرية.

٢- إذا كان عدد الأضلاع كبيراً فإن العلاقة الارتدادية

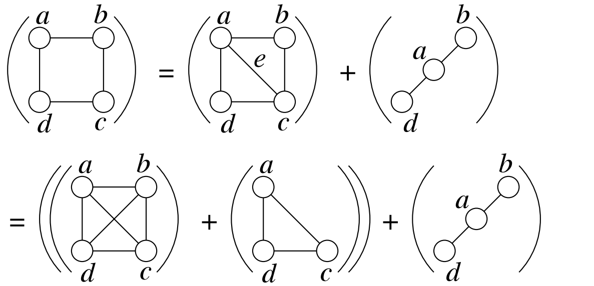
$$P_{G-e}(k)=P_G(k)+P_{G\circ e}(k)$$

تكون مناسبة لإيجاد كثيرة الحدود اللونية للرسم حيث تكون الرسوم الناتجة رسوماً تامة.

٣- عندما نستخدم إحدى العلاقتين الارتداديتين فإنه يمكننا أن نتوقف عندما تكون الرسوم الناتجة معلومة كثيرات الحدود اللونية كما هو مبين في مثال(٥,٣).

٤- توجد أحياناً صيغ تجمع بين كثيرة الحدود اللونية لرسم وكثيرات الحدود اللونية لبعض رسومه الجزئية؛ وتسهل هذه الصيغ إيجاد كثيرة الحدود اللونية للرسم. تتضمن التمارين بعض هذه الصيغ.

مثال (٥,٤)

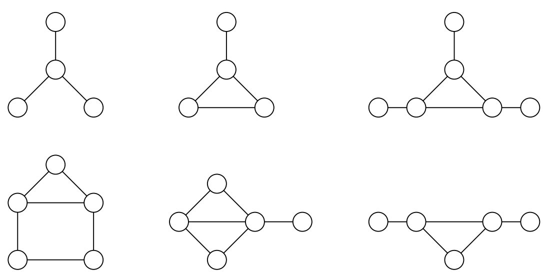


$$
\begin{aligned}
&= k(k-1)(k-2)(k-3)+k(k-1)(k-2)+k(k-1)^2 \\
&= k(k-1)\left[(k-2)(k-3)+(k-2)+(k-1)\right] \\
&= k(k-1)\left(k^2-3k+3\right) \\
&= k^4-4k^3+6k^2-3k
\end{aligned}
$$

وفي ختام هذا البند نشير إلى أن خواص كثيرات الحدود اللونية التي ذكرت في المبرهنات السابقة غير كافية لتمييزها. فمثلاً $k^4-4k^3+3k^2$ ليست كثيرة حدود لونية لأي رسم. في الحقيقة، لو وجد مثل هذا الرسم البسيط فيجب أن يكون عدد رؤوسه 4 وعدد أضلاعه 4 وعدد مركباته 2، وذلك وفق المبرهنتين (٥,١٤) و (٥,١٥). واضح أن مثل هذا الرسم غير موجود.

تمارين (٥,٣)

١- جد كثيرة الحدود اللونية لكل رسم من الرسوم في شكل(٥,٤).



شكل(٥,٤).

٢- أثبت مبرهنة (٥,١٥).

٣- أثبت مبرهنة (٥,١٦).

٤- إذا كان v رأساً بحيث $\deg(v)=1$ ، في رسم G ، فأثبت أن $P_G(k)=(k-1)P_{G-v}(k)$.

٥- إذا كان G رسماً بسيطاً بحيث $P_G(k)=k(k-1)^{n-1}$ فأثبت أن G شجرة.

٦- أعط مثالاً لرسمين غير متماثلين H,G بحيث يكون $P_G(k)=P_H(k)$.

٧- بيّن أن كلاً من كثيرات الحدود التالية لا يمكن أن تكون كثيرة حدود لونية.

(أ) k^3-k^2+1 (ب) $k^5-4k^4+3k^3$

(ج) k^5-k^3+3k (د) k^3-k^2+k

٨- (أ) أثبت أن

$$P_{C_n}(k)-(k-1)^n=(k-1)^{n-1}-P_{C_{n-1}}(k)\quad \forall n\geq 4$$

$$P_{C_n}(k)-(k-1)^n=P_{C_{n-2}}(k)-(k-1)^{n-2}\quad \forall n\geq 5$$

(ب) أثبت أن

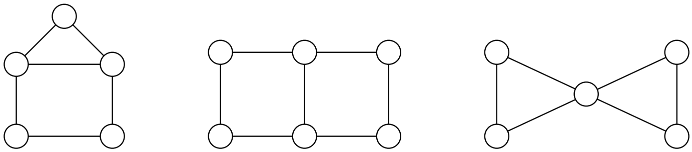
$$P_{C_n}(k)=(k-1)^n+(-1)^n(k-1)\quad \forall n\geq 3$$

٩- (أ) أثبت أن $P_{G+K_1}(k)=kP_G(k)$

(ب) جد $P_{W_n}(k)$.

١٠- (أ) إذا كان $G\cap H$ رسماً تاماً فأثبت أن $P_{G\cup H}(k)=\dfrac{P_G(k)P_H(k)}{P_{G\cap H}(k)}$

(ب) استخدم (أ) لحساب كثيرة الحدود اللونية لكل رسم من الرسوم في شكل(٥,٥).



شكل(٥,٥).

١١- أثبت أن $P_{K_{2,r}}(k) = k(k-1)^r + k(k-1)(k-2)^r$.