الفصل الثالث

الرسوم الأويلرية والرسوم الهاملتونية
EULERIAN GRAPHS AND HAMILTONIAN GRAPHS

(٣,١) الرسوم الأويلرية

تعتبر مسائل المسارات من المسائل المهمة في نظرية الرسومات. وموضوع هذه المسائل هو البحث عن مسارات تحقق شروطاً مفروضة. ومن الناحية التاريخية، فقد بدأت نظرية الرسومات عندما حلّ أويلر مسألة من هذا النوع وهي مسألة الجسور السبعة والتي سوف نقدمها في ختام هذا البند.

لتكن C دارة في الرسم G. تسمى C **دارة أويلرية** Eulerian circuit في G إذا كانت تحتوي على جميع أضلاع وجميع رؤوس G؛ ونقول إن G **رسم أويلري** Eulerian graph إذا كان G يحتوي على دارة أويلرية. وبالمثل، إذا كان T طريقاً مفتوحاً في الرسم G فإن T يسمى **طريقاً أويلرياً** Eulerian trail إذا كان يحتوي على جميع أضلاع وجميع رؤوس G؛ ونقول إن G رسم **نصف أويلري** semi-Eulerian graph إذا كان G يحتوي على طريق أويلري.

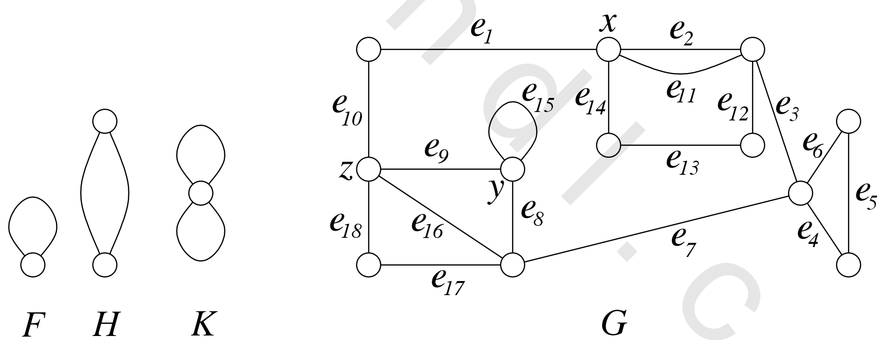
تعطينا المبرهنة التالية تمييزاً للرسوم الأويلرية كما أن برهانها يزوّدنا بخوارزمية لإنشاء الدارات الأويلرية.

مبرهنة (٣,١)

ليكن G رسماً غير صفري. عندئذٍ، G رسم أويلري إذا وفقط إذا كان G مترابطاً وكانت جميع رؤوسه زوجية.

البرهان

ليكن G أويلرياً. إذن توجد دارة أويلرية $x = x_0, e_1, x_1, \cdots, e_n, x_n = x$ تحتوي على جميع أضلاع وجميع رؤوس G. واضح أن G مترابط وأن كل رأس في المتتالية $e_1, x_1, \cdots, e_n$ يلتقي عدداً زوجياً موجباً من المرات مع الأضلاع ؛ كما أن الرأس $x = x_0 = x_n$ يلتقي بالضلعين e_1, e_n. وعليه فإن جميع رؤوس G زوجية.



شكل(٣,١).

نفرض الآن أن G مترابط وأن درجات جميع رؤوسه أعداد زوجية موجبة. سنستخدم الاستقراء الرياضي على عدد الأضلاع n لإثبات المطلوب. إذا كان $n = 1$ فإن G يماثل الرسم F في شكل(٣,١) أمّا إذا كان $n = 2$ فإن G يماثل أحد الرسمين H, K في شكل(٣,١) ؛ وعليه فإن Gأويلري عندما يكون $n = 1$

أو $n = 2$. نفرض الآن أن $n > 2$ وأن النتيجة صحيحة عندما يكون عدد الأضلاع أقل من n ؛ كما نفرض أن عدد أضلاع $G = (V, E)$ يساوي n. ننشئ الآن طريقاً $T_m = x_0 e_1 x_1 e_2 \cdots e_m x_m$ وفق الخوارزمية التالية :

١- اختر أي رأس $x_0 \in V$ وضع $T_0 = x_0$.

٢- افرض أن الطريق $T_j = x_0 e_1 x_1 e_2 \cdots e_j x_j$ قد أنشئ. اختر ضلعاً $e_{j+1} = \{x_j, x_{j+1}\}$ من $E - \{e_1, e_2, \cdots, e_j\}$

وضع $T_{j+1} = x_0 e_1 x_1 e_2 \cdots e_j x_j e_{j+1} x_{j+1}$

(٣) كرر الخطوة (٢) كلما أمكن ذلك.

بما أن درجة x_m في الرسم $H = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ تساوي 0 فإن $x_m = x_0$ ؛ وعليه فإن T_m دارة في الرسم G. إذا كانت T_m تحتوي على جميع أضلاع G فإن G يكون رسماً أويلرياً. نفرض الآن أن T_m ليست دارة أويلرية في G ونعتبر الرسم غير الصفري H. لتكن $H_1, H_2, \cdots, H_r$ هي المركبات غير الصفرية للرسم H. واضح أن كلاً من $H_1, H_2, \cdots, H_r$ رسم مترابط ودرجات جميع رؤوسه زوجية موجبة، وبتطبيق فرضية الاستقراء نجد أنه توجد دارة أويلرية C_i في H_i لكل $i = 1, 2, \cdots, r$. وبما أن G مترابط فإنه يوجد على الأقل رأس مشترك بين الدارة T_m والرسم H_i لكل $i = 1, 2, \cdots, r$. نضيف الآن الدارة C_i إلى الدارة T_m عند الرأس المشترك لكل $i = 1, 2, \cdots, r$ فنحصل على دارة أويلرية في G.

مثال (٣,١)

الرسم G في شكل(٣,١) في أويلري لأنه مترابط ودرجات جميع رؤوسه زوجية. إذا بدأنا بالدارة $e_1 e_2 \cdots e_{10}$ فإنه يمكن إضافة الدارات $e_{11} e_{12} e_{13} e_{14}$ ،

e_{15} ، $e_{16}e_{17}e_{18}$ عند الرؤوس z, y, x على الترتيب لنحصل على دارة أويلرية في G هي

$$e_1 e_{11} e_{12} e_{13} e_{14} e_2 e_3 \cdots e_8 e_{15} e_9 e_{16} e_{17} e_{18} e_{10}$$

ملاحظة (٣,١)

يمكن للقارئ أن يرى بسهولة أنه يمكن تعديل الإثبات الاستقرائي في مبرهنة(٣,١) بحيث نبدأ بأي دورة في G لإنشاء دارة أويلرية في G.

نقدم الآن خوارزمية جيدة لإنشاء الدارات الأويلرية في الرسوم الأويلرية.

خوارزمية(٣,١) خوارزمية فلوري (Fleury's algorithm)

المدخل: رسم أويلري $G=(V, E)$.

المخرج: دارة أويلرية في G.

الخوارزمية

١- اختر أي رأس $x_0 \in V$ وضع $T_0 = x_0$.

٢- افرض أن الطريق $T_j = x_0 e_1 x_1 e_2 \cdots e_j x_j$ قد أنشئ. اختر ضلعاً $e_{j+1} = \{x_j, x_{j+1}\}$ من $E - \{e_1, e_2, \cdots, e_j\}$ بحيث e_{j+1} ليس جسراً في الرسم $G_j = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_j\}$ إلا إذا لم يكن هناك خيار آخر.

٣- كرر الخطوة (٢) كلما أمكن ذلك.

مبرهنة (٣,٢)

إذا كان $G=(V, E)$ رسماً أويلرياً فإن كل طريق منشئ بوساطة خوارزمية (٣,١) هو دارة أويلرية في G.

البرهان

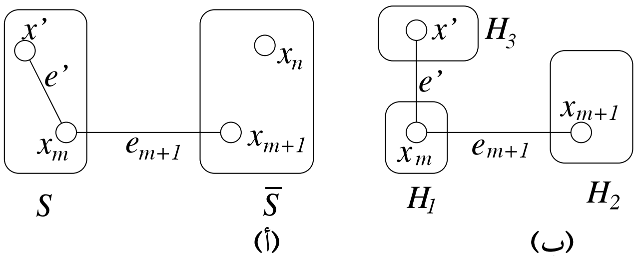
ليكن $T_n = x_0 e_1 x_1 e_2 \cdots e_n x_n$ طريقاً منشأ بوساطة خوارزمية فلوري في G. بما أن درجة x_n في الرسم $G_n = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ تساوي 0 فإن $x_n = x_0$؛ وعليه فإن T_n دارة في الرسم G. لغرض الحصول على تناقض، افرض أن T_n لا تحتوي على جميع أضلاع الرسم G. ضع

$$S = \{x \in V : \text{في الرسم } G_n \ \deg x > 0\} \text{ ، } \bar{S} = V - S$$

واضح أن $S \neq \phi$، وبما أن G مترابط فإنه يوجد على الأقل رأس مشترك بين الدارة T_n والمجموعة S. كذلك، واضح أن $x_0 = x_n \in \bar{S}$. ليكن $0 < m < n$ هو أكبر عدد صحيح بحيث $x_m \in S$ و $x_{m+1} \in \bar{S}$ ولتكن

$$A = \{e \in E : \text{ يصل } e \text{ بين رأس من } S \text{ ورأس من } \bar{S}\}$$

ينتج من تعريف $\bar{S}$ أن $A \cap \left(E - \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}\right) = \phi$ وعليه فإن $A \cap \left(E - \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}\right) \subseteq \{e_{m+1}, e_{m+2}, \cdots, e_n\}$. ومن تعريف m ينتج أن $A \cap \left(E - \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}\right) = \{e_{m+1}\}$. إذن e_{m+1} جسر في الرسم G_m (انظر شكل(٣,٢)(أ)). ولما كانت درجة x_m في الرسم G_n أكبر من 0 فإنه يوجد ضلع $e' = \{x_m, x'\}$ بحيث $e' \neq e_m$ و $e' \neq e_{m+1}$. بما أن e_{m+1} جسر في G_m فإن الخطوة (٢) في خوارزمية فلوري تقتضي أن e' جسر في G_m.

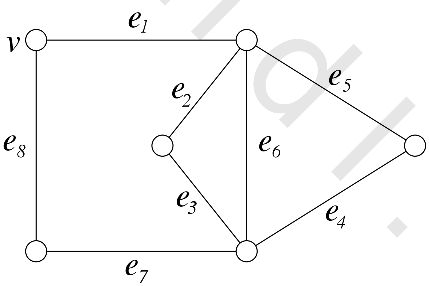


شكل(٣,٢).

وعليه فإنه توجد مركبات H_1, H_2, H_3 للرسم $H = G_m - \{e_{m+1}, e'\}$ بحيث $x_m \in H_1,\ x_{m+1} \in H_2,\ x' \in H_3$ (انظر شكل(٣,٢)(ب)). واضح أن $x_0 = x_n \in H_2$. نلاحظ أن x_m, x_0 هما الرأسان الفرديان الوحيدان في الرسم G_m. إذن الرؤوس الفردية في الرسم H هي x_0, x_m, x', x_{m+1}. ولما كان $x_0 = x_n$ رأساً في المركبة H_2 بسبب المسار $x_{m+1} e_{m+2} \cdots x_n$ فإن المركبة H_1 تحتوي على رأس فردي واحد هو x_m ؛ وهذا يتناقض مع أن عدد الرؤوس الفردية في H_1 يجب أن يكون زوجياً.

مثال (٣,٢)

الرسم G في الشكل(٣,٣) أويلري لأنه مترابط ودرجات جميع رؤوسه زوجية. إذا بدأنا بالرأس v وطبقنا خوارزمية فلوري فإنه يمكننا إنشاء دارة أويلرية في G مثل الدارة: $e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8$.



G

شكل(٣,٣).

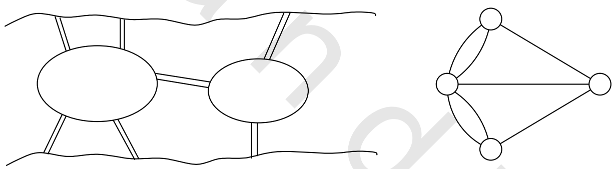
مبرهنة (٣,٣)

ليكن G رسماً غير صفري. عندئذٍ، G رسم نصف أويلري إذا وفقط إذا كان G مترابطاً ويحتوي بالضبط على رأسين فرديين. علاوة على ذلك، كل طريق أويلري في G يبدأ بأحد الرأسين الفرديين وينتهي بالرأس الفردي الآخر.

البرهان

ليكن G نصف أويلري. إذن يوجد طريق أويلري $x_0 e_1 x_1 \cdots e_n x_n$ في G. واضح أن G مترابط وأن كلاً من x_n, x_0 رأس فردي بينما الرؤوس الأخرى $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ رؤوس زوجية.

نفرض الآن أن $G = (V, E)$ مترابط ويحتوي بالضبط على رأسين فرديين b, a. نضيف ضلعاً جديداً e يصل بين b, a فنحصل على رسم جديد $H = (V, E')$ حيث $E' = E \cup \{e\}$. بما أن H مترابط وجميع رؤوسه زوجية فإنه أويلري ؛ وعليه توجد دورة أويلرية C في H. نحذف e من C فنحصل على طريق أويلري T في G.



(أ) (ب)

شكل(٣,٤).

ملاحظة (٣,٢)

إذا كان G رسماً نصف أويلري وكان رأساه الفرديان هما b, a فإنه يمكن إنشاء طريق أويلري في G بعدة طرائق.

١- نضيف ضلعاً جديداً e يصل بين الرأسين الفرديين ثم ننشئ دارة أويلرية في الرسم الجديد ؛ ثم نحذف الضلع e.

٢- ننشئ طريقاً من a إلى b ثم نضيف الأضلاع الأخرى إلى هذا الطريق.

٣- نعدل خوارزمية فلوري بحيث نبدأ من رأس فردي.

مثال (٣,٣) (مسألة الجسور السبعة)

تقع مدينة على نهر وتنتشر أحياؤها على ضفتي النهر وعلى جزيرتين تقعان في النهر. تتصل أجزاء هذه المدينة بوساطة سبعة جسور كما هو موضح في شكل(٣,٤)(أ).

هل يوجد مكان في هذه المدينة بحيث ننطلق منه ثم نعبر كلاً من الجسور السبعة مرة واحدة ثم نعود إلى ذلك المكان؟

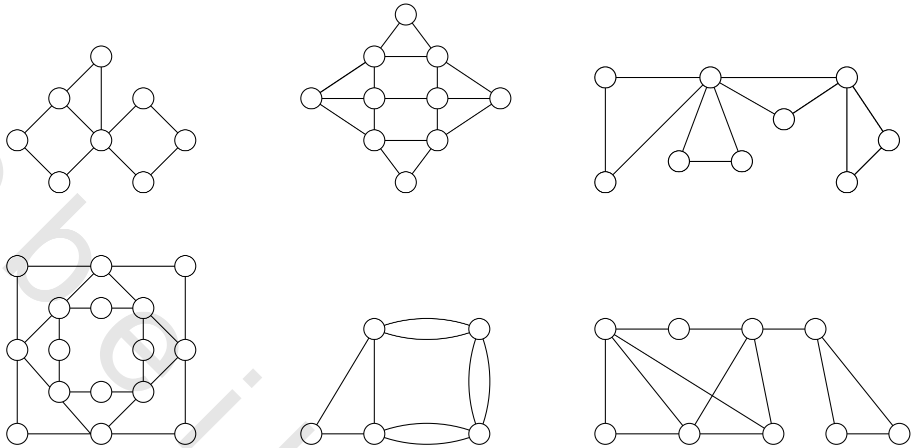
يمثل الرسم في شكل(٣,٤)(ب) نموذجاً رياضياً لهذه المدينة حيث تمثل الأضلاع الجسور. ويمكن صياغة السؤال السابق كما يلي : هل هذا الرسم أويلري؟ واضح أن الرسم يحتوي على رؤوس فردية وعليه فإنه غير أويلري. نلاحظ أنه غير نصف أويلري أيضاً.

تمارين (٣,١)

١- بيّن فيما إذا كانت الرسوم المعطاة في شكل(٣,٥) أويلرية أو نصف أويلرية أم لا. إذا كان الرسم أويلرياً فجد دارة أويلرية فيه، وإذا كان نصف أويلري فجد طريقاً أويلرياً فيه.

٢- هل يمكن إضافة عدد من الجسور كي يصبح حل مسألة الجسور السبعة ممكناً؟

٣- لتكن C دارة في الرسم المترابط G وليكن H الرسم الناتج من G بعد حذف أضلاع C. إذا كان H غير صفري فأثبت أنه يوجد على الأقل رأس مشترك بين C و H.



شكل(٣,٥).

٤- إذا كان G رسماً وكانت جميع رؤوسه زوجية فأثبت أن G لا يحتوي على جسور. استنتج أن أي رسم أويلري لا يحتوي على جسور.

٥- (أ) ما هي قيم n بحيث يكون K_n أويلرياً؟

(ب) ما هي قيم n,m بحيث يكون $K_{m,n}$ أويلرياً؟

(ج) ما هي قيم n بحيث يكون $\bar{C}_n$ أويلرياً؟

(د) ما هي قيم n بحيث يكون W_n أويلرياً؟

(هـ) ناقش الفقرات السابقة بحيث يكون الرسم نصف أويلري.

٦- ليكن G رسماً مترابطاً. أثبت أن G أويلري إذا وفقط إذا كان يمكن تقسيم G إلى دارت منفصلة ضلعياً.

٧- ليكن G رسماً بسيطاً غير صفري. نرمز للرسم الضلعي للرسم G بالرمز $L(G)$ ونعرفه كما يلي : رؤوس $L(G)$ هي أضلاع G ويتجاور رأسان في $L(G)$ إذا وفقط إذا كانا متجاورين في G.

(أ) إذا كان G رسماً بسيطاً أويلرياً فأثبت أن $L(G)$ أويلري.

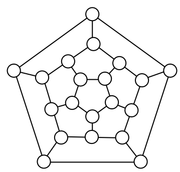
(ب) أثبت صواب أو خطأ ما يلي : إذا كان $L(G)$ أويلرياً فإن G أويلري.

(٣,٢) الرسوم الهاملتونية

تسمى كل دورة مولدة لرسم G **دورة هاملتونية** Hamiltonian cycle في G ، ويسمى كل ممر مولّد لـِ G **ممراً هاملتونياً** Hamiltonian path في G. وإذا احتوى الرسم G على دورة هاملتونية فيقال إنه **رسم هاملتوني** Hamiltonian graph ، أما إذا احتوى G على ممر هاملتوني فيقال إنه **رسم نصف هاملتوني** Semi-Hamiltonian graph.

ملاحظة (٣,٣)

بدأ هاملتون دراسة الرسوم الهاملتونية بالرسم الموضح في شكل(٣,٦) والذي هو إسقاطٌ **لاثني عشري الوجوه** dodecahedron على المستوى.



شكل(٣,٦).

مبرهنة (٣,٤)

إذا كان G رسماً هاملتونياً فإن $comp(G-S) \le |S|$ لكل مجموعة جزئية فعلية غير خالية S من $V(G)$ حيث $comp(G-S)$ هو عدد مركبات الرسم $G-S$.

البرهان

تتحقق العلاقة عندما يكون $comp(G-S)=1$. لذلك، نفرض أن $copm(G-S)=m>1$ وأن $G_1,G_2,\cdots,G_m$ هي مركبات الرسم $G-S$. ولتكن $v_1e_1v_2\cdots v_{n-1}e_{n-1}v_ne_nv_1$ دورة هاملتونية في G. واضح أنه إذا كان k هو أكبر دليل بحيث $v_k\in G_i$ فإن $v_{k+1}\in S$ حيث نعتبر $v_{k+1}=v_1$ عندما يكون $k=n$. وبما أن هذا متحقق لكل $1\le i\le m$، فينتج أن $comp(G-S)\le|S|$.

مبرهنة (٣,٥)

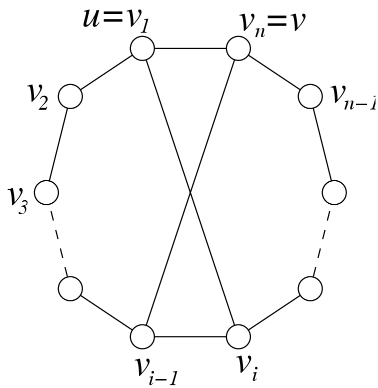
ليكن G رسماً رتبته $n\ge 3$. وليكن u,v رأسين غير متجاورين في G بحيث $\deg u+\deg v\ge n$. عندئذٍ، G هاملتوني إذا وفقط إذا كان $G+uv$ هاملتونياً.

البرهان

واضح أنه إذا كان G هاملتونياً فإن $G+uv$ هاملتوني. الآن، نفرض أن $G+uv$ هاملتوني. وبهدف الحصول على تناقض، نفرض أن G غير هاملتوني. إذن كل دورة هاملتونية في $G+uv$ لابد أن تحتوي على الضلع uv. لتكن $C:(u=)v_1e_1v_2\cdots v_{n-1}e_{n-1}v_n(=v)e_nv_1$ دورة هاملتونية في $G+uv$. إذا وجد $3\le i\le n-1$ بحيث v_1 مجاور لـِ v_i و v_n مجاور لـِ v_{i-1} فإن الدورة $v_1v_2v_3\cdots v_{i-1}v_nv_{n-1}\cdots v_iv_1$ الموضحة في شكل(٣,٧) تكون هاملتونية في G. إذن لكل رأس v_k مختلف عن v_2 ومجاور لـِ v_1 في G فإن الرأس v_{k-1} غير مجاور لـِ v_n. وعليه، فإن

$$\deg_G v_n\le n-2-(\deg_G v_1-1)=n-1-\deg_G v_1$$

إذن $\deg_G v_1+\deg_G v_n\le n-1$ ؛ وهذا تناقض. □



شكل(٣,٧).

ليكن G رسماً رتبته n ، ولتكن $G_0\,(=G), G_1, G_2, \cdots, G_k$ متتالية من الرسوم بحيث $G_{i+1}=G_i+x_iy_i$ ، x_i, y_i رأسان غير متجاورين في الرسم G_i ، $\deg_{G_i} x_i+\deg_{G_i} y_i \geq n$ لكل $0 \leq i \leq k-1$ ، وبحيث $\deg_{G_k} x+\deg_{G_k} y<n$ لكل رأسين غير متجاورين في G_k. يسمى G_k **إغلاقاً** closure للرسم G.

مبرهنة (٣,٦)

إذا كان G رسماً رتبته n ، وكان كل من G_k و G'_m إغلاقاً لـِ G ؛ فإن $G_k=G'_m$.

البرهان

لتكن $e_1, e_2, \cdots, e_k$ هي متتالية الأضلاع التي أضيفت إلى G للحصول على G_k ؛ ولتكن $f_1, f_2, \cdots, f_m$ هي متتالية الأضلاع التي أضيفت إلى G للحصول على G'_m. سنثبت أن كل e_i ضلع في G'_m وأن كل f_j ضلع في G_k. وبهدف الحصول على تناقض، نفرض أن r هو أصغر دليل بحيث $e_r \notin E\,(G'_m)$. ضع $H=G+\{e_1, e_2, \cdots, e_{r-1}\}$ ؛ إذن H رسم جزئي من كل من الرسمين G_k

و G'_m. لـيكن $e_r = xy$ ؛ ينـتج مـن تعريـف G_k أن $\deg_H x + \deg_H y \geq n$ وعليه، فإن

$$\deg_{G'_m} x + \deg_{G'_m} y \geq \deg_H x + \deg_H y \geq n$$

ويتناقض هذا مع كون x و y غير متجاورين في G'_m. وبالمثل، كل f_j ضلع في G_k. إذن $G_k = G'_m$. □

بناءً على مبرهنة (٣,٦)، فإنه يوجد إغلاق وحيد للرسم G الذي رتبته n. نستخدم الرمز $c(G)$ للدلالة على إغلاق G.

مبرهنة (٣,٧)

G رسم هاملتوني إذا وفقط إذا كان $c(G)$ رسماً هاملتونياً.

البرهان

نفرض أننا قد أنشأنا $c(G)$ بعد إضافة الأضلاع $e_1, e_2, \cdots, e_k$، على التوالي، إلى G. ضـع $G_i = G_{i-1} + e_i$ لكـل $1 \leq i \leq k$ حيـث $G_0 = G$ و $G_k = c(G)$. ينتج من التطبيق المتكرر لمبرهنة (٣,٥) أن $G_0 = G$ هاملتوني إذا وفقط إذا كان G_1 هاملتونياً، وأن G_1 هاملتوني إذا وفقط إذا كان G_2 هاملتونياً، وهلم جرا. إذن $G = G_0$ هاملتوني إذا وفقط إذا كان $c(G)$ هاملتونياً.

نتيجة (٣,١)

إذا كان G رسماً رتبته $n \geq 3$ وإغلاقه $c(G) \cong K_n$ فإن G هاملتوني.

البرهان

الرسم التام K_n هاملتوني. إذن $c(G)$ هاملتوني وينتج من مبرهنة (٣,٧) أن G هاملتوني.

نتيجة (٣,٢)

إذا كان G رسماً رتبته $n \geq 3$ وكان $\deg x + \deg y \geq n$ لكل رأسين x, y غير متجاورين في G، فإن G هاملتوني.

البرهان

ينتج من تعريف $c(G)$ أن $c(G) \cong K_n$. وعليه، استناداً إلى نتيجة (٣,١)، نجد أن G هاملتوني.

نتيجة (٣,٣)

إذا كان G رسماً رتبته $n \geq 3$ وكان $\deg x \geq \frac{n}{2}$ لكل $x \in V(G)$، فإن G هاملتوني.

البرهان

واضح أن $\deg x + \deg y \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ لكل رأسين x, y غير متجاورين في G. إذن G هاملتوني بناءً على نتيجة(٣,٢).

نتيجة (٣,٤)

إذا كان G رسماً رتبته $n \geq 3$ وحجمه m، وكان $m \geq \binom{n-1}{2} + 2$، فإن G هاملتوني.

البرهان

إذا كان $G \cong K_n$ فإن G هاملتوني. الآن، نفرض أن $G \ncong K_n$. ليكن x, y أي رأسين غير متجاورين في G. سنثبت أن $\deg x + \deg y \geq n$. ضع $H = G - \{x, y\}$. واضح أن $|E(H)| \leq \binom{n-2}{2}$ وأن

$$\deg x + \deg y = |E(G)| - |E(H)|$$

إذن

$$\deg x + \deg y \geq \binom{n-1}{2} + 2 - \binom{n-2}{2} = n$$

وعليه، فإن $\deg x + \deg y \geq n$ لكل رأسين x, y غير متجاورين في G. بالاستناد إلى نتيجة (٣,٢) نجد أن G هاملتوني.

مبرهنة (٣,٨)

ليكن G رسماً رتبته $n \geq 3$ ، ولتكن $d_1, d_2, \cdots, d_n$ متتالية درجات G حيث $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. وافرض أنه لكل $k < \frac{n}{2}$ ، إذا كان $d_k \leq k$ فإن $d_{n-k} \geq n-k$. عندئذٍ، يكون G هاملتونياً.

البرهان

سنثبت أن $c(G)$ رسم تام. بهدف الحصول على تناقص نفرض أن $c(G)$ غير تام. وللبساطة، نستخدم فيما يلي الرمز $\overline{\deg} v$ للدلالة على درجة الرأس v في الرسم $c(G)$. بما أن $c(G)$ غير تام فإنه يمكننا أنه نختار رأسين x, y بحيث:

(أ) x, y غير متجاورين في $c(G)$

(ب) $m = \overline{\deg}\, x \leq \overline{\deg}\, y$

(ج) $\overline{\deg}\, x + \overline{\deg}\, y < n$

(د) $\overline{\deg}\, x + \overline{\deg}\, y$ أكبر ما يمكن

نلاحظ أنه ينتج من (ب) و(ج) أن $\overline{\deg}\, x = m < \frac{n}{2}$ ، وأن $\overline{\deg}\, y < n - m$.

ضع

$$S = \{v \in (V(G) \setminus \{y\}) : \text{غير مجاور لِ } y \text{ في } c(G)\ v\}$$

$$T = \{v \in (V(G) \setminus \{x\}) : \text{غير مجاور لِ } x \text{ في } c(G)\ v\}$$

إذن

$$|S| = n-1-\overline{\deg}\, y > n-1-(n-m) = m-1$$
$$|T| = n-1-m$$

وينتج من (د) أن $\overline{\deg}\, v \le \overline{\deg}\, x = m$ لكل $v \in S$، وأن $\overline{\deg}\, v \le \overline{\deg}\, y < n-m$ لكل $v \in T$. وعليه، فإنه يوجد على الأقل m رأساً بحيث إن درجة كل منها في $c(G)$ (ومن ثم في G) أصغر من أو تساوي m ؛ إذن $d_m \le m$. ومن ناحية ثانية، نلاحظ أن $m < \frac{n}{2}$ تقتضي أن $\overline{\deg}\, x = m < n-m$. إذن يوجد على الأقل $|T \cup \{x\}| = n-1-m+1 = n-m$ رأساً بحيث درجة كل منها في $c(G)$ (ومن ثم في G) أصغر من $n-m$. وعليه فإن $d_{n-m} < n-m$. إن هذا يعطينا التناقض المطلوب.

مبرهنة (٣,٩)

ليكن $G = (V(G) = V_1 \cup V_2, E(G))$ رسماً ثنائي التجزئة. عندئذٍ،

(أ) إذا كان $|V_1| \ne |V_2|$ فإن G غير هاملتوني.

(ب) إذا كان $|V_1| = |V_2| = n \ge 2$ وكان $\deg v > \frac{n}{2}$ لكل $v \in V(G)$ ؛ فإن G هاملتوني.

البرهان

(أ) لنفرض أن $|V_1| < |V_2|$. إذن:

$$comp(G - V_1) = |V_2| > |V_1|$$

وعليه فإن تطبيق مبرهنة(٣,٤) يؤدي إلى أن G رسم غير هاملتوني.

(ب) بهدف الحصول على تناقض، نفرض أن G غير هاملتوني. بما أن $K_{n,n}$ هاملتوني لكل $n \ge 2$ ، فإنه يوجد رسم غير هاملتوني H بحيث G رسم جزئي

مولِّد للرسم H ، وبحيث $H+e$ هاملتوني لكل $e\in E(\bar{H})$. ليكن $x\in V_1, y\in V_2$ رأسين غير متجاورين في H. بما أن $H+xy$ هاملتوني و H غير هاملتوني ، فإن كل دورة هاملتونية في $H+xy$ تحتوي على الضلع xy. وعليه فإنه يوجد ممر هاملتوني P من x إلى y في H.

ليكن

$$P:(x=)v_1,v_2,\cdots,v_{2n-1},v_{2n}(=y)$$

حيث $v_1,v_3,\cdots,v_{2n-1}\in V_1$ و $v_2,v_4,\cdots,v_{2n}\in V_2$.

لكل $i\in\{4,6,\cdots,2n-2\}$ ، إذا كان $v_1v_i\in E(H)$ فإن $v_{i-1}v_{2n}\notin E(H)$ ؛ وذلك لأن $v_{i-1}v_{2n}\in E(H)$ يقتضي وجود الدورة الهاملتونية $v_1,v_i,v_{i+1},\cdots,v_{2n},v_{i-1},v_{i-2},\cdots,v_2,v_1$ في الرسم غير الهاملتوني H. إذن يوجد $\deg v_1-1$ رأساً غير مجاور للرأس v_{2n} في المجموعة $V_1-\{v_1\}$. ولكن v_{2n} غير مجاور لِ v_1 أيضاً ؛ إذن يوجد على الأقل $\deg v_1$ رأساً غير مجاور لـِ v_{2n} في V_1. وبما أن $\deg v_1>\frac{n}{2}$ فإن $\deg v_{2n}\le n-\deg v_1<n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}$ ، وهذا يعطينا التناقض المنشود. □

إنه لأمر طبيعي أن يصاحب الشروط المتعلقة بالرسوم الهاملتونية شروطاً متعلقة بالرسوم نصف الهاملتونية. وتوضح كل من النتيجتين التاليتين ذلك.

نتيجة (٣,٥)

إذا كان G رسماً رتبته n وكان $\deg x+\deg y\ge n-1$ لكل رأسين x,y غير متجاورين في G ؛ فإن G نصف هاملتوني.

البرهان

إذا كان $n=1$ فإن $G \cong K_1$، وعليه فإن G يحتوي على ممر هاملتوني تافه. نفرض الآن أن $n \geq 2$ ونضع $H = G + K_1$ حيث $V(K_1) = \{z\}$. نلاحظ أن $|V(H)| = n+1 \geq 3$، وأن

$$\deg_H x + \deg_H y = \deg_G x + 1 + \deg_G y + 1 \geq n+1$$

لكل رأسين x, y غير متجاورين في H. وبالاستناد إلى نتيجة(٣,٢) نجد أن H هاملتوني. الآن، نختار أي دورة هاملتونية C في H، فيكون $C - \{z\}$ ممراً هاملتونياً في G. إذن G نصف هاملتوني.

نتيجة (٣,٦)

إذا كان G رسماً رتبته n وكان $\deg x \geq \frac{n-1}{2}$ لكل $x \in V(G)$؛ فإن G نصف هاملتوني.

البرهان

واضح أن

$$\deg x + \deg y \geq \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} = n-1$$

لكل رأسين x, y غير متجاورين في G. إذن G نصف هاملتوني بناءً على نتيجة(٣,٥). □

على وجه العموم، تعتبر مسألة بيان فيما إذا كان رسم ما هاملتونياً أم غير هاملتوني من المسائل الصعبة؛ وتتمتع الدورات الهاملتونية بخواص تساعد على إنشاء تلك الدورات كما يمكن استخدام تلك الخواص لبيان أن رسماً ما رسم غير هاملتوني. نسرد فيما يلي بعضاً من تلك الخواص.

(أ) إذا كان v رأساً بحيث $\deg v = 2$ فإن كل دورة هاملتونية يجب أن تحتوي على الضلعين الساقطين على v.

(ب) إذا كان v رأساً بحيث $\deg v > 2$ فإنه يمكن استخدام ضلعين فقط من الأضلاع الساقطة على v عند إنشاء دورة هاملتونية، وعليه تهمل الأضلاع الأخرى الساقطة على v بحذف تلك الأضلاع عند المضي في إنشاء الدورة.

(ج) عند إنشاء دورة هاملتونية في الرسم G فإنه لا يمكن الحصول على دورة في رسم جزئي من G إلاّ إذا احتوت تلك الدورة على جميع رؤوس G.

(د) إذا احتوى الرسم البسيط المترابط على جسر أو مفصل أو رأس درجته 1 فإنه غير هاملتوني.

تمارين (٣,٢)

١- أثبت أن الرسم الموضح في شكل(٣,٦) رسم هاملتوني.

٢- إذا احتوى الرسم المترابط G على جسر أو مفصل أو رأس درجته 1 فأثبت أن G غير هاملتوني.

٣- إذا كان G نصف هاملتوني فأثبت أنه لا يوجد في G ثلاثة رؤوس درجة كل منها 1.

٤- إذا كان G منتظماً من النوع 4 وعدد رؤوسه 7 فأثبت أن G هاملتوني.

٥- إذا كان G منتظماً من النوع k وعدد رؤوسه $2k-1$ فأثبت أن G هاملتوني.

٦- إذا كان G منتظماً من النوع m وَ $|V(G)| \geq 2m+2$ فأثبت أن $\bar{G}$ هاملتوني.

٧- أثبت أن $\bar{C}_n$ رسم هاملتوني لكل $n \geq 5$.

٨- أثبت أن المكعب الفوقي Q_n رسم هاملتوني لكل $n \geq 2$.

٩- إذا كان الرسم الثنائي التجزئة $G = (V_1 \cup V_2, E)$ نصف هاملتوني فأثبت أنه إما $|V_1| = |V_2|$ أو $\left||V_1| - |V_2|\right| = 1$.

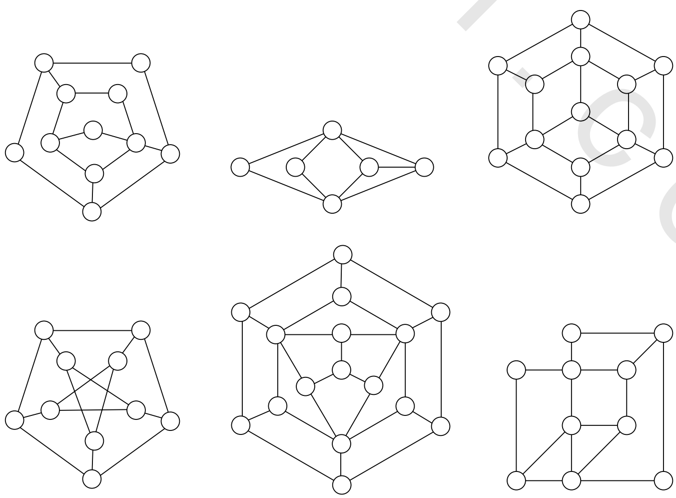
١٠- ليكن G رسماً بسيطاً هاملتونياً عدد رؤوسه $n \geq 3$ وعدد أضلاعه m. لتكن $I \neq \phi$ مجموعة رؤوس مستقلة (أي، غير متجاورة زوجاً زوجاً) في G وليكن $m' = \sum_{x \in I} (\deg x - 2)$. أثبت أن $m - m' \geq n$.

١١- إذا كان $n \geq 3$ فجد عدد الدورات الهاملتونية المختلفة في كل من K_n و W_n.

١٢- إذا كان $n \geq 2$ فجد عدد الدورات الهاملتونية المختلفة في $K_{n,n}$.

١٣- إذا كان $n \geq 1$ فجد عدد الممرات الهاملتونية المختلفة في $K_{n,n}$.

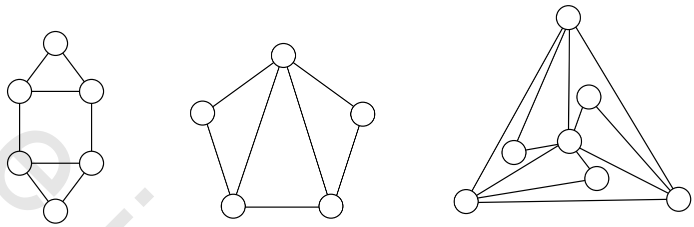
١٤- لكل من الرسوم في شكل(٣,٨)، بيّن ما إذا كان الرسم المعطى هاملتونياً وإذا كان كذلك فجد دورة هاملتونية فيه.



شكل(٣,٨).

١٥- جد إغلاق $K_{2,3}$.

١٦- جد إغلاق كل رسم من الرسوم في شكل(٣,٩).



شكل(٣,٩).

١٧- أعط مثالاً لرسم غير هاملتوني G رتبته $n \geq 3$ وحجمه m ، حيث $m = \binom{n-1}{2} + 1$.