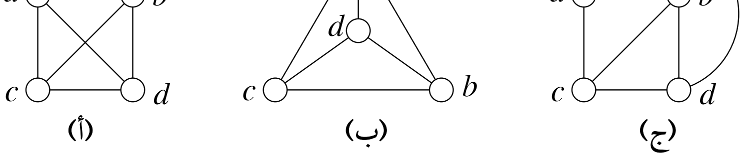
الفصل الرابع

الاستوائية
PLANARITY

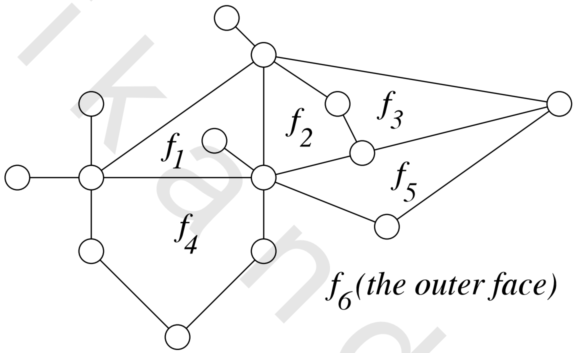
(٤,١) تعاريف ونتائج أساسية

الرسوم (أ) و (ب) و (ج) في شكل(٤,١) تمثل نفس الرسم K_4. نقول عن أي منها إنه تمثيل للرسم K_4. لاحظ أنه في التمثيل في الشكل (أ) يوجد ضلعان متقاطعان ad و cb بينما في كل من الشكلين (ب) و (ج) لا توجد أضلاع متقاطعة. نقول عن تمثيل لرسم G إنه **تمثيل مستوٍ** planar representation إذا كان لا يوجد فيه تقاطعات بين الأضلاع (لا يشترط في التمثيل المستوي أن تكون الأضلاع مستقيمة)، ونقول عن رسم إنه **رسم مستوٍ** planar graph إذا وجد له تمثيل مستوٍ. عليه K_4 رسم مستوٍ. سنثبت فيما بعد أن كلاً من الرسمين K_5 و $K_{3,3}$ غير مستوٍ.



شكل(٤,١).

ليكن G رسماً مستوياً وليكن ممثلاً في المستوى بتمثيل مستوٍ. إن هذا التمثيل يجزئ المستوى إلى أوجه حيث كل منطقة مترابطة من المستوى متبقية بعد حذف رؤوس وأضلاع الرسم G تسمى **وجهاً** face ، ويسمى الوجه غير المحدود **الوجه الخارجي** outer face. شكل(٤,٢) يوضح أوجه رسم مستوٍ: f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 والوجه الخارجي f_6.



شكل(٤,٢).

المبرهنة التالية تسمى صيغة أويلر Euler's formula

مبرهنة (٤,١)

إذا كان G رسماً مستوياً مترابطاً عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه e وعدد أوجهه f ، فإن $v - e + f = 2$.

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على عدد أضلاع G. إذا كان G رسماً مترابطاً عدد أضلاعه يساوي 0 فإن $G = K_1$. عليه فالمساواة متحققة في هذه الحالة ومنه

المبرهنة صحيحة عندما يكون $e = 0$. افرض أن المبرهنة متحققة عندما يكون $e = k \geq 0$. ليكن H رسماً مستوياً مترابطاً عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه $k+1$ وعدد أوجهه f. نريد برهان أن $v-(k+1)+f=2$. لدينا حالتان :

الحالة الأولى : H لا يحتوي على دورات، إذن H شجرة. من مبرهنة (٢,٢) $e = v-1 = k+1$ ومنه $v = k+2$. وحيث إن الشجرة رسم مستوٍ وله وجه واحد فقط هو الوجه الخارجي، أي $f = 1$ ، فإن $v-e+f = k+2-(k+1)+1 = 2$.

أي أن المبرهنة صحيحة في هذه الحالة.

الحالة الثانية : H يحتوي على دورة. عيّن دورة في H وضلعا xy فيها. عليه $H-xy$ رسم مترابط مستوٍ عدد أضلاعه k وعدد رؤوسه v وعدد أوجهه $f-1$ (لاحظ أن وجهين من H أصبحا وجهاً واحداً في $H-xy$). من فرضية الاستقراء $v-k+f-1=2$ ومنه $v-(k+1)+f=2$. عليه المبرهنة صحيحة في هذه الحالة. □

لاحظ أن شرط الترابط ضروري في المبرهنة السابقة فعلى سبيل المثال الرسم المكون من رأسين منعزلين، يحقق شروط المبرهنة ما عدا شرط الترابط ومع ذلك فهو لا يحقق المساواة لأنه في هذه الحالة $v-e+f = 2-0+1 = 3$.

النتيجة التالية هي تعميم لمبرهنة (٤,١).

نتيجة (٤,١)

إذا كان G رسما مستوياً عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه e وعدد أوجهه f وعدد مركباته k ، فإن $v-e+f = k+1$.

البرهان

لتكن $G_1,G_2,\ldots,G_k$ هي مركبات الرسم G بحيث عدد رؤوس المركبة G_i هو v_i وعدد أضلاعها e_i. بما أن G_i رسم مترابط مستوٍ فإنه ينتج من مبرهنة (٤,١) أن $v_i - e_i + f_i = 2$. ومنه $\sum_{i=1}^{k}(v_i - e_i + f_i) = 2k$. أي، $\sum_{i=1}^{k} v_i - \sum_{i=1}^{k} e_i + \sum_{i=1}^{k} f_i = 2k$. ولكن $v = \sum_{i=1}^{k} v_i$ و $e = \sum_{i=1}^{k} e_i$. كذلك $f + (k-1) = \sum_{i=1}^{k} f_i$ لأن الوجه الخارجي يتكرر في كل المركبات فيكتفى بحسابه مرةً واحدة. عليه $v - e + f + (k-1) = 2k$ ومنه $v - e + f = k + 1$. □

على الرغم من أن عدد الأضلاع في الرسم الذي عدد رؤوسه n قد يصل إلى $\frac{n(n-1)}{2}$ ضلعاً كما في الرسم التام K_n، إلا أن الحد الأعلى لعدد الأضلاع في الرسم المستوي أقل من ذلك كما في النتيجة التالية.

نتيجة (٤,٢)

إذا كان G رسما مستوياً مترابطاً عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه $e \geq 3$، فإن $e \leq 3v - 6$.

البرهان

ليكن G رسما مستوياً مترابطاً عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه e وعدد أوجهه f. نكون رسماً ثنائي التجزئة $H = (X, Y, E')$ حيث $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_e\}$ هي مجموعة أضلاع G و $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_f\}$ هي مجموعة أوجه G. يكون xy ضلعاً في H إذا كان الضلع x أحد الأضلاع التي تحد الوجه y. لكل وجه y، لاحظ أن $\deg_H(y) \geq 3$ لأن طول أي دورة على الأقل 3. وهذا أيضاً متحقق

للوجه الخارجي لأن $e \geq 3$. كذلك $\deg_H(x) \geq 2$ لأن أي ضلع يحد على الأكثر وجهين. ينتج من مبرهنة (١,٤) أن

$$|E'| = \sum_{i=1}^{e} \deg(x_i) = \sum_{j=1}^{f} \deg(y_j)$$

عليه $2e \geq |E'| \geq 3f$ ومنه $2e \geq 3f$. بما أن G رسم مستوٍ مترابط فهو يحقق صيغة أويلر، أي أن $v - e + f = 2$ ومنه $3v - 3e + 3f = 6$. عليه $3v - 3e + 2e \geq 6$ ومنه $e \leq 3v - 6$.

ملاحظة (٤,١)

$e \leq 3v - 6$ متحققة أيضاً عندما يكون الرسم G في نتيجة (٤,٢) غير مترابط. ونترك إثبات ذلك تمريناً للقارئ.

النتيجة السابقة تستخدم غالباً لإثبات أن رسماً ما غير مستوٍ كما في النتيجة التالية.

نتيجة (٤,٣)

K_5 رسم غير مستوٍ

البرهان

للرسم K_5 : $v = 5, e = 10$. ومنه $e = 10 > 9 = 3v - 6$. إذن، حسب نتيجة (٤,٢)، K_5 رسم غير مستوٍ.

مبرهنة (٤,٢)

إذا كان G رسماً مترابطاً مستوياً فإنه يوجد في G رأس x بحيث $\deg(x) \leq 5$.

البرهان

ليكن v هو عدد رؤوس G و e عدد أضلاعه. إذا كان $v < 3$ فإن المطلوب صحيح. لذلك نفرض أن $v \geq 3$. بالاستناد إلى نتيجة (٤,٢)، نجد أن

$e \le 3v-6$. نفرض أن مجموعة رؤوس G هي $V=\{x_1,x_2,\ldots,x_v\}$ ونفرض أن $\deg(y)\ge 6$ لكل $y\in V$. من مبرهنة (١,١)،

$$2e=\deg(x_1)+\deg(x_2)+\cdots+\deg(x_v)$$

إذن،

$$2e=\deg(x_1)+\deg(x_2)+\cdots+\deg(x_v)\ge 6+\cdots+6=6v$$

وعليه فإن $e\ge 3v$. ومنه فإن $3v\le 3v-6$، أي أن $0\le -6$. وهذا تناقض.

نتيجة (٤,٤)

إذا كان G رسما مستوياً مترابطاً ولا يحتوي على مثلثات وعدد رؤوسه v وعدد أضلاعه $e\ge 3$، فإن $e\le 2v-4$.

البرهان

متروك تمريناً للقارئ.

نتيجة (٤,٥)

$K_{3,3}$ رسم غير مستوٍ

البرهان

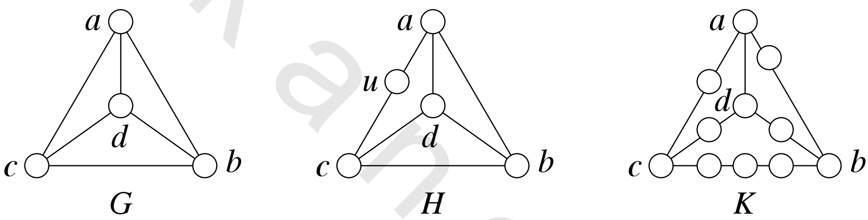
متروك تمريناً للقارئ.

لاحظ أنه إذا تحقق لرسم G عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه e أن $e\le 3v-6$ فهذا لا يعني بالضرورة أن الرسم مستوٍ. على سبيل المثال الرسم $K_{3,3}$ يحقق المتباينة لكنه غير مستوٍ. أي أن عكس نتيجة (٤,٢) غير صحيح.

(٤,٢) قَسْم الأضلاع ومبرهنة كوراتوسكي

في شكل(٤,٣)، الفرق بين الرسمين G و H أن الضلع ac في G قد أُبدل بالممر auc في H. لاحظ أنه لو كان الرسم G مستوياً فإن الرسم H مستوٍ لأنه

يمكن الحصول على تمثيل مستو للرسم H من التمثيل المستوي للرسم G بإبدال الضلع ac بالمر auc. والعكس كذلك صحيح، أي أنه يمكن الحصول على تمثيل مستوٍ للرسم G من تمثيل مستوٍ للرسم H. نعرف عملية **قَسْم ضلع edge subdivision** في رسم G بأنها حذف ذلك الضلع وإضافة ممر طوله 2 يربط بين طرفي الضلع المحذوف. ويقال عن رسم H إنه **قسم subdivision** للرسم G إذا أمكن الحصول على H من G بمتتالية منتهية من عمليات قسم الأضلاع. في شكل(٤,٣)، الرسم K قسم للرسم G.



شكل(٤,٣).

مبرهنة كوراتوسكي Kuratowski التالية والتي سنقدمها دون برهان تعطي تمييزاً للرسوم المستوية، علماً أنها ليست خوارزمية مناسبة لاختبار استواء رسم.

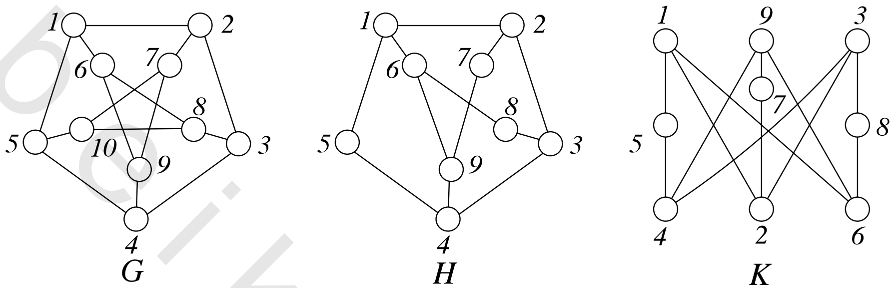
مبرهنة (٤,٣)

يكون الرسم مستوياً إذا وفقط إذا كان لا يحتوي على رسم جزئي يكون قسماً للرسم K_5 أو للرسم $K_{3,3}$.

مثال (٤,١)

سنستخدم مبرهنة (٤,٣) لإثبات أن الرسم G المعطى في شكل(٤,٤) والذي يسمى رسم بيترسن Petersen رسم غير مستوٍ. الرسم H في شكل(٤,٤) هو

$G-10$ وهو رسم قسم للرسم $K_{3,3}$ كما هو موضح في شكل(٤,٤). من مبرهنة (٤,٣) ينتج أن رسم بيترسن رسم غير مستوٍ.



شكل(٤,٤).

تمارين

١- هل يمكن أن يكون لرسم مستوٍ 70 رأساً و 75 ضلعاً و 6 أوجه؟

٢- إذا كان G رسماً مستوياً عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه $e \geq 3$ ، فأثبت أن $e \leq 3v-6$.

٣- لأي رسم مستوٍ $G=(V,E)$ ، نقول إن G رسم **مستوٍ أعظمي maximal planar** إذا كان $G+xy$ غير مستوٍ لكل رأسين غير متجاورين $x,y \in V$. إذا كان G رسماً مستوياً أعظمياً عدد رؤوسه $v \geq 3$ وعدد أضلاعه e فأثبت أن $e=3v-6$.

٤- إذا كان G رسماً مستوياً مترابطاً ولا يحتوي على مثلثات وعدد رؤوسه v وعدد أضلاعه $e \geq 3$ ، فأثبت أن $e \leq 2v-4$.

٥- استخدم تمرين ٤ لإثبات أن الرسم $K_{3,3}$ غير مستوٍ.

٦- إذا كان G رسماً مستوياً مترابطاً عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه e وطول أقصر دورة فيه يساوي k ، فأثبت أن $e \leq \frac{k}{k-2}(v-2)$.

٧- استخدم تمرين ٦ لإثبات أن رسم بيترسن غير مستوٍ.

٨- استخدم تمرين ٦ لإثبات أن الرسم K المعطى في شكل(٤,٥) غير مستوٍ.

٩- إذا كان G رسماً ثنائي التجزئة بحيث $\delta(G) \geq 4$ فبين فيما إذا كان G مستوياً أم لا.

١٠- استخدم الاستقراء الرياضي على عدد المركبات لإثبات نتيجة (٤,١).

١١- جد قيم m,n بحيث يكون كل من الرسوم التالية غير مستوٍ.

(أ) K_n

(ب) $K_{m,n}$

(ج) Q_n

١٢- ليكن G رسماً عدد رؤوسه v.

(أ) إذا كان $v \leq 6$ فأثبت أن G أو $\bar{G}$ مستوٍ.

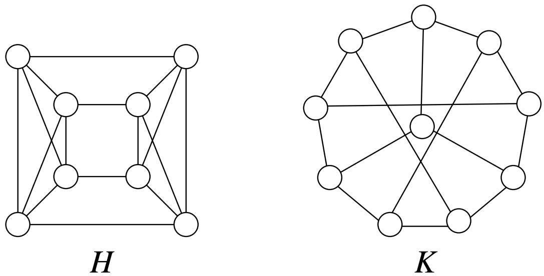
(ب) إذا كان $v \geq 11$ فأثبت أن G أو $\bar{G}$ غير مستوٍ.

(ج) إذا كان $v = 8$ فأعطِ مثالاً لرسم G بحيث كل من G و $\bar{G}$ مستوٍ. وأعطِ مثالاً لرسم H بحيث كل من H و $\bar{H}$ غير مستوٍ.

١٣-

(أ) أثبت أن $\bar{Q_3}$ يماثل الرسم H المعطى في شكل(٤,٥).

(ب) أثبت أن $\bar{Q_3}$ غير مستوٍ.



شكل(٤,٥).