نظرية بوليا للعدّ

THE POLYA THEORY OF COUNTING

في هذا الفصل، يحتاج القارئ إلى معرفة عامة بمبادئ نظرية الزمر، وإلى إلمام خاص بزمر التباديل وزمر تناظر المضلعات المنتظمة وزمر تناظر المجسمات المنتظمة.

لتكن N علاقة تكافؤ على مجموعة منتهية A، ولتكن A/N مجموعة فصول التكافؤ. غالباً ما نهتم بحساب عدد فصول التكافؤ $|A/N|$. إذا كان $|A|=n$ وكان كل فصل تكافؤ يحتوي على m عنصراً فإن $|A/N|=\frac{n}{m}$ لأن A/N تجزئة للمجموعة A. أما إذا كانت فصول التكافؤ تحتوي على أعداد مختلفة من العناصر فإن حساب $|A/N|$ ليس بهذه البساطة. وعندما تكون علاقة التكافؤ ناتجة عن وجود تناظر ما فإن هذا التناظر يربطنا بنظرية الزمر من خلال زمر التباديل؛ ومن ثم نحصل على تقنيات لحساب $|A/N|$.

(٦,١) المدارات

لتكن G زمرة تباديل للمجموعة المنتهية X. نعرف العلاقة N على X كما يلي: لكل $x,y\in X$ فإن xNy إذا وفقط إذا كان يوجد $g\in G$

بحيث $g(x)=y$. نلاحظ أن N علاقة تكافؤ على X. نرمز لفصل التكافؤ للعنصر $x\in X$ بالرمز Gx ونلاحظ أن $Gx=\{g(x):g\in G\}$، كما نسمي Gx **مدار** Orbit العنصر x ونسمي فصول التكافؤ مدارات G على X. فيما يلي نتطلع إلى حساب عدد العناصر في كل مدار وإلى حساب عدد المدارات.

مبرهنة(٦,١)

لتكن G زمرة تباديل للمجموعة المنتهية X. لكل $x,y\in X$ نعرف المجموعة $G(x\to y)$ كما يلي: $G(x\to y)=\{g\in G:g(x)=y\}$. عندئذٍ،

(أ) $G(x\to x)$ زمرة جزئية من G تسمى الزمرة الجزئية المثبِّتة للعنصر x (أو **مُقِر** stabilizer العنصر x) ويرمز لها بالرمز G_x.

(ب) $G(x\to y)=hG_x$ لكل $h\in G(x\to y)$

(ج) $G(x\to y)=G_y h$ لكل $h\in G(x\to y)$

(د) إذا كان $Gu=Gv$ فإن $|G_u|=|G_v|$

البرهان

(أ) إذا كان $g_1,g_2\in G_x$ فإن $(g_1g_2)(x)=g_1\left(g_2(x)\right)=g_1(x)=x$

إذن $g_1g_2\in G_x$. وبما أن G منتهية فينتج أن G_x زمرة جزئية من G.

(ب) ليكن $\alpha\in hG_x$. إذن $\alpha=h\beta$ حيث $\beta\in G_x$. عليه

$\alpha(x)=(h\beta)(x)=h\left(\beta(x)\right)=h(x)=y$.

وبالتالي فإن $\alpha\in G(x\to y)$. إذن $hG_x\subseteq G(x\to y)$.

نفـــرض الآن أن $d \in G(x \to y)$. إذن $d(x) = y$ وبالتـــالي فـــإن $h^{-1}d(x) = h^{-1}(y) = x$ إذن $h^{-1}d \in G_x$. عليـــه $h^{-1}d = \delta$ حيـــث $\delta \in G_x$. إذن $d = h\delta$ وبالتالي فإن $d \in hG_x$. إذن $G(x \to y) \subseteq hG_x$.

(ج) لـــيكن $\alpha \in G_y h$. إذن $\alpha = \beta h$ حيـــث $\beta \in G_y$. عليـــه $\alpha(x) = (\beta h)(x) = \beta(h(x)) = \beta(y) = y$ ، وبالتـــالي فـــإن $\alpha \in G(x \to y)$. إذن $G_y h \subseteq G(x \to y)$.نفـــرض الآن أن $d \in G(x \to y)$. إذن $(dh^{-1})(y) = d(h^{-1}(y)) = d(x) = y$ ، وبالتـــالي فـــإن $dh^{-1} \in G_y$. إذن $d \in G_y h$ وينتج أن $G(x \to y) \subseteq G_y h$.

(د) بمـــا أن $Gu = Gv$ فإنـــه يوجـــد $h \in G$ بحيـــث $h(u) = v$. أي، $h \in G(u \to v)$. إذن $G(u \to v) \neq \phi$. وبنـــاءً علـــى (ب) و (ج) فـــإن $hG_u = G(u \to v) = G_v h$. ولما كانت كل من G_u, G_v زمرة جزئيـــة مـــن G ، فإن $|G_v| = |G_v h|, |G_u| = |hG_u|$. وبالتالي فإن $|G_u| = |G_v|$. □

تزودنا المبرهنة التالية بصيغة لحساب عدد عناصر المدار.

مبرهنة(٦,٢)

إذا كانـــت G زمـــرة تباديـــل للمجموعـــة المنتهيـــة X وكـــان $x \in X$ فـــإن $|Gx| = \dfrac{|G|}{|G_x|}$.

البرهان

لـــتكن $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ولـــتكن $G = \{g_1, g_2, ..., g_m\}$. نعـــرف المجموعـــة $S(x) \subseteq G \times X$ كما يلي: $S(x) = \{(g, y) : g \in G(x \to y)\}$. نحـــسب الآن $|S(x)|$ بطريقتين.

إن

$$S(x)=\{(g_1,y):g_1(x)=y\}\cup\cdots\cup\{(g_m,y):g_m(x)=y\}$$

إذن

$$\begin{aligned}|S(x)|&=\left|\{(g_1,y):g_1(x)=y\}\right|+\ldots+\left|\{(g_m,y):g_m(x)=y\}\right|\\&=1+\cdots+1=m=|G|\end{aligned}$$

من ناحية ثانية، إن

$$S(x)=\{(g,x_1):g(x)=x_1\}\cup\cdots\cup\{(g,x_n):g(x)=x_n\}$$

إذن

$$\begin{aligned}|S(x)|&=\left|\{(g,x_1):g(x)=x_1\}\right|+\ldots+\left|\{(g,x_n):g(x)=x_n\}\right|\\&=\left|G(x\to x_1)\right|+\cdots+\left|G(x\to x_n)\right|\end{aligned}$$

ومن (ب) فإن $G(x\to y)=hG_x$ حيث $h\in G(x\to y)$. إذن $G(x\to x_i)=\phi$ أو $G(x\to x_i)=h_iG_x$ حيث $h_i\in G(x\to y)$. ولما كانت G_x زمرة جزئية من G فإن $|h_iG_x|=|G_x|$. وبالتالي فإن: $|S(x)|=|Gx||G_x|$. إذن $|G|=|Gx||G_x|$، ومنه $|Gx|=\dfrac{|G|}{|G_x|}$. □

تزودنا المبرهنة التالية بصيغة مناسبة لحساب عدد المدارات عندما يكون عدد عناصر زمرة التباديل صغيراً.

مبرهنة(٦,٣)

إذا كانت G زمرة تباديل للمجموعة المنتهية X وكان t هو عدد مدارات G على X فإن $t=\dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|$ حيث $Fix(g)=\{x\in X:g\in G_x\}$؛ وتسمى $Fix(g)$ المجموعة المثبَّتة بالتبديل g.

البرهان

لتكن $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ ولتكن $G=\{g_1,g_2,...,g_m\}$، ولتكن $D=\{y_1,y_2,...,y_t\}$ مجموعة ممثلات لجميع مدارات G على X. نعرف المجموعة $E\subseteq G\times X$ كما يلي: $E=\{(g,x):g\in G_x\}$. نحسب الآن $|E|$ بطريقتين.

إن

$$E=\{(g_1,x):g_1\in G_x\}\cup\cdots\cup\{(g_m,x):g_m\in G_x\}$$

إذن

$$\begin{aligned}|E|&=\left|\{(g_1,x):g_1\in G_x\}\right|+...+\left|\{(g_m,x):g_m\in G_x\}\right|\\&=\left|Fix\,(g_1)\right|+...+\left|Fix\,(g_m)\right|=\sum_{g\in G}\left|Fix\,(g)\right| \quad .... (1)\end{aligned}$$

من ناحية ثانية، إن

$$E=\{(g,x_1):g\in G_{x_1}\}\cup\cdots\cup\{(g,x_n):g\in G_{x_n}\}$$

إذن

$$\begin{aligned}|E|&=\left|\{(g,x_1):g\in G_{x_1}\}\right|+...+\left|\{(g,x_n):g\in G_{x_n}\}\right|\\&=\left|G_{x_1}\right|+...+\left|G_{x_n}\right|=\sum_{t\in x}\left|G_x\right| \quad .... (2)\end{aligned}$$

من (1) و (2) ينتج أن

$$\sum_{x\in X}|G_x|=\sum_{g\in G}\left|Fix\,(g)\right| \quad .... (3)$$

وبما أن $\{Gy_1,Gy_2,...,Gy_t\}$ تجزئة للمجموعة X فإن (3) تعطينا

$$\sum_{x\in Gy_1}|G_x|+...+\sum_{x\in Gy_t}|G_x|=\sum_{g\in G}\left|Fix\,(g)\right|$$

و بالاستناد إلى (د) من مبرهنة(٦,١)نجد أن

$$|Gy_1||G_{y_1}|+\ldots+|Gy_t||G_{y_t}|=\sum_{g\in G}|Fix(g)|$$

وينتج من مبرهنة(٦,٢)أن $|Gy_i||G_{y_i}|=|G|$ **لكل** $1\le i\le t$**. وبالتالي فإن**

$$|G|+\ldots+|G|=\sum_{g\in G}|Fix(g)|$$

$$t|G|=\sum_{g\in G}|Fix(g)|$$

أي

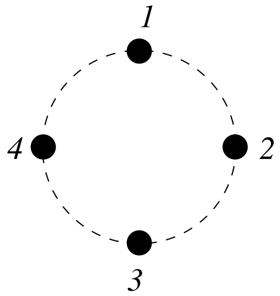
$$t=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|$$

مثال(٦,١)

لدينا طاولة دائرية وثلاث مجموعات D_1,D_2,D_3 من الأطباق التي لها الشكل نفسه ولكن لون أطباق D_i هو C_i لكل $1\le i\le 3$. نريد إعداد الطاولة لأربعة أشخاص بحيث نوزع طبقاً واحداً لكل شخص. جد عدد النماذج المختلفة للتوزيعات إذا علمت أن تدوير التوزيع لا يعطي توزيعاً مختلفاً.

الحل

لنفرض أن أماكن وضع الأطباق معنونة كما في الشكل المعطى أدناه.



نلاحظ أن عـدد التوزيعـات المكنـة يـساوي $3^4 = 81$ ، كمـا نلاحـظ أن تـوزيعين لا يعتبران مختلفين إذا أمكن الحصول على أحـدهما مـن الآخـر بوسـاطة دوران. إذن، عدد النماذج المختلفة للتوزيعات يساوي عدد مـدارات الزمـرة الدورويـة $C_4 = \langle \sigma \rangle$ حيــث نعتــبر C_4 زمــرة دورانــات الــشكل المعطــى أعــلاه مولّــدة بالــدورة $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$ ؛ أي، زمرة تباديل لجميع التوزيعات المكنة. يمكن الآن استخدام مبرهنة(٦,٣) لحساب المطلوب.

نلاحظ أن

$$C_4 = \{id, \sigma = (1\ 2\ 3\ 4), \sigma^2 = (1\ 3)(2\ 4), \sigma^3 = (1\ 4\ 3\ 2)\}$$

نحسب الآن $|Fix(g)|$ لكل $g \in G_4$.

(أ) واضح أن $|Fix(id)| = 81$

(ب) إن كلاً من σ و σ^3 يثبت فقط التوزيعات الـتي تكـون فيهـا جميـع الأطباق لها اللون نفسه، وبالتالي فإن $|Fix(\sigma)| = \left|Fix\left(\sigma^3\right)\right| = 3$

(ج) إن σ^2 يثبت فقط التوزيعات التي يكون فيهـا للطـبقين 1 و 3 اللـون نفسه وللطبقين 2 و 4 اللون نفسه، وبالتالي فإن $\left|Fix\left(\sigma^2\right)\right| = 3^2 = 9$.

الآن نطبق مبرهنة(٦,٣) فنجد أن عدد النماذج المختلفة للتوزيعات يساوي

$$\frac{1}{4}[81+3+3+9] = \frac{96}{4} = 24$$

مثال(٦,٢)

لدينا ثلاث خرزات سوداء متطابقة وست خرزات بيضاء متطابقة. نريد تكوين قلادة من هذه الخرزات. جد عدد النماذج المختلفة للقلادات التي يمكن تشكيلها إذا علمت أنه يمكن تدوير وقلب القلادة.

الحل

يمكن النظر إلى خرزات القلادة على أنها موزعة على رؤوس مضلع منتظم عدد رؤوسه 9. بما أن عدد طرق توزيع 3 خرزات سوداء متطابقة على 9 رؤوس يساوي $\binom{9}{3}=84$ فإن عدد التشكيلات الممكنة للخرزات يساوي 84. إن تدوير القلادة لا يعطينا قلادة مختلفة، كما أن قلب القلادة لا يعطينا قلادة أخرى. وبالتالي، فإن تشكلين لا يعتبران مختلفين إذا أمكن الحصول على أحدهما من الآخر بوساطة دوران أو قلب. إذن، عدد النماذج المختلفة للقلادات يساوي عدد مدارات الزمرة الزوجية D_9 عندما نعتبر D_9 كزمرة تباديل لجميع التشكيلات الممكنة. يمكن الآن استخدام مبرهنة(٦,٣) لحساب المطلوب.

باستخدام رموز إثبات مبرهنة(٦,٦) نجد أن

$$D_9=\left\{id,\sigma,\sigma^2,\ldots,\sigma^8,\tau,\sigma\tau,\sigma^2\tau,\ldots,\sigma^8\tau\right\}$$

حيث

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & 9\end{pmatrix}$$

$$\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & 9\\ 1 & 9 & 8 & \ldots & 2\end{pmatrix}$$

نحسب الآن $|Fix(g)|$ لكل $g\in D_9$.

(أ) واضح أن $|Fix(id)|=84$

(ب) إن انعكاساً حول محور يمر بمركز المضلع وأحد رؤوسه يثبت 4 تشكيلات؛ فمثلاً الانعكاس حول المحور 01 يثبت التشكيلات التي تكون فيها الخرزات السوداء موزعة على الرؤوس $9,1,2$ أو $8,1,3$ أو $7,1,4$ أو $6,1,4$. ونلاحظ أن عدد هذه الانعكاسات يساوي 9.

(ج) كل من الدوران الذي زاويته $\frac{2\pi}{3}$ راديان والدوران الذي زاويته $\frac{4\pi}{3}$ راديان يثبت التشكيلات الثلاثة التي تكون فيها الخرزات السوداء موزعة على الرؤوس $7,1,4$ أو $8,2,5$ أو $9,3,6$.

(د) كل من الدورانات غير المذكورة أعلاه لا يثبت أي تشكيل.

الآن نطبق مبرهنة(٦,٣) فنجد أن عدد النماذج المختلفة للقلادات يساوي

$$\frac{1}{18}[(1)(84)+(9)(4)+(2)(3)+(6)(0)]=\frac{126}{18}=7$$

ويمكن اعتبار القلادات التالية ممثلات للنماذج السبعة المختلفة حيث نعيّن القلادة بالرؤوس التي تتوزع عليها الخرزات السوداء:

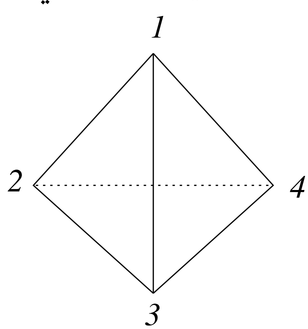
$6,1,5 \quad 7,1,4 \quad 8,1,3 \quad 9,1,2 \quad 7,1,3 \quad 7,1,2 \quad 8,1,2$

مثال(٦,٣)

لدينا رباعي وجوه منتظم. نريد تلوين أضلاع هذا الرباعي باستخدام الألوان الثلاثة c_1,c_2,c_3. جد عدد النماذج المختلفة للتلوينات إذا علمت أنه يمكن تدوير الرباعي في الفضاء.

الحل

لنفرض أن رؤوس الرباعي معنونة كما في الشكل التالي:



نلاحظ أن عدد التلوينات الممكنة يساوي 3^6، كما نلاحظ أن تلوينين لا يعتبران مختلفين إذا أمكن الحصول على أحدهما من الآخر بوساطة دوران. إذن، عدد النماذج المختلفة للتلوينات يساوي عدد مدارات زمرة التناوب A_4 عندما نعتبر A_4 كزمرة دورانات الرباعي على النحو التالي:

بالإضافة إلى التبديل المحايد $\sigma_1 = id$ فإن كلاً من التباديل $\sigma_2 = (12)(34)$ ، $\sigma_3 = (13)(24)$ ، $\sigma_4 = (14)(23)$ يمكن اعتباره دوراناً في الفضاء بزاوية مقدارها π راديان حول محور يمر بنقطتي المنتصف لضلعين. فمثلاً σ_2 يمثل دوراناً حول المحور المار بنقطة منتصف الضلع 12 ونقطة منتصف الضلع 34.

أما التباديل $\sigma_5 = (123)$ ، $\sigma_6 = (134)$ ، $\sigma_7 = (243)$ ، $\sigma_8 = (142)$ فإن كلاً منها يمثل دوراناً في الفضاء بزاوية مقدارها $\frac{2\pi}{3}$ راديان حول محور يمر بأحد الرؤوس ومركز الوجه المقابل لذلك الرأس. فمثلاً σ_7 يمثل دوراناً حول المحور المار بالرأس 1 ومركز المثلث 243.

كذلك إن كلاً من التباديل $\sigma_9 = (132)$ ، $\sigma_{10} = (234)$ ، $\sigma_{11} = (124)$ ، $\sigma_{12} = (143)$ يمثل دوراناً في الفضاء بزاوية مقدارها $\frac{4\pi}{3}$ راديان حول محور يمر بأحد الرؤوس ومركز الوجه المقابل لذلك الرأس. فمثلاً σ_{10} يمثل دوراناً حول المحور المار بالرأس 1 ومركز المثلث 243.

يمكن الآن استخدام مبرهنة(٦,٣) لحساب المطلوب، ولهذا الغرض نحسب $|Fix(g)|$ لكل $g \in A_4$.

(أ) واضح أن $|Fix(id)| = 3^6 = 729$

(ب) إن التبديل $\sigma_2 = (12)(34)$ يثبت كلاً من الضلعين 12 و 34 ويبدل الضلعين 13 و 24 كما يبدل الضلعين 23 و 14. إذن

$$\left|Fix\left(\sigma_2\right)\right| = (3)(3)(3)(3) = 81$$

وبالمثل فإن

$$\left|Fix\left(\sigma_3\right)\right| = \left|Fix\left(\sigma_4\right)\right| = 81$$

(ج) إن التبديل $\sigma_5 = (123)$ يرسل الضلع 41 إلى الضلع 42 والضلع 42 إلى الضلع 43 والضلع 43 إلى الضلع 41 ؛ كما أن σ_5 يرسل الضلع 12 إلى الضلع 23 والضلع 23 إلى الضلع 31 والضلع 31 إلى الضلع 12. إذن

$$\left|Fix\left(\sigma_5\right)\right| = (3)(3) = 9$$

وبالمثل فإن $\left|Fix\left(\sigma_i\right)\right| = 9$ لكل $6 \le i \le 12$.

الآن نطبق مبرهنة(٦,٣) فنجد أن عدد النماذج المختلفة للتلوينات يساوي

$$\frac{1}{12}[729 + (3)(81) + (8)(9)] = \frac{1044}{12} = 87$$

(٦,٢) أدلة الدورات لزمر التباديل

لتكن $X = \{1,2,...,n\}$ ولتكن S_n زمرة تباديل X. تسمى S_n زمرة التناظر من الدرجة n. إذا كان $\sigma \in S_n$ فإنه يمكن كتابة σ كحاصل ضرب دورات منفصلة؛ ونقول إن نمط σ هو $\left[1^{m_1(\sigma)} 2^{m_2(\sigma)} \ldots n^{m_n(\sigma)}\right]$ حيث $m_i(\sigma)$ هو عدد

دورات σ من الطول i لكل $1 \le i \le n$. إذا كان σ تبديلاً من النمط $\left[1^{m_1(\sigma)} 2^{m_2(\sigma)} \ldots n^{m_n(\sigma)}\right]$ فإننا نقرن به وحيد الحد الشكلي

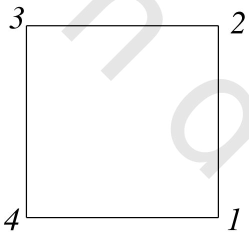
$$M_\sigma(x_1,x_2,...,x_n)=x_1^{m_1(\sigma)}x_2^{m_2(\sigma)}...\,x_n^{m_n(\sigma)}$$

وإذا كانت G زمرة جزئية من S_n فإننا نقرن بها كثيرة الحدود الشكلية

$$\begin{aligned}P_G(x_1,x_2,...,x_n)&=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}M_\sigma(x_1,x_2,...,x_n)\\&=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}x_1^{m_1(\sigma)}x_2^{m_2(\sigma)}...\,x_n^{m_n(\sigma)}\\&=\frac{1}{|G|}\sum c(m_1,m_2,...,m_n)x_1^{m_1}x_2^{m_2}...\,x_n^{m_n}\end{aligned}$$

حيث $c(m_1,m_2,...,m_n)$ عدد التباديل في G التي لها النمط $\left[1^{m_1}2^{m_2}...\,n^{m_n}\right]$ وحيث المجموع الأخير مأخوذ على جميع الأنماط. تسمى $P_G(x_1,x_2,...,x_n)$ دليل الدورات للزمرة G.

مثال(٦,٤)



إذا اعتبرنا تناظرات المربع الذي رؤوسه $1,2,3,4$ والموضح أعلاه، كزمرة تباديل G للمجموعة $X=\{1,2,3,4\}$ فإنه يمكن حساب $P_G(x_1,x_2,x_3,x_4)$ كما يلي:

الجدول التالي يعطينا $M_\sigma(x_1,x_2,x_3,x_4)$ لكل $\sigma\in G$.

σ	m_1	m_2	m_3	m_4	$M_\sigma(x_1,x_2,x_3,x_4)$
id	4	0	0	0	x_1^4
(1234)	0	0	0	1	x_4^1
(1432)	0	0	0	1	x_4^1
(13)(24)	0	2	0	0	x_2^2
(12)(34)	0	2	0	0	x_2^2
(14)(23)	0	2	0	0	x_2^2
(13)	2	1	0	0	$x_1^2 x_2$
(24)	2	1	0	0	$x_1^2 x_2$

وبالتالي فإن

$$P_G\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\frac{1}{8}\left(x_1^4+2x_1^2x_2+3x_2^2+2x_4\right) \quad \square$$

فيما يلي نحسب أدلة الدورات لأصناف معينة من زمر التباديل.

مبرهنة(٦,٤)

(١) $P_{\{id\}}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=1$ حيث id هو التبديل المحايد.

(٢) $$P_{S_n}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\sum\frac{1}{1^{m_1}2^{m_2}\ldots n^{m_n}m_1!m_2!\cdots m_n!}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$$

حيث المجموع مأخوذ على جميع الأنماط $\left[1^{m_1}2^{m_2}\ldots n^{m_n}\right]$

$$P_{A_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum\frac{1+(-1)^{m_2+m_4+\cdots}}{1^{m_1}2^{m_2}\ldots n^{m_n}m_1!m_2!\cdots m_n!}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n} \quad (٣)$$

حيث المجموع مأخوذ على جميع الأنماط $\left[1^{m_1}2^{m_2}\ldots n^{m_n}\right]$ وحيث A_n هي زمرة التناوب من الدرجة n.

البرهان

(١) واضح أن التبديل المحايد id من النمط $\left[1^n\right]$ وبالتالي فإن

$$P_{\{id\}}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{1}x_1^n=x_1^n$$

(٢) نعلم من نظرية الزمر أنه إذا كان $\sigma,\tau\in S_n$ فإن σ,τ مترافقان إذا وفقط إذا كان σ,τ من النمط نفسه. كما نعلم أنه إذا كان σ من النمط $\left[1^{m_1}2^{m_2}\ldots n^{m_n}\right]$ فإن عدد عناصر فصل الترافق للتبديل σ يساوي $\dfrac{n!}{1^{m_1}2^{m_2}\ldots n^{m_n}m_1!m_2!\cdots m_n!}$. وبالتالي فإن

$$\begin{aligned}P_{S_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=\frac{1}{|S_n|}\sum c(m_1,m_2,\ldots,m_n)\,x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}\\&=\frac{1}{n!}\sum\frac{n!}{1^{m_1}2^{m_2}\ldots n^{m_n}m_1!m_2!\cdots m_n!}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}\\&=\sum\frac{1}{1^{m_1}2^{m_2}\ldots n^{m_n}m_1!m_2!\cdots m_n!}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{A_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=\frac{1}{|A_n|}\sum_{\sigma\in A_n}x_1^{m_1(\sigma)}x_2^{m_2(\sigma)}\ldots x_n^{m_n(\sigma)}\\&=\frac{2}{n!}\sum c(m_1,m_2,\ldots,m_n)\,x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}\end{aligned} \quad (٣)$$

حيث $c\left(m_1,m_2,...m_n\right)$ عدد التباديل في A_n التي لها النمط $\left[1^{m_1}2^{m_2}...\ n^{m_n}\right]$ وحيث المجموع مأخوذ على جميع الأنماط. بملاحظة أن A_n تتكون من التباديل الزوجية، وبفرض أن $k=\left[\dfrac{n}{2}\right]$ نجد أن

$$P_{A_n}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\frac{2}{n!}\sum\frac{n!}{1^{m_1}2^{m_2}...\ n^{m_n}m_1!m_2!\ ...\ m_n!}\ x_1^{m_1}x_2^{m_2}...\ x_n^{m_n}$$

حيث المجموع مأخوذ على الأنماط $\left[1^{m_1}2^{m_2}...\ n^{m_n}\right]$ التي يكون فيها $m_2+m_4+m_6+...+m_{2k}$ عدداً زوجياً.

إذن

$$P_{A_n}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\sum\frac{1+(-1)^{m_2+m_4+...+m_{2k}}}{1^{m_1}2^{m_2}...\ n^{m_n}m_1!m_2!\ ...\ m_n!}\ x_1^{m_1}x_2^{m_2}...\ x_n^{m_n}$$

حيث المجموع مأخوذ على جميع الأنماط.

مبرهنة(٦,٥)

إذا كانت $C_n=<\sigma>$ هي الزمرة الدوروية المولَّدة بالدورة $\sigma=(1\ 2\ ...\ n)$ فإن

$$P_{C_n}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)x_d^{\frac{n}{d}}$$

حيث φ هي دالة أويلر.

البرهان

ليكن $d\,|\,n$. بما أن C_n زمرة دوروية رتبتها n فإننا نعلم من نظرية الزمر أن C_n تحوي بالضبط $\varphi(d)$ عنصراً رتبة كل منها d. وهذه العناصر هي التباديل $\sigma^{\frac{kn}{d}}$ حيث $1\le k\le d$ و $\gcd(k,d)=1$. سنبيّن الآن أن كلاً من هذه التباديل يمكن كتابته كحاصل ضرب $\dfrac{n}{d}$ من الدورات المنفصلة التي طول كل منها d.

ليكن $1 \le i \le n-1$ وليكن m طول أقصر دورة عندما نكتب σ^i كحاصل ضرب دورات منفصلة، ولنفرض أن x ينتمي إلى إحدى الدورات التي طولها m. نلاحظ أن

$$\sigma^{im}(x) = \left(\sigma^i\right)^m(x) = x$$

من ناحية ثانية، إذا كان $y \in \{1,2,\ldots,n\}$ فإن كلاً من x و y ينتمي إلى الدورة $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n)$ وبالتالي فإنه يوجد r بحيث $\sigma^r(x) = y$. إذن

$$\left(\sigma^i\right)^m(y) = \sigma^{im}(y) = \sigma^{im}\sigma^r(x) = \sigma^r\sigma^{im}(x) = \sigma^r(x) = y$$

وبالتالي فإن y تنتمي إلى إحدى دورات σ^i التي طولها يقسم m. ولكن m يساوي طول أقصر دورات σ^i، عليه فإن طول الدورة التي تنتمي إليها y يساوي m. إذن جميع دورات σ^i لها الطول نفسه وهو m. وبالتالي فإنه إذا كانت رتبة σ^i تساوي d فإن $m = d$ وينتج أنه يمكن كتابة σ^i كحاصل ضرب $\frac{n}{d}$ من الدورات المنفصلة التي طول كل منها d.

إذن

$$P_{C_n}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) = \frac{1}{|C_n|}\sum c\left(m_1,m_2,\ldots,m_n\right)x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)x_d^{\frac{n}{d}}.$$

مبرهنة(٦,٦)

لتكن D_n زمرة زوجية رتبتها $2n$. إذا اعتبرنا D_n زمرة تباديل فإن

$$P_{D_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{2}P_{C_n}(x_1,x_2,...,x_n)+\begin{cases}\frac{1}{4}\left(x_2^{\frac{n}{2}}+x_1^2x_2^{\frac{n}{2}-1}\right), & n=2k\\ \frac{1}{2}x_1x_2^{\frac{n-1}{2}}, & n=2k+1\end{cases}$$

حيث C_n زمرة دوروية رتبتها n.

البرهان

ليكن لدينا مضلع منتظم عدد رؤوسه n ومركزه 0، ولنرقّم رؤوسه باتجاه عقارب الساعة بالأرقام $1,2,...,n$. إن الدوران بزاوية مقدارها $\frac{2\pi}{n}$ راديان حول المركز 0 يقابل الدورة $\sigma=(1\ 2\ 3\ ...\ n)$ كما أن الانعكاس حول المحور الذي يمر بالمركز 0 والرأس 1 يقابل التبديل $\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & ... & n\\ 1 & n & n-1 & ... & 2\end{pmatrix}$

ونعلم من نظرية الزمر أن

$$D_n=\left\{id,\sigma,\sigma^2,...,\sigma^{n-1},\tau,\tau\sigma,\tau\sigma^2,...,\tau\sigma^{n-1}\right\}$$

إن كتابة التباديل التي تنتمي إلى D_n كحاصل ضرب دورات منفصلة يعتمد على نوعية n من حيث كونه عدداً زوجياً أو فردياً، وهذا ما سنقدمه فيما يلي:

(أ) نفرض الآن أن n عدد زوجي وأن $n=2k\geq 4$.

إذن

$$\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & k+2 & \cdots & 2k\\ 1 & 2k & 2k-1 & \cdots & k+2 & k+1 & k & \cdots & 2\end{pmatrix}$$

$$=(2\ \ 2k)(3\ \ 2k-1)\ \cdots\ (k\ \ k+2)$$

لأن المحور الذي يمر بالرأس 1 والمركز 0 يمر أيضاً بالرأس $k+1$.

وبحساب $\tau\sigma, \tau\sigma^2, \ldots$ نجد أن

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2k \\ 2k & 2k-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
$$= (1\ \ 2k)(2\ \ 2k-1)\ \ldots\ (k\ \ k+1)$$
$$\tau\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & 2k \\ 2k-1 & 2k-2 & \cdots & \mathrm{k} & k-1 & \cdots & 2k \end{pmatrix}$$
$$= (1\ \ 2k-1)(2\ \ 2k-2)\ \ldots\ (k-1\ \ k+1)$$

إذن تتكون D_n من التالي:

١- n تبديلاً مقابلاً للدورانات وهي تكون الزمرة الدوروية

$$C_n = <\sigma> = \left\{ id, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1} \right\}$$

٢- $k = \dfrac{n}{2}$ تبديلاً مقابلاً للانعكاسات التي محاورها الأقطار وهي تكون

المجموعة $A = \left\{ \tau, \tau\sigma^2, \tau\sigma^4, \ldots, \tau\sigma^k \right\}$.

٣- $k = \dfrac{n}{2}$ تبديلاً مقابلاً للانعكاسات التي محاورها المنصفات العمودية للأضلاع المتقابلة وهي تكون المجموعة

$$B = \left\{ \tau\sigma, \tau\sigma^3, \tau\sigma^5, \ldots, \tau\sigma^{2k-1} \right\}$$

نحسب الآن دليل الدورات فنجد أن

$$P_{D_n}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \frac{1}{|D_n|} \sum_{\alpha \in D_n} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)} \ldots x_n^{m_n(\alpha)}$$

$$= \frac{1}{2n}\sum_{\alpha\in C_n} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)} \cdots x_n^{m_n(\alpha)} + \frac{1}{2n}\left[\sum_{\alpha\in A} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)} \cdots x_n^{m_n(\alpha)}\right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha\in B} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)} \cdots x_n^{m_n(\alpha)}\right]$$

$$= \frac{1}{2} P_{C_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{1}{2n}\left[\frac{n}{2} x_1^2 x_2^{\frac{n}{2}-1} + \frac{n}{2} x_2^{\frac{n}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2} P_{C_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{1}{4}\left[x_1^2 x_2^{\frac{n}{2}-1} + x_2^{\frac{n}{2}}\right]$$

(ب) نفرض الآن أن n عدد فردي وأن $n = 2k+1 \geq 3$

إذن

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 2k+1 \\ 1 & 2k+1 & 2k & \ldots & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (2\ \ 2k+1)(3\ \ 2k)\ \ldots\ (k+1\ \ k+2)$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k+1 & \ldots & 2k+1 \\ 2k+1 & 2k & \ldots & k+1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ \ 2k+1)(2\ \ 2k)\ \ldots\ (k\ \ \ k+2)$$

إذن D_n تتكون من التالي:

(i) n تبديلاً مقابلاً للدورانات وهي تكون الزمرة الدوروية

$$C_n = <\sigma> = \{id, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}\}$$

(ii) n تبديلاً مقابلاً للانعكاسات التي محاورها تمر بالمركز 0 وبالرؤوس $1, 2, \ldots, n$ وهي تكون المجموعة

$$A = \{\tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \ldots, \tau\sigma^{n-1}\}$$

نحسب الآن دليل الدورات فنجد أن

$$P_{D_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{\alpha\in C_n} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)}\cdots\ x_n^{m_n(\alpha)} + \frac{1}{2n}\sum_{\alpha\in A} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)}\cdots\ x_n^{m_n(\alpha)}$$
$$= \frac{1}{2}P_{C_n}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) + \frac{1}{2}x_1 x_2^{\frac{n-1}{2}}$$

(٦,٣) التلوينات غير المتكافئة

لتكن X مجموعة بحيث $|X|=n$ ولتكن G زمرة تباديل لـِ X. ولتكن C مجموعة بحيث $|C|=r$. تسمى C مجموعة ألوان وتسمى كل دالة $w: X\to C$ تلويناً، كما يرمز لمجموعة التلوينات بالرمز $\Omega=C^X$.

نلاحظ أن عدد التلوينات يساوي $|\Omega|=r^n$.

لتكن S_Ω زمرة تباديل Ω. الآن، نعرف الدالة $\wedge: G\to S_\Omega$. لكل $g\in G$، فإننا نرمز لصورة g بالرمز $\hat{g}$ ونضع $\hat{g}(w)=w\circ g^{-1}$ لكل $w\in\Omega$ حيث $w\circ g^{-1}$ هو تحصيل w على g^{-1}. نلاحظ أنه إذا كان $\hat{g}\left(w_1\right)=\hat{g}\left(w_2\right)$ فإن $w_1\circ g^{-1}=w_2\circ g^{-1}$، وبالتالي فإن $\left(w_1\circ g^{-1}\right)og=\left(w_2\circ g^{-1}\right)\circ g$. إذن $w_1\circ\left(g^{-1}\circ g\right)=w_2\circ\left(g^{-1}\circ g\right)$ تعطينا $w_1=w_2$. عليه $\hat{g}$ دالة متباينة. وبما أن Ω مجموعة منتهية فينتج أن $\hat{g}$ شاملة وبالتالي فإن $\hat{g}\in S_\Omega$.

مبرهنة(٦,٧)

$\wedge: G\to S_\Omega$ تشاكل أحادي، وبالتالي فإن $G\cong\hat{G}$ حيث $\hat{G}=\mathrm{Im}\wedge$ هي صورة $\wedge$.

البرهان

سنثبت أولاً أن $\wedge: G\to S_\Omega$ تشاكل. نلاحظ أنه لكل $w\in\Omega$ ولكل $g_1, g_2\in G$ فإن

$$\begin{aligned}\widehat{g_1g_2}(w) &= w\circ\left(g_1g_2\right)^{-1} = w\circ\left(g_2^{-1}g_1^{-1}\right)\\ &= \left(w\circ g_2^{-1}\right)\circ g_1^{-1} = \left(\widehat{g_2}(w)\right)\circ g_1^{-1}\\ &= \widehat{g_1}\left(\widehat{g_2}(w)\right) = \left(\widehat{g_1}\widehat{g_2}\right)(w)\end{aligned}$$

وبالتالي فإن $\widehat{g_1g_2} = \widehat{g_1}\widehat{g_2}$. إذن $\wedge : G\to S_\Omega$ تشاكل.

سنثبت الآن أن $\wedge : G\to S_\Omega$ أحادي. لنفرض أن $g_1, g_2, \in G$ وأن $g_1 \neq g_2$. إذن $g_1^{-1}\neq g_2^{-1}$ وبالتالي فإنه يوجد $x_0\in X$ بحيث $g_1^{-1}\left(x_0\right)\neq g_2^{-1}\left(x_0\right)$. من ناحية ثانية، فإنه يوجد تلوين $w_0 : X\to C$ بحيث $w_0\left(g_1^{-1}\left(x_0\right)\right)\neq w_0\left(g_2^{-1}\left(x_0\right)\right)$. إذن $w_0\circ g_1^{-1}\neq w_0\circ g_2^{-1}$، أي $\widehat{g_1}\left(w_0\right)\neq \widehat{g_2}\left(w_0\right)$. عليه $\widehat{g_1}\neq\widehat{g_2}$ وبالتالي فإن $\wedge : G\to S_\Omega$ أحادي.

ملاحظات

(١) $G\cong\widehat{G}$ ولكن G زمرة تباديل لمجموعة عدد عناصرها $|X|=n$ بينما $\widehat{G}$ زمرة تباديل لمجموعة عدد عناصرها $|\Omega|=r^n$.

(٢) $\widehat{G}$ زمرة تباديل لـِ Ω وإذا كان $w_1, w_2\in\Omega$ في المدار نفسه فإنه يوجد $\widehat{g}\in\widehat{G}$ بحيث $\widehat{g}\left(w_1\right)=w_2$. أي، $w_1\circ g^{-1}=w_2$ وبالتالي فإن $w_1=w_2\circ g$. وبالعكس، إذا كان $w_1=w_2\circ g$ فإن $w_1\circ g^{-1}=w_2$ وبالتالي فإن w_1, w_2 لهما المدار نفسه.

تمهيدية(٦,١)

إذا كان $g\in G$ وإذا كُتب g كحاصل ضرب دورات منفصلة فإن $\widehat{g}(w)=w$ إذا وفقط إذا كان g ثابتاً على كل دورة من الدورات المنفصلة.

البرهان

لنفرض أن g قد كُتبت كحاصل ضرب دورات منفصلة وأن $(x_1\ x_2\ \dots\ x_t)$ إحدى هذه الدورات. لكل $1 \le i \le t-1$ فإن $x_i = g^{-1}(x_{i+1})$ تعطينا

$$w(x_i) = w\left(g^{-1}(x_{i+1})\right) = \left(\widehat{g}(w)\right)(x_{i+1}) = w(x_{i+1})$$

لأن $\widehat{g}(w) = w$. إذن $w(x_1) = \dots = w(x_t)$. أي، w ثابت على الدورة $(x_1\ x_2\ \dots\ x_t)$.

من ناحية ثانية، إذا كان $w(x_1) = \dots = w(x_t)$ فإن $x_1 = g^{-1}(x_2)$ و $w(x_1) = w(x_2)$ تعطينا $w(x_2) = w\left(g^{-1}(x_2)\right)$. أي، $w(x_2) = \left(\widehat{g}(w)\right)(x_2)$. وبالمثل $w(x) = \left(\widehat{g}(w)\right)(x)$ لكل $x \in X$. إذن $\widehat{g}(w) = w$. □

$\widehat{G}$ زمرة تباديل لمجموعة التلوينات Ω. نقول إن التلوينين $g_1, g_2 \in \Omega$ **متكافئان** إذا كانا ينتميان إلى أحد مدارات $\widehat{G}$ على Ω.

المبرهنة التالية تزودنا بطريقة لحساب عدد التلوينات غير المتكافئة.

مبرهنة(٦,٨)

إذا كانت G زمرة تباديل للمجموعة $X = \{1, 2, \dots, n\}$ وكان $P_G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ دليل دوراتها فإن عدد التلوينات غير المتكافئة $w : X \to C$ يساوي $P_G(r, r, \dots, r)$ حيث عدد الألوان $|C| = r$.

البرهان

ليكن $\sigma \in G$ تبديلاً من النمط $\left[1^{m_1(\sigma)} 2^{m_2(\sigma)} \dots n^{m_n(\sigma)}\right]$ وليكن $m_1(\sigma) + m_2(\sigma) + \dots + m_n(\sigma) = k$. إذا كان $w : X \to C$ تلويناً بحيث

$\hat{\sigma}(w)=w$ فإن تمهيدية(٦،١) تفيد بأن w ثابت على كل دورة عند كتابة σ كحاصل ضرب دورات منفصلة . وبالتالي فإن

$$\left|Fix\left(\hat{\sigma}\right)\right| = \left|\left\{w \in \Omega : \hat{\sigma}(w)=w\right\}\right|$$

$$= |\{ w \in \Omega : \sigma \text{ ثابت على دورات } w \}|$$

$$= r^k = r^{m_1(\sigma)+m_2(\sigma)+\ldots+m_n(\sigma)} = r^{m_1(\sigma)} r^{m_2(\sigma)} \cdots r^{m_n(\sigma)}$$

$$= M_\sigma(r,r,\ldots,r)$$

من ناحية ثانية فإن مبرهنة(٦،٧) تفيد بأن $|\hat{G}|=|G|$. إذن عدد مدارات $\hat{G}$ على Ω يساوي

$$\frac{1}{\left|\hat{G}\right|}\sum_{\hat{\sigma}\in\hat{G}}\left|Fix\left(\hat{\sigma}\right)\right| = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} M_\sigma(r,r,\ldots,r) = P_G(r,r,\ldots,r)$$

باستخدام دليل الدورات، يمكن حساب عدد التلوينات غير المتكافئة؛ وهذا هو مضمون مبرهنة(٦،٨). سنقدم فيما يلي تعميماً يعطينا عدد التلوينات غير المتكافئة التي استخدمت فيها الألوان المختلفة أعداداً معيّنة من المرات.

فيما يلي، نفرض أن X هي المجموعة المراد تلوينها وأن $|X|=n$ وأن $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$ هي مجموعة الألوان.

ليكن $w:X\to C$ تلويناً وليكن n_i هو عدد عناصر X التي تأخذ اللون c_i، $1\le i\le r$. نلاحظ أن $n_1+n_2+\ldots+n_r=n$. نقرن بالتلوين $w:X\to C$ وحيد الحد الشكلي

$ind(w)=c_1^{n_1}c_2^{n_2}\ldots c_r^{n_r}$ ونسمي $ind(w)$ مؤشر w.

إذا كانت $A \subseteq \Omega = C^X$ فإننا نضع $f_A\left(c_1,c_2,\ldots,c_r\right)=\sum_{w\in A} ind(w)$

ونسمي f_A الدالة المولِّدة لأعداد التلوينات التي تنتمي إلى A والتي استخدمت فيها الألوان المختلفة أعداداً معينة من المرات.

مبرهنة(٦,٩)

لتكن $\{X_1,X_2,\ldots,X_k\}$ تجزئة لِـ X حيث $1\le i\le k$ و $|X_i|=m_i$ و $m_1+m_2+\ldots+m_k=n$. ولتكن

$$B=\{w\in\Omega : 1\le i\le k \text{ لكل } X_i \text{ ثابت على } w\}$$

عندئذٍ،

$$f_B\left(c_1,c_2,\ldots,c_r\right)=$$
$$\left(c_1^{m_1}+c_2^{m_1}+\ldots+c_r^{m_1}\right)\left(c_1^{m_2}+c_2^{m_2}+\ldots+c_r^{m_2}\right)\ldots\left(c_1^{m_k}+c_2^{m_k}+\ldots+c_r^{m_k}\right)$$

البرهان

ليكن $w:X\to C$ تلويناً معطى، ولنفرض أن w يعيّن اللون c_{j_i} لجميع عناصر X_i لكل $1\le i\le k$. نلاحظ أننا نحصل على $ind(w)$ في مفكوك $\left(c_1^{m_1}+\ldots+c_r^{m_1}\right)\ldots\left(c_1^{m_k}+\ldots+c_r^{m_k}\right)$ وذلك باختيار الحد $C_{j_i}^{m_i}$ من القوس رقم i لكل $1\le i\le k$. ومن ناحية ثانية فإن اختيار حد من كل قوس يعيّن تلويناً ينتمي إلى B. وبالتالي فإن

$$\left(c_1^{m_1}+\ldots+c_r^{m_1}\right)\ldots\left(c_1^{m_k}+\ldots+c_r^{m_k}\right)=\sum_{w\in B} ind(w)=f_B\left(c_1,c_2,\ldots,c_r\right)\ \square$$

الآن، لغرض الإعداد لإثبات مبرهنة بوليا فإننا نقدم تعميماً لمبرهنة(٦,٣).

مبرهنة(٦,١٠)

لتكن $G=\{g_1,g_2,\dots,g_m\}$ زمرة تباديل للمجموعة $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ ولتكن ψ دالةً ثابتةً على كل مدار من مدارات G على X؛ أي،

$$\psi\left(g(x)\right)=\psi(x) \qquad \forall g\in G, x\in X$$

لتكن $D=\{d_1,d_2,\dots,d_t\}$ مجموعة ممثلات لجميع مدارات G على X.

عندئذٍ،

$$\sum_{x\in D}\psi(x)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{x\in Fix(g)}\psi(x)$$

البرهان

ضع $E=\{(g,x):g(x)=x\}\subseteq G\times X$. سنحسب $\sum_{(g,x)\in E}\psi(x)$ بطريقتين.

$$\begin{aligned}\sum_{(g,x)\in E}\psi(x)&=\sum_{(g_1,x)\in E}\psi(x)+\dots+\sum_{(g_m,x)\in E}\psi(x)\\&=\sum_{x\in Fix(g_1)}\psi(x)+\dots+\sum_{x\in Fix(g_m)}\psi(x)\\&=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{x\in Fix(g_k)}\psi(x)\right)=\sum_{g\in G}\left(\sum_{x\in Fix(g)}\psi(x)\right)\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)\end{aligned}$$

من ناحية ثانية فإن

$$\begin{aligned}\sum_{(g,x)\in E}\psi(x)&=\sum_{(g,x_1)\in E}\psi(x_1)+\dots+\sum_{(g,x_n)\in E}\psi(x_n)\\&=\sum_{g\in G_{x_1}}\psi(x_1)+\cdots+\sum_{g\in G_{x_n}}\psi(x_n)\\&=\left|G_{x_1}\right|\psi\left(x_1\right)+\dots+\left|G_{x_n}\right|\psi\left(x_n\right)\\&=\sum_{x\in Gd_1}\left|G_x\right|\psi(x)+\dots+\sum_{x\in Gd_t}\left|G_x\right|\psi(x)\\&=\left|Gd_1\right|\left|G_{d_1}\right|\psi\left(d_1\right)+\dots+\left|Gd_t\right|\left|G_{d_t}\right|\psi\left(d_t\right)\end{aligned}$$

$$=|G|\psi(d_1)+\ldots+|G|\psi(d_t)$$
$$=|G|\left(\psi(d_1)+\ldots+\psi(d_t)\right)$$
$$=|G|\sum_{k=1}^{t}\psi(d_k)=|G|\sum_{x\in D}\psi(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

حيث تم الاستناد إلى مبرهنة(٦,١) ومبرهنة(٦,٢).

من (1) و (2) نجد أن

$$|G|\sum_{x\in D}\psi(x)=\sum_{g\in G}\left(\sum_{x\in Fix(g)}\psi(x)\right)$$

وبالتالي فإن

$$\sum_{x\in D}\psi(x)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(\sum_{x\in Fix(g)}\psi(x)\right)$$

مبرهنة(٦,١١) (مبرهنة بوليا)

لتكن G زمرة تباديل للمجموعة $X=\{1,2,\ldots,n\}$، $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_r\}$ مجموعة ألوان، $\Omega=C^X$ مجموعة التلوينات، $\wedge:G\to S_\Omega$ الدالة المعرَّفة بالقاعدة $\widehat{g}(w)=w\circ g^{-1}$ لكل $w\in\Omega$. ولتكن D مجموعة ممثلات لمدارات $\widehat{G}$ على Ω. عندئذٍ، إن الدالة المولِّدة لأعداد التلوينات غير المتكافئة للمجموعة X هي

$$f_D(c_1,c_2,\ldots,c_r)=P_G(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$$

حيث $\alpha_i=c_1^i+c_2^i+\ldots+c_r^i \quad 1\le i\le n$.

البرهان

يمكن النظر إلى ind كدالة ثابتة على كل مدار من مدارات $\widehat{G}$ على Ω؛ وبالاستناد إلى مبرهنة(٦,١٠) نجد أن

$$
\begin{aligned}
f_D(c_1,\dots,c_r) &= \sum_{w\in D} ind(w) \\
&= \frac{1}{|\widehat{G}|}\sum_{\widehat{g}\in\widehat{G}}\left(\sum_{w\in Fix(\widehat{g})} ind(w)\right) \\
&= \frac{1}{|\widehat{G}|}\sum_{\widehat{g}\in\widehat{G}} f_{Fix(\widehat{g})}(c_1,c_2,\dots,c_r)
\end{aligned}
$$

نعلم من تمهيدية(٦,١) أنه إذا كان $g\in G$ وإذا كتب g كحاصل ضرب دورات منفصلة فإن w ثابت على كل دورة من هذه الدورات إذا وفقط إذا كان $w\in Fix(\widehat{g})$. وبتطبيق مبرهنة(٦,٩) نجد أن

$$
f_{Fix(\widehat{g})}(c_1,c_2,\dots,c_r) = \left(c_1^{m_1}+\dots+c_r^{m_1}\right)\dots\left(c_1^{m_k}+\dots+c_r^{m_k}\right)
$$

حيث $m_1,\dots,m_k$ هي أطوال دورات g المنفصلة. وإذا كانت g من النمط $\left[1^{t_1}2^{t_2}\cdots n^{t_n}\right]$ فإن

$$
\begin{aligned}
f_{Fix(\widehat{g})}(c_1,\dots,c_r) &= \alpha_1^{t_1}\alpha_2^{t_2}\dots\alpha_n^{t_n} \\
&= M_g(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)
\end{aligned}
$$

وبما أن $G\cong\widehat{G}$ فإن

$$
\begin{aligned}
f_D(c_1,\dots,c_r) &= \sum_{w\in D} ind(w) \\
&= \frac{1}{|\widehat{G}|}\sum_{\widehat{g}\in\widehat{G}} M_g(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} M_g(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \\
&= P_G(\alpha_1,\dots,\alpha_n)
\end{aligned}
$$

ملاحظات

(١) نلاحظ أن معامل $c_1^{k_1}c_2^{k_2}\dots c_r^{k_r}$ في مفكوك $P_G\left(\alpha_1,\dots,\alpha_n\right)$ يساوي عدد التلوينات غير المتكافئة بحيث ألوان عناصر X كما يلي: k_1 عنصراً تأخذ اللون c_1، k_2 عنصراً تأخذ اللون c_2، ...، k_r عنصراً تأخذ اللون c_r.
ولحساب هذا المعامل فإننا لا نحتاج إلى إيجاد المفكوك الكامل لـ $P_G\left(\alpha_1,\dots,\alpha_n\right)$ وإنما لإيجاد الحدود ذات الصلة بالمعامل.

(٢) نلاحظ أنه إذا وضعنا 1 مكان c_i لكل $1\le i\le r$ فإننا نحصل على $f_D(1,1,\dots,1)=P_G(r,r,\dots,r)$. وهذا يعطينا عدد التلوينات غير المتكافئة. □

استُخدمت مبرهنة(٦,٣) ومبرهنة بوليا لحل مسائل تركيبية مهمة في الكيمياء وفي تصميم الدارات المنطقية، ويمكن العودة إلى المراجع للاطلاع على ذلك. وسنكتفي هنا بإعطاء بعض الأمثلة العامة ومثال من نظرية الرسومات لنوضح كيفية معالجة بعض المسائل التطبيقية والنظرية.

مثال(٦,٥)

بالإشارة إلى مثال(٦,١) فإنه يمكن حساب المطلوب وزيادة باستخدام مبرهنة بوليا.
من مبرهنة(٦,٥) نجد أن

$$P_{C_4}\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\frac{1}{4}\left[x_1^4+x_2^2+2x_4\right]$$

إذن

$$P_{C_4}=(3,3,3,3)=\frac{1}{4}\left[3^4+3^2+2(3)\right]$$
$$=\frac{96}{4}=24$$

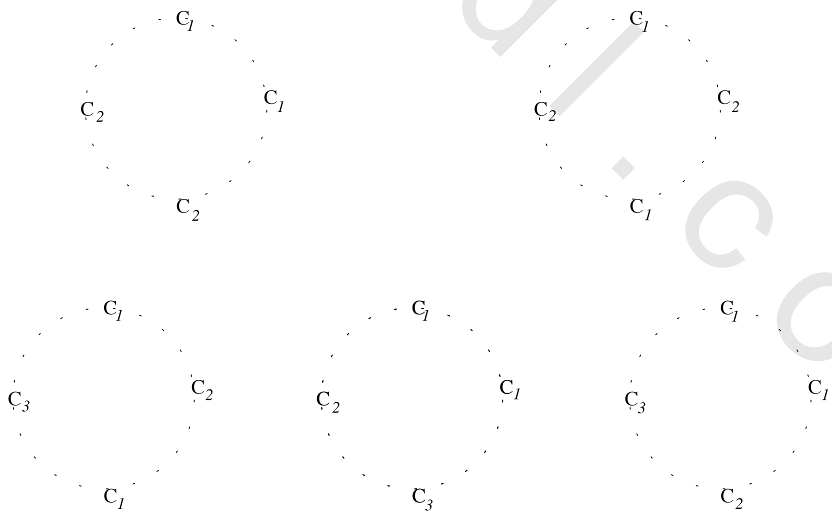
هو عدد النماذج المختلفة للتوزيعات.

ولبيان المعلومات الإضافية التفصيلية التي يمكن الحصول عليها من مبرهنة بوليا فإننا نحسب

$$\begin{aligned}
&P_{C_4}\left(c_1+c_2+c_3, c_1^2+c_2^2+c_3^2, c_1^3+c_2^3+c_3^3, c_1^4+c_2^4+c_3^4\right)\\
&=\frac{1}{4}\left[\left(c_1+c_2+c_3\right)^4+\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)^2+2\left(c_1^4+c_2^4+c_3^4\right)\right]\\
&=c_1^4+c_2^4+c_3^4+c_1^3c_2+c_1^3c_3+c_1c_2^3+c_2^3c_3\\
&+c_1c_3^3+c_2c_3^3+2c_1^2c_2^2+2c_1^2c_3^2+2c_2^2c_3^2\\
&+3c_1^2c_2c_3+3c_1c_2^2c_3+3c_1c_2c_3^2
\end{aligned}$$

ومن هنا نجد أنه يوجد نموذجان مختلفان بحيث يكون طبقان لهما اللون c_1 وطبقان لهما اللون c_2 ؛ كما يوجد ثلاثة نماذج مختلفة بحيث يكون طبقان لهما اللون c_1 وطبق له اللون c_2 وطبق له اللون c_3 وهلم جراً.

ويمكن اعتبار التوزيعات، الموضحة في الشكل أدناه، ممثلات لتلك النماذج المختلفة



مثال(٦,٦)

بالإشارة إلى مثال(٦,٢) فإنه يمكن حساب عدد النماذج المختلفة للقلادات وبيان المعلومات التفصيلية المتعلقة بذلك باستخدام مبرهنة بوليا.

من مبرهنة(٦,٦) نجد أن دليل الدورات للزمرة D_9 هو

$$P_{D_9}(x_1,\ldots,x_9)=\frac{1}{2}P_{C_9}(x_1,\ldots,x_9)+\frac{1}{2}x_1x_2^4$$
$$=\frac{1}{18}\left[x_1^9+2x_3^3+6x_9\right]+\frac{1}{2}x_1x_2^4$$

وبالتالي فإن

$$P_{D_9}(x_1,\ldots,x_9)$$
$$=\frac{1}{18}\left[(c_1+c_2)^9+2\left(c_1^3+c_3^2\right)^3+6\left(c_1^9+c_2^9\right)\right]+\frac{1}{2}(c_1+c_2)\left(c_1^2+c_2^2\right)^4$$

وإذا اعتبرنا c_1 هو اللون الأسود و c_2 هو اللون الأبيض فإن عدد النماذج المختلفة للقلادات يساوي معامل $c_1^3c_2^6$ في مفكوك $P_{D_9}(\alpha_1,\ldots,\alpha_9)$. ومنه نجد أن هذا العدد يساوي

$$\frac{1}{18}\left(\binom{9}{3}+2(3)\right)+\frac{1}{2}(4)$$
$$=\frac{1}{18}\left[\frac{(9)(8)(7)}{(3)(2)}+6\right]+2=\frac{1}{18}[90]+2=7$$

مثال(٦,٧)

بالإشارة إلى مثال(٦,٣) فإنه يمكن حساب عدد النماذج المختلفة للتلوينات وبيان المعلومات التفصيلية المتعلقة بذلك باستخدام مبرهنة بوليا. ولهذا الغرض، لتكن

$$E = \{12,13,14,23,24,34\}$$

هي مجموعة أضلاع رباعي الوجوه المنتظم المعطى. نجد الآن عناصر الزمرة $\overline{A_4} = \left\{\overline{\sigma_i} : 1 \le i \le 12\right\}$ التي تتكون من تباديل للمجوعة E مُحْدثة بوساطة عناصر الزمرة A_4.

$$\overline{\sigma_1} = id$$

$$\overline{\sigma_2} = \overline{(12)(34)} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 12 & 24 & 23 & 14 & 13 & 34 \end{pmatrix}$$

$$= (13\ 24)(14\ 23)$$

$$\overline{\sigma_3} = \overline{(13)(24)} = (12\ 34)(14\ 23)$$

$$\overline{\sigma_4} = \overline{(14)(23)} = (12\ 34)(13\ 24)$$

$$\overline{\sigma_5} = \overline{(1\ 2\ 3)} = (12\ 23\ 13)(14\ 24\ 34)$$

$$\overline{\sigma_6} = \overline{(1\ 3\ 4)} = (12\ 23\ 24)(13\ 34\ 14)$$

$$\overline{\sigma_7} = \overline{(2\ 34)} = (12\ 13\ 14)(23\ 34\ 24)$$

$$\overline{\sigma_8} = \overline{(1\ 4\ 2)} = (12\ 14\ 24)(13\ 34\ 23)$$

$$\overline{\sigma_9} = \overline{(1\ 32)} = (12\ 13\ 23)(14\ 34\ 24)$$

$$\overline{\sigma_{10}} = \overline{(2\ 34)} = (12\ 13\ 14)(23\ 34\ 24)$$

$$\overline{\sigma_{11}} = \overline{(1\ 2\ 4)} = (12\ 24\ 14)(13\ 23\ 34)$$

$$\overline{\sigma_{12}} = \overline{(1\ 4\ 3)} = (12\ 24\ 23)(13\ 14\ 34)$$

إذن، دليل الدورات للزمرة $\overline{A_4}$ هو

$$P_{\overline{A_4}}\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\right) = \frac{1}{12}\left[x_1^6 + 3x_1^2 x_2^2 + 8x_3^2\right]$$

وبالتالي، فإن عدد التلوينات المختلفة يساوي

$$\frac{1}{12}\left[3^6+3\left(3^2\right)\left(3^2\right)+8\left(3^2\right)\right]$$
$$=\frac{3^2}{12}\left[3^4+3\left(3^2\right)+8\right]=\frac{3}{4}[81+27+8]$$
$$=\frac{3}{4}\times 116=87$$

ويمكن الحصول على المعلومات التفصيلية من

$$P_{\overline{A_4}}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_6\right)$$

حيث

$$\alpha_i=c_1^i+c_2^i+c_3^i \quad , \quad 1\le i\le 6$$

ونحصل بعد التعويض على

$$P_{\overline{A_4}}\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_6\right)=$$
$$\frac{1}{12}\left[\left(c_1+c_2+c_3\right)^6+3\left(c_1+c_2+c_3\right)^2\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)^2+8\left(c_1^3+c_2^3+c_3^3\right)^2\right]$$

مثال(٦,٨)

جد عدد الرسوم البسيطة غير المتماثلة التي عدد رؤوسها n وعدد أضلاعها m.

الحل

نفرض أن مجموعة الرؤوس هي $V=\{1,2,\ldots,n\}$ وأن مجموعة الأضلاع هي مجموعة جزئية من المجموعة $E=\{\{i,j\}:i,j\in V\,,i\neq j\}$ التي عدد عناصرها $|E|=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.

لتكن G_n هي مجموعة جميع الرسوم البسيطة التي مجموعة رؤوسها هي V ومجموعة أضلاعها هي مجموعة جزئية من E. نعرف الدالة $\rho : S_V = S_n \to S_E$ كما يلي:

لكل $\sigma \in S_V$ فإن $\rho(\sigma) = \rho_\sigma$ حيث $\rho_\sigma : E \to E$ يحقق $\rho_\sigma(\{i,j\}) = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$ لكل $\{i,j\} \in E$.

ويمكن أن يثبت القارئ بسهولة أن $\rho_\sigma \in S_E$ وأن $\rho : S_V \to S_E$ تشاكل أحادي. وبالتالي فإن $S_V \cong \rho(S_V)$. ونلاحظ أن S_V زمرة تباديل لمجموعة عدد عناصرها $|V| = n$ بينما $\rho(S_V)$ زمرة تباديل لمجموعة عدد عناصرها $|E| = \binom{n}{2}$.

نعتبر الآن مجموعة التلوينات $\Omega = C^X$ حيث $X = E$ و $C = \{T, F\}$.

نلاحظ فيما يلي أنه يوجد تقابل بين المجموعة Ω والمجموعة G_n. إذا كان $w : X = E \to C$ تلويناً فإننا نقرن به الرسم البسيط الذي مجموعة رؤوسه V والذي يكون فيه e ضلعاً إذا وفقط إذا كان $w(e) = T$. أما إذا كان $H = (V, E(H)) \in G_n$ فإننا نقرن به التلوين $w : E \to C$ المعرف كما يلي: لكل $e \in E$ فإن

$$w(e) = \begin{cases} T, & e \in E(H) \\ F, & e \notin E(H) \end{cases}$$

أخيراً، نلاحظ أن $\widehat{\rho(S_V)}$ زمرة تباديل للمجموعة $X = E$ وأن رسمين من المجموعة G_n يتماثلان إذا وفقط إذا كان التلوينان المقابلان للرسمين متكافئان. وبالتالي فإن أعداد الرسوم غير المتماثلة هي أعداد التلوينات غير المتكافئة والتي تعطى بالدالة المولّدة

$$f_D(T,F)=P_{\rho(S_v)}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{|E|}\right)$$

حيث

$$\alpha_i=T^i+F^i \quad \forall\ 1\le i\le |E|$$

على سبيل المثال، عندما $n=4$ فإن

$$f_D(T,F)=P_{\rho(S_4)}\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\right)$$

وبحساب دليل الدورات نجد أن

$$P_{\rho(S_4)}\left(x_1,\ldots,x_6\right)=\frac{1}{24}\left[x_1^6+9x_1^2x_2^2+8x_3^2+6x_2x_4\right]$$

إذن

$$f_D(T,F)=P_{\rho(S_n)}\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_6\right)$$

$$=T^6+T^5F+2T^4F^2+3T^3F^3+2T^2F^4+TF^5+F^6$$

إذن عدد الرسوم غير المتماثلة هو

$$f_D(1,1)=1+1+2+3+2+1+1=11$$

والجدول التالي يصنفها حسب عدد الأضلاع:

عدد الأضلاع	6	5	4	3	2	1	0
عدد الرسوم غير المتماثلة	1	1	2	3	2	1	1

تمارين

١- جد عدد التلوينات المختلفة لرؤوس مثلث عندما يكون

(أ) المثلث ليس متطابق الأضلاع وليس متساوي الساقين وعدد الألوان المتاحة يساوي 2.

(ب) المثلث ليس متطابق الأضلاع ولكنه متساوي الساقين وعدد الألوان المتاحة يساوي 2.

(ج) المثلث متطابق الأضلاع وعدد الألوان المتاحة يساوي r.

٢- جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات رؤوس مثلث متطابق الأضلاع إذا كان عدد الألوان المتاحة هو 5 وكانت التلوينات تستخدم لونين على الأقل.

٣- جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات رؤوس مربع إذا كان عدد الألوان المتاحة يساوي

(أ) 2

(ب) r

٤- جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات أضلاع مربع إذا كان عدد الألوان المتاحة هو 6 وكانت ألوان الأضلاع مختلفة.

٥- جد عدد التلوينات المختلفة لأضلاع مربع عندما يكون عد الألوان المتاحة يساوي r.

٦- جد عدد التلوينات المختلفة لرؤوس مستطيل طوله لا يساوي عرضه، عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي

(أ) 2

(ب) r

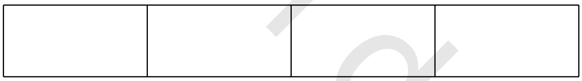
٧- جد عدد الأقراص الدائرية الملونة المختلفة عندما يقسم أحد وجهي القرص إلى خمسة قطاعات متطابقة ويلون قطاعان باللون c_1 وقطاعان باللون c_2 وقطاع واحد باللون c_3.

٨- جد عدد القلادات المختلفة التي يمكن تكوينها من خرزتين لهما اللون c_1 وخرزتين لهما اللون c_2 وخرزة واحدة لها اللون c_3.

٩- جد عدد القلادات المختلفة التي يمكن تكوينها من 3 خرزات سوداء و 13 خرزة بيضاء.

١٠- (أ) لدينا رقعة مستطيلة مقسمة إلى ٤ مستطيلات متطابقة بحيث تكون شريطاً

له الشكل التالي:



جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات مستطيلات الشريط عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي 2.

(ب) جد عدد النماذج المختلفة عندما يتكون الشريط من 5 مستطيلات متطابقة.

(ج) جد عدد النماذج المختلفة عندما يكون عدد المستطيلات المتطابقة n وعدد الألوان المتاحة r.

١١– لدينا رقعة مربعة مقسمة إلى 4 مربعات متطابقة. جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات مربعات الرقعة عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي 2.

١٢– لدينا رقعة مربعة مقسمة إلى 9 مربعات متطابقة. جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات مربعات الرقعة عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي 2.

١٣– لدينا رقعة مربعة مقسمة إلى مربعات متطابقة عددها n^2. جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات مربعات الرقعة عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي r.

١٤– جد عدد التلوينات المختلفة لرؤوس رباعي وجوه منتظم عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي n.

١٥– جد عدد التلوينات المختلفة لوجوه رباعي وجوه منتظم عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي n.

١٦– جد عدد التلوينات المختلفة لرؤوس مكعب عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي n.

١٧– جد عدد التلوينات المختلفة لوجوه مكعب بحيث تلون ثلاثة وجوه باللون c_1 ويلون وجهان باللون c_2 ويلون وجه واحد باللون c_3.

١٨– جد عدد التلوينات المختلفة لرؤوس ثماني وجوه منتظم عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي 3.

١٩– جد عدد العلاقات الثنائية على مجموعة رباعية والتي ليست متكافئة تحت تأثير التباديل المحدثة بتباديل المجموعة.

٢٠– جد عدد علاقات التكافؤ على مجموعة رباعية والتي ليست متكافئة تحت تأثير التباديل المحدثة بتباديل المجموعة.