الفصل الثالث

الـدوال المـولِّـدة
GENERATING FUNCTIONS

يبرز هذا الفصل ترابط فروع علم الرياضيات، حيث نستخدم خواص كثيرات الحدود الجبرية وخواص المتسلسلات التحليلية لحل بعض مسائل العد.

(٣,١) مقدمة

يُختزل الكثير من مسائل العد إلى مسألة إيجاد الحد العـام a_n لمتتاليـة (a_n) من الشكل $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ وتعتبر طريقة الدوال المولِّدة إحدى الطرائق الفعّالة لإيجاد a_n حيث نجد دالة مولدة للمتتالية (a_n) ثم نستخرج a_n منها.

تُعـرَّف الدالـة المولـدة العاديـة (ordinary generating function) $g(x)$ للمتتالية (a_n) بأنها متسلسلة القوى الشكلية (formal power series)

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

وتُعرَّف **الدالة المولدة الأسية** (exponential generating function) $h(x)$ للمتتاليـة (a_n) بأنها المتسلسلة

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}=a_0+a_1x+a_2\frac{x^2}{2!}+\cdots+a_n\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

الدالة المولدة العادية $g(x)$ للمتتالية (2^n) هي

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n=1+2x+2^2x^2+\cdots+2^nx^n+\cdots$$

ويمكن الوصول إلى كتابة $g(x)$ على الـشكل $g(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ الـذي يـسمى **صـيغة مختصرة** (closed formula) لِـ $g(x)$ من خلال منظورين مخـتلفين. الأول لا يتعلـق بالدوال وتقـارب المتسلـسلات حيـث ننظـر إلى $\dfrac{1}{1-2x}$ علـى أنهـا الـنظير الـضربي $(1-2x)^{-1}$ لمتسلسلة القوى الشكلية $1-2x$ في حلقـة متسلـسلات القـوى الـشكلية $\mathbb{C}[[x]]$ على حقل الأعداد المركبة $\mathbb{C}$. أما الثاني فنـرى مـن خلالـه $\dfrac{1}{1-2x}$ علـى أنهــا دالــة ممثلــة بمتسلــسلة القــوى $1+2x+2^2x^2+\cdots+2^nx^n+\cdots$ عنــدما $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$. وتوخياً للسهولة فإننا سنعتمد المقاربة الثانية لتقـديم الـدوال المولِّـدة. ويستطيع القارئ أن يعود إلى أحد كتب حساب التفاضل والتكامـل لمراجعـة موضـوع متسلسلات القوى وتمثيل الدوال بها.

مثال(٣,١)

جد الدالة المولدة العادية للمتتالية $1,1,\ldots,1,\ldots$.

الحل

$$g(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$$

مثال(٣,٢)

جد الدالة المولدة الأسية للمتتالية $1,1,\ldots,1,\ldots$.

الحل

$$h(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=e^x$$

ومن هنا جاء استخدام كلمة "أسية" في التعريف.

ملاحظات

فيما يلي سنستخدم الاصطلاحات التالية:

١- نستخدم عبارة "الدالة المولِّدة" بدلاً من "الدالة المولدة العادية".

٢- نستخدم عبارة "المولِّدة لـ a_n" بدلاً من "المولِّدة لـلمتتالية (a_n)".

٣- إذا كان نص المسألة لا يحتوي صراحة أو ضمناً على متتالية واستخدمنا عبارة "جد الدالة المولِّدة لـ ..." فإننا نقصد بذلك تعميم المسألة بحيث تحتوي على متتالية يكون حل المسألة الأصلية أحد حدودها.

(٣,٢) الدوال المولدة العادية

مثال(٣,٣)

كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2=r$ إذا كانت $0\le X_1\le 1$ و $1\le X_2\le 2$؟

الحل

من الجدول أدناه يتضح أنه يوجد حل واحد إذا كانت $r=1$ أو $r=3$ وحلان إذا كانت $r=2$.

X_1	X_2	X_1+X_2
0	1	1
0	2	2
1	1	2
1	2	3

مثال(٣,٤)

أوجد مفكوك $(x^0+x^1)(x^1+x^2)$

الحل

$$(x^0+x^1)(x^1+x^2)=x^0(x^1+x^2)+x^1(x^1+x^2)$$

$$=x^0x^1+x^0x^2+x^1x^1+x^1x^2=x^{0+1}+x^{0+2}+x^{1+1}+x^{1+2}$$

$$=x^1+x^2+x^2+x^3=x^1+2x^2+x^3$$

لاحظ أن معامل x^1,x^2,x^3 في مفكوك $(x^0+x^1)(x^1+x^2)$ يساوي عدد حلول المعادلة في مثال(٣,٣) عندما $r=1,r=2,r=3$ على الترتيب. ويمكن تعميم هذه الملاحظة كما في المبرهنة التالية.

مبرهنة(٣,١)

ليكن a_r هو عدد الحلول الصحيحة للمسألة

$$X_1+X_2+\cdots+X_n=r$$

$$X_i=\alpha_{i,1},\alpha_{i,2},\ldots \quad \text{لكل} \quad i=1,2,\ldots,n$$

إن الدالة المولدة العادية للمتتالية (a_r) هي

$$g(x)=(x^{\alpha_{1,1}}+x^{\alpha_{1,2}}+\cdots)(x^{\alpha_{2,1}}+x^{\alpha_{2,2}}+\cdots)\cdots(x^{\alpha_{n,1}}+x^{\alpha_{n,2}}+\cdots)$$

البرهان

إن حداً نمطياً في مفكوك $g(x)$ قبل التبسيط وتجميع الحدود المتشابهة يكون على الشكل المرتب $x^{\alpha_1}x^{\alpha_2}\cdots x^{\alpha_n}$ حيث الحد x^{α_i} مأخوذ من العامل $(x^{\alpha_{i,1}}+x^{\alpha_{i,2}}+\cdots)$ لكل $i=1,2,\ldots,n$. وبعد التبسيط يكون الحد النمطي على الشكل $x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$. وللحصول على x^r لا بد أن يكون $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=r$. أي، لا بد أن يكون $X_1=\alpha_1,\ X_2=\alpha_2,\ldots,\ X_n=\alpha_n$ حلاً للمسألة المعطاة. وبالتالي فإن معامل x^r في مفكوك $g(x)$ يساوي a_r. إذن $g(x)$ هي الدالة المولدة العادية للمتتالية (a_r).

نتيجة(٣,١)

لكل عدد صحيح $n\geq 1$ فإن

$$(1-x)^{-n}=(1+x+x^2+\cdots)^n$$
$$=\binom{n-1+0}{0}+\binom{n-1+1}{1}x+\cdots+\binom{n-1+k}{k}x^k+\cdots$$

البرهان

$(1+x+x^2+\cdots)^n$ هي الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1+X_2+\cdots+X_n=k$. ومن نتيجة(١,١) فإن معامل x^k في $(1+x+x^2+\cdots)^n$ هو $\binom{n-1+k}{k}$.

مثال(٣,٥)

أوجد الدالة المولدة لعدد المجموعات الجزئية من السعة r المأخوذة من مجموعة سعتها n.

الحل

المتتالية (a_r) هي $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\cdots,\binom{n}{n},0,0,\cdots$ وعليه فإن الدالة المولدة هي

$$g(x)=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n=(1+x)^n$$

مثال(٣,٦)

أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة

. $X_1+2X_2+3X_3+4X_4=30$

الحل

لكل $1\le i\le 4$ ضع $Y_i=iX_i$. ومنه $Y_1+Y_2+Y_3+Y_4=30$. أي أن الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1+2X_2+3X_3+4X_4=30$ هي نفسها الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة للمعادلة $Y_1+Y_2+Y_3+Y_4=30$ حيث

$Y_1=0,1,2,\ldots,k,\ldots$ و $Y_2=0,2,4,\ldots,2k,\ldots$ و $Y_3=0,3,6,\ldots,3k,\ldots$

و $Y_4=0,4,8,\ldots,4k,\ldots$. من مبرهنة(٣,١)، الدالة المولدة هي

$$g(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)$$

مثال(٣,٧)

أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2+X_3=10$ إذا كان $X_i=0,2,4,\cdots$ لكل $i=1,2,3$.

الحل

من مبرهنة(٣,١)، الدالة المولدة هي $g(x)=(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)^3$.

مثال(٣,٨)

أوجد الدالة المولدة لعدد طرق اختيار أربعة أعداد غير متعاقبة من بين الأعداد $1,2,\ldots,n$.

الحل

افرض أن $1 \le n_1 < n_2 < n_3 < n_4 \le n$ أعداد غير متعاقبة. لتكن

$$X_1 = n_1, X_2 = n_2 - n_1, X_3 = n_3 - n_2, X_4 = n_4 - n_3, X_5 = n - n_4$$

لاحظ أن $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = n$. كذلك $X_1 \ge 1$ و$X_5 \ge 0$. بما أن الأعداد غير متعاقبة فإن $X_i \ge 2$ لكل $2 \le i \le 4$. عليه، أي حل صحيح للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = n$ بحيث $X_1 \ge 1$ و$X_5 \ge 0$ و$X_i \ge 2$ لكل $2 \le i \le 4$ يعطي أربعة أعداد غير متعاقبة والعكس صحيح. من مبرهنة(٣,١)، الدالة المولدة هي $g(x) = (x + x^2 + \cdots)(x^2 + x^3 + \cdots)^3 (1 + x + x^2 + \cdots)$.

إن استخراج a_r من الدالة المولدة $g(x)$ يتطلب أحياناً إيجاد مفكوك عبارات من الشكل $(1 + x + x^2 + \cdots)^n$ ومن الشكل $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1})^n$. وهذا ما تفصِّله المبرهنة التالية.

مبرهنة(٣,٢)

لكل عدد صحيح $n \ge 0$ فإن:

(أ) $$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$$

(ب) $$(1-x^m)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} x^{rm}$$

(ج) $$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

(د) $$(1+x+x^2+\cdots)^n=(1-x)^{-n}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+n-1}{r}x^r$$

(هـ) $$(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n=(1-x^m)^n(1-x)^{-n}$$

(و) $$(\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^r)(\sum_{r=0}^{\infty}b_r x^r)=\sum_{r=0}^{\infty}(a_0b_r+a_1b_{r-1}+\cdots+a_rb_0)x^r$$

البرهان

باستخدام مبرهنة ذات الحدين نحصل بسهولة على كل من (أ) و(ب). وتم إثبات (د) في نتيجة(٣,١) وبعد مبرهنة(٥،١) مباشرةً وأما (و) فهي تعريف حاصل ضرب متسلسلتي قوى. وأخيراً فإن $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})=1-x^m$ تؤدي إلى (هـ).

مثال(٣,٩)

أوجد معامل x^{20} في مفكوك $(x^3+x^4+\cdots)^3$.

الحل

$$(x^3+x^4+\cdots)^3=(x^3(1+x+x^2+\cdots))^3=x^9(1+x+x^2+\cdots)^3=x^9(1-x)^{-3}$$
$$=x^9\left\{\binom{3-1+0}{0}+\binom{3-1+1}{1}x+\cdots+\binom{3-1+k}{k}x^k+\cdots\right\}$$

ومنه معامل x^{20} يساوي

$$\binom{3-1+11}{11}=\binom{13}{11}=\binom{13}{2}=78$$

مثال(٣,١٠)

أوجد معامل x^9 في مفكوك $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4$.

الحل

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4=\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4=(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$$

$$=\left\{\binom{4}{0}-\binom{4}{1}x^6+\binom{4}{2}x^{12}-\binom{4}{3}x^{18}+\binom{4}{4}x^{24}\right\}\left\{\binom{4-1+0}{0}+\binom{4-1+1}{1}x+\cdots\right\}$$

ومنه معامل x^9 يساوي

$$\binom{4}{0}\binom{4-1+9}{9}-\binom{4}{1}\binom{4-1+3}{3}=\binom{12}{9}-4\binom{6}{3}=220-80=140$$

مثال(٣,١١)

جد عدد طرق الحصول على المجموع 9 عند رمي ثلاثة أحجار نرد مختلفة.

الحل

لكل $i=1,2,3$ ليكن X_i هو العدد الذي يظهر على الحجر رقم i. عليه، العدد المطلوب هو عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2+X_3=9$ بحيث $1\le X_i\le 6$. ليكن a_r هو عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2+X_3=r$ بحيث $1\le X_i\le 6$. من مبرهنة(٣,١)، الدالة المولدة للمتتالية (a_r) هي $g(x)=(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$. وبالتالي فإن العدد المطلوب هو a_9 ويمكن حسابه كما يلي:

$$g(x)=(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3=x^3(1+x+\cdots+x^5)^3=x^3\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^3$$

$$=x^3\frac{(1-x^6)^3}{(1-x)^3}=x^3(1-x^6)^3(1-x)^{-3}=x^3(1-3x^6+3x^{12}-x^{18})\sum_{r=0}^{\infty}\binom{3-1+r}{r}x^r$$

$$=(x^3-3x^9+3x^{15}-x^{21})\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+2}{r}x^r$$

ومنه

$$a_9 = \binom{6+2}{6} - 3\binom{0+2}{0} = \binom{8}{6} - 3\binom{2}{0} = 28 - 3 = 25$$

مثال(٣,١٢)

جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + 2X_2 + 5X_3 = 20$ **بحيث** $X_i \geq 0$ **لكل** $i = 1,2,3$.

الحل

لنضع $Y_3 = 5X_3$ **و** $Y_2 = 2X_2$ **و** $Y_1 = X_1$. **فيكون العدد المطلوب هو عدد الحلول للمسألة**

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 20$$

$$Y_1 = 0,1,2,\ldots$$

$$Y_2 = 0,2,4,\ldots$$

$$Y_3 = 0,5,10,\ldots$$

إذن المطلوب هو c_{20} **حيث** c_r **هو عدد الحلول الصحيحة للمسألة**

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = r$$

$$Y_1 = 0,1,2,\ldots$$

$$Y_2 = 0,2,4,\ldots$$

$$Y_3 = 0,5,10,\ldots$$

ولهذا الغرض نفرض أن $g(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r$ **هي الدالة المولدة للمتتالية** (c_r).

بالاستناد إلى مبرهنة(٣,١) نجد أن

$$g(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)$$
$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$$

إذن $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)} = \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r$

ضع $\frac{1}{(1-x)} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ و $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$

عندئذٍ $a_r = 1$ لكل $r = 0,1,2,\ldots$ ، $\frac{1}{(1-x)} = (1-x^2)\sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$ ،

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = (1-x^5)\sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r$$

إذن $\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = (1-x^2)\sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$ ، $\sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r = (1-x^5)\sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r$

وبالتالي فإن

$b_r = a_r + b_{r-2} = 1 + b_{r-2}$ لكل $r \ge 0$ ، $c_r = b_r + c_{r-5}$ لكل $r \ge 0$

حيث $b_r = c_r = 0$ عندما يكون $r < 0$.

وبالحساب المباشر نجد أن

$$b_0 = 1,\ b_5 = 3,\ b_{10} = 6,\ b_{15} = 8,\ b_{20} = 11$$

ومنه فإن

$$c_0 = 1,\ c_5 = 4,\ c_{10} = 10,\ c_{15} = 18,\ c_{20} = 29$$

وبالتالي فإن عدد حلول المسألة المعطاة هو $c_{20} = 29$.

لكل عدد صحيح $n \ge 0$ ، ليكن p_n هو عدد تجزئات n و$p_0 = 1$ اصطلاحاً. تزودنا المبرهنة التالية بالدالة المولدة للمتتالية (p_n) ؛ والجدير بالذكر أنه لا توجد طريقة سهلة معروفة لاستخراج p_n من هذه الدالة.

مبرهنة(٣,٣)

إذا كانت $g(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (p_n) ، فإنه يمكن كتابة $g(x)$ على شكل حاصل الضرب اللانهائي $g(x)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}$.

البرهان

لأي تجزئة للعدد n ولكل $1\le i\le n$ ، ليكن X_i هو عدد مرات ظهو ر العدد i في تلك التجزئة. إذن $1X_1+2X_2+\cdots+nX_n=n$ حيث $X_i\ge 0$ عدد صحيح لكل $1\le i\le n$. وبوضع $Y_i=iX_i$ لكل $1\le i\le n$ نجد أن p_n يساوي عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $Y_1+Y_2+\cdots+Y_n=n$ حيث $Y_i=o,i,2i,\ldots$ لكل $1\le i\le n$.

وبتطبيق مبرهنة(٣,١) نجد أن p_n يساوي معامل x^n في مفكوك $\prod_{k=1}^{n}(1-x^k)^{-1}$.

ومن الناحية الأخرى، لحساب معامل x^n في مفكوك $g(x)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}$ فإننا نهمل العوامل

$$(1-x^k)^{-1}=\frac{1}{1-x^k}=(1+x^k+x^{2k}+\cdots)$$

حيث $k>n$ ، وبالتالي فإننا نحسب معامل x^n في مفكوك $\prod_{k=1}^{n}(1-x^k)^{-1}$. وهكذا فإن p_n يساوي معامل x^n في مفكوك $g(x)$. إذن $g(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (p_n).

لكل عدد صحيح $n\ge 1$ ، ليكن e_n هو عدد تجزئات n التي أجزاؤها مختلفة وعددها زوجي وليكن o_n هو عدد تجزئات n التي أجزاؤها مختلفة وعددها فردي.

مثال(٣,١٣)

إذا كان $q_n = e_n - o_n$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$ و$q_o = 1$، فإنه يمكن كتابة الدالة المولّدة للمتتالية (q_n) على الشكل $g(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$.

البرهان

نجد بسهولة أن $g(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (a_n) حيث a_n هو عدد تجزئات n التي أجزاؤها مختلفة و$a_0 = 1$ (انظر تمرين ٣٠ في نهاية هذا البند). ولحساب معامل x^n في مفكوك $\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$ فإننا نهمل العوامل $(1-x^k)$ حيث $k > n$. وبالتالي فإننا نحسب معامل x^n في مفكوك $\prod_{k=1}^{n}(1-x^k)$. نلاحظ أن كل تجزئة للعدد n بحيث تكون أجزاؤها مختلفة وعددها r تساهم بالعدد $(-1)^r$ في معامل x^n. فمثلاً التجزئة $13 = 1+3+4+5$ تقابل الحد $(-x)(-x^3)(-x^4)(-x^5)$ في مفكوك $\prod_{k=1}^{13}(1-x^k)$ وبالتالي فهي تساهم بالعدد $(-1)^4$ في معامل x^{13}؛ أما التجزئة $13 = 2+4+7$ فإنها تقابل الحد $(-x^2)(-x^4)(-x^7)$ في مفكوك $\prod_{k=1}^{13}(1-x^k)$ وبالتالي فهي تساهم بالعدد $(-1)^3$ في معامل x^{13}. ولما كان $(-1)^m = 1$ لكل عدد زوجي m و$(-1)^t = -1$ لكل عدد فردي t فإنه ينتج أن معامل x^n في مفكوك $\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$ يساوي $e_n - o_n$.

مبرهنة(٣,٤)

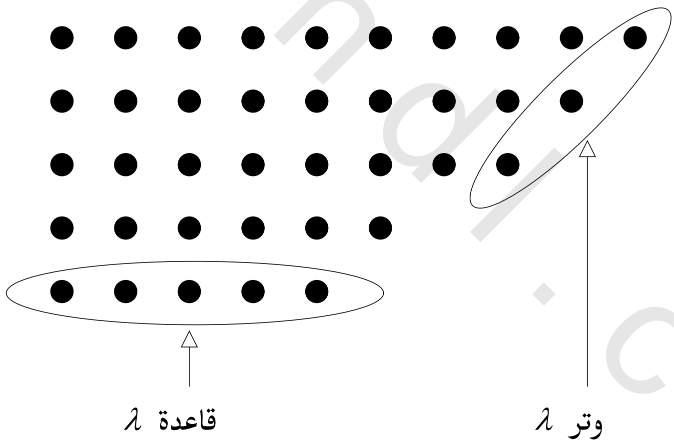
إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فإن

$$e_n - o_n = \begin{cases} (-1)^k & , n = \frac{k(3k\mp1)}{2} \\ 0 & , n \neq \frac{k(3k\mp1)}{2} \end{cases}$$

حيث k عدد صحيح موجب.

البرهان

لتكن S هي مجموعة تجزئات n التي أجزاؤها مختلفة. إذا كانت $\lambda \in S$ وكان F هو شكل فيريرز المصاحب لِـ λ فإننا نستخدم الرمز $b(\lambda)$ للدلالة على أصغر أجزاء λ ونسمي السطر المقابل لِـ $b(\lambda)$ في F قاعدة λ ؛ كما نستخدم الرمز $h(\lambda)$ للدلالة على طول أطول متتالية متناقصة حدودها أعداد صحيحة متعاقبة وحدها الأول هو أكبر أجزاء λ وحدودها الأخرى أجزاء لِـ λ ونسمي الخط المكون من النقاط الأخيرة في الأسطر المقابلة لحدود هذه المتتالية في F وتر λ. فمثلاً إذا كانت λ هي التجزئة $10+9+8+6+5$ فإن $b(\lambda)=5$ و $h(\lambda)=3$ ويوضح الشكل التالي كلا من وتر λ وقاعدة λ :



الآن، نعرّف العمليتين B و H على أشكال فيريرز كما يلي:

أولاً: إذا كان $b(\lambda) \le h(\lambda)$ وكان تقاطع وتر λ وقاعدة λ خالياً أو إذا كان $b(\lambda) \le h(\lambda)-1$ وكان تقاطع وتر λ وقاعدة λ غير خالٍ فإن العملية B تعني حذف قاعدة λ وتوزيع نقاطها نقطة نقطة على الأسطر العليا لتكون وتراً للشكل الناتج.

ثانياً: إذا كان $b(\lambda) > h(\lambda)$ وكان تقاطع وتر λ وقاعدة λ خالياً أو إذا كان $b(\lambda) \ge h(\lambda)+2$ وكان تقاطع وتر λ وقاعدة λ غير خالٍ فإن العملية H تعني حذف وتر λ وإضافة نقاطه أسفل قاعدة λ لتكون قاعدة للشكل الناتج.

بما أن إجراء B يتطلب أن يكون $b(\lambda) \le h(\lambda)$ وإجراء H يتطلب أن يكون $b(\lambda) > h(\lambda)$ فإنه يمكن على الأكثر إجراء إحدى العمليتين B و H على أي شكل F من أشكال فيريرز. ويمكن التحقق بسهولة من أنه إذا كان إجراء B على الشكل F ممكناً ويعطي الشكل F' فإن إجراء H على F' ممكن ويعطي F. وبالمثل إذا كان إجراء H على الشكل F ممكناً ويعطي الشكل F'' فإن إجراء B على F'' ممكن ويعطي F. ولما كانت كل من B و H تغير عدد الأجزاء بواحد فإن B و H تحدثان تقابلاً بين مجموعة التجزئات التي أجزاؤها مختلفة وعددها زوجي ومجموعة التجزئات التي أجزاؤها مختلفة وعددها فردي كلما كان إجراء B و H ممكناً. وبالتالي فإن $e_n - o_n = 0$ في هذه الحالة.

إذا كان $b(\lambda) \le h(\lambda)$ فإنه لا يمكن إجراء B في حالة واحدة فقط وذلك عندما يكون تقاطع وتر λ وقاعدة λ غير خالٍ و $b(\lambda) = h(\lambda)$. لتكن الحال كذلك و $b(\lambda) = h(\lambda) = k$. إذن

$$n = k + (k+1) + (k+2) + \cdots + (2k-1) = \frac{k(3k-1)}{2}$$

إذا كان $b(\lambda) > h(\lambda)$ ، فإنه لا يمكن إجراء H في حالة واحدة فقط وذلك عندما يكون تقاطع وتر λ وقاعدة λ غير خالٍ و $b(\lambda) - 1 = h(\lambda)$. لتكن الحال كذلك و $b(\lambda) - 1 = h(\lambda) = k$. إذن

$$n = (k+1) + (k+2) + (k+3) + \cdots + 2k = \frac{k(3k+1)}{2}$$

وبملاحظة أنه لا يوجد عددان صحيحان موجبان k', k'' بحيث $\frac{k''(3k''+1)}{2} = \frac{k'(3k'-1)}{2}$ فنجد أنه يمكن إحداث التقابل المذكور أعلاه بعد حذف شكل واحد عدد أسطره k من أشكال فيريرز عندما يكون $n = \frac{k(3k \mp 1)}{2}$.

وبالتالي فإن $e_n - o_n = (-1)^k$ في هذه الحالة. □

تنتج المتطابقة التالية مباشرة من مبرهنة(٣,٤) ومثال(٣,١٣).

مبرهنة(٣,٥) (متطابقة أويلر Euler's Identity)

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(x^{k(3k-1)/2} + x^{k(3k+1)/2}\right) \quad \square$$

بالاستناد إلى متطابقة أويلر ومبرهنة(٣,٣) نحصل على المتطابقة

$$\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(x^{k(3k-1)/2} + x^{k(3k+1)/2}\right)\right]\left[\sum_{r=0}^{\infty} p(r)x^r\right] = 1$$

وبعد حساب معامل x^n ، $n \geq 1$ من الطرف الأيسر لهذه المتطابقة ومساواته بالصفر نحصل على العلاقة الارتدادية

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - p(n-22) + p(n-26) + \cdots \quad \text{............ (*)}$$

التي يتكون طرفها الأيمن من عددٍ منتهٍ من الحدود $p(n-k)$ حيث $n-k \ge 0$.

ويمكن استخدام هذه العلاقة الارتدادية بفعالية لحساب $p(n)$ كما يوضح المثال التالي.

مثال(٣,١٤)

احسب $p(11)$.

الحل

$p(0)=1$ اصطلاحاً، وبالحساب المباشر نجد أن

$$p(1)=1,\ p(2)=2,\ p(3)=3,\ p(4)=5,\ \ p(5)=7$$

الآن، نستخدم العلاقة الارتدادية (*) لإنشاء الجدول التالي الذي يبين أن $p(11)=56$.

n	6	7	8	9	10	11
$p(n-1)$	7	11	15	22	30	42
$p(n-2)$	5	7	11	15	22	30
$p(n-5)$	1	2	3	5	7	11
$p(n-7)$	–	1	1	2	3	5
$p(n)$	11	15	22	30	42	56

المبرهنة التالية تبّين لنا كيف ننشئ دالة مولدة جديدة من دوال مولدة معطاة. وستظهر أهمية هذا الإنشاء في حل المسائل المتعلقة بإيجاد بعض المجاميع.

مبرهنة(٣,٦)

إذا كانت $g(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (a_n) و $h(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (b_n)، فإن:

(أ) $\frac{g(x)}{1-x}$ هي الدالة المولدة للمتتالية $(a_0+a_1+\cdots+a_n)$.

(ب) $C_1g(x)+C_2h(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية $(C_1a_n+C_2b_n)$، حيث C_1, C_2 ثابتان.

(ج) $(1-x)g(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (a_n-a_{n-1}).

(د) $xg'(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (na_n)، حيث $g'(x)$ هي مشتقة $g(x)$.

(هـ) $g(x)h(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية $(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)$ التي تسمى التفاف (convolution) المتتاليتين (a_n) و (b_n).

البرهان

يمكن للقارئ إثبات المطلوب بسهولة. وفيما يلي نقدم برهاناً للفقرة (د) على سبيل المثال.

بما أن $g(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ فإن $g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$. وبالتالي فإن $xg'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n$.

مثال(٣,١٥)

أوجد صيغة مختصرة للدالة المولدة للمتتالية (n^2).

الحل

الدالة المولدة للمتتالية (1) هي $\frac{1}{1-x}$ ومن فقرة (د) من مبرهنة(٣,٦) تكون الدالة المولدة للمتتالية (n) هي

$$x\left(\frac{1}{1-x}\right)'=x\frac{-(-1)}{(1-x)^2}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

من فقرة (د) من مبرهنة(٣,٦) تكون الدالة المولدة للمتتالية (n^2) هي

$$x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = x\left[\frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4}\right] = x\left[\frac{(1-x)+2x}{(1-x)^3}\right] = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

مثال(٣,١٦)

أوجد صيغة مختصرة للدالة المولدة للمتتالية $(n^2+\cdots+2^2+1^2+0^2)$. ثم جد $1^2+2^2+\cdots+n^2$.

الحل

من مثال(٣,١٥) وباستخدام الفقرة (أ) من مبرهنة(٣,٦) تكون الدالة المولدة للمتتالية $(n^2+\cdots+2^2+1^2+0^2)$ هي

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1-x)}\frac{x+x^2}{(1-x)^3} = \frac{x+x^2}{(1-x)^4} = (x+x^2)(1-x)^{-4}\\&= (x+x^2)\left[\binom{4-1+0}{0}+\binom{4-1+1}{1}x+\binom{4-1+2}{2}x^2+\cdots\right]\end{aligned}$$

ومنه معامل x^n يساوي

$$\binom{4-1+n-1}{n-1}+\binom{4-1+n-2}{n-2}=\binom{n+2}{n-1}+\binom{n+1}{n-2}=\binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{3}$$

$$=\frac{(n+2)(n+1)n}{3!}+\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

تمارين (٣,١)

١- أوجد الدالة المولدة للمتتالية $2,2,2,\cdots$.

٢- أوجد الدالة المولدة للمتتالية $2^0,2^1,2^2,\cdots$.

٣- أوجد معامل x^5 في مفكوك $(1+x+x^2+\cdots)(1+2x^2+3x^3+\cdots)$.

٤- ما هي الدالة المولدة لعدد المتتاليات الثنائية من الطول r؟

٥- ما هي الدالة المولدة لعدد المجموعات المضاعفة التي عدد عناصرها r والمأخوذة من المجموعة $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$؟

٦- ما هي الدالة المولدة لعدد المجموعات المضاعفة التي عدد عناصرها r والمأخوذة من المجموعة $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ بحيث يظهر كل عنصر على الأقل مرة واحدة؟

٧- أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2+X_3+X_4=r$ إذا كان $X_k>k$ لكل $k=1,2,3,4$.

٨- أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1+X_2+X_3+X_4+X_5=r$ إذا كانت X_1,X_3,X_5 أعداداً زوجية وكان X_2,X_4 عددين فرديين.

٩- أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2+X_3+X_4+X_5=r$ حيث $X_1+X_2=6$ و $X_k\ge 0$ لكل $k=1,2,\ldots,6$.

١٠- أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة للمعادلة $2X_1+3X_2+5X_3=r$ إذا كان $X_k>k$ لكل $k=1,2,3$.

١١- أوجد الدالة المولدة لعدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n صندوقاً مختلفاً بحيث لا يوجد صندوق خالٍ وعدد الكرات فردي في كل صندوق.

١٢- أوجد الدالة المولدة لعدد الأعداد الصحيحة غير السالبة التي هي أصغر من مائة ألف ومجموع أرقامها r.

١٣- أوجد الدالة المولدة لعدد طرق اختيار 3 من الأعداد المختلفة من بين الأعداد $1,2,\ldots,n$ بحيث لأي عددين x, y منها يكون $|x-y|>2$. ثم أوجد عدد طرق الاختيار في حالة $n=30$.

١٤- وضح لماذا $(1+x+x^2+\cdots+x^r)^3$ ليست الدالة المولدة لعدد المجموعات المضاعفة التي عدد عناصرها r والمأخوذة من المجموعة $\{x_1,x_2,x_3\}$؟ ما هي الدالة المولدة الصحيحة؟

١٥- وضح لماذا $(1+x+x^2+\cdots+x^r)^r$ ليست الدالة المولدة لعدد المجموعات المضاعفة التي عدد عناصرها r والمأخوذة من المجموعة $\{x_1,x_2,\ldots,x_r\}$؟

١٦- بيّن أن $g(x)=(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ هي الدالة المولدة للمتتالية (a_n) حيث $a_n=\binom{2n}{n}$.

١٧- ما هو معامل x^5 في مفكوك $(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^3+\cdots)$؟

١٨- أوجد معامل x^{12} في مفكوك $(1+x+x^2+\cdots)^3$.

١٩- أوجد معامل x^5 في مفكوك $(1+x+x^2+\cdots)^{10}$.

٢٠- أوجد معامل x^{24} في مفكوك $(x^3+x^4+\cdots+x^{12})^4$.

٢١- أوجد معامل x^6 في مفكوك $(x+x^2+\cdots)^3(1-x^3)^3$.

٢٢- أوجد معامل x^{10} في مفكوك $(x^3+x^4+\cdots)^3(x+x^2+\cdots+x^5)(1-x^5)^3$.

٢٣- أوجد معامل x^{10} في مفكوك $(x^2+x^3+\cdots)^3(x+x^2+x^3+x^4)(1-x^3)^3$.

٢٤- أوجد معامل x^5 في مفكوك $\dfrac{(1-x^2)^{12}}{(1-x)^3}$.

٢٥- أوجد معامل x^r في مفكوك $(1+x+x^2+\cdots)^r(1-x)^r$.

٢٦- أوجد صيغة مختصرة للدالة المولدة للمتتالية (a_n) حيث $a_n = n(n-1)$.

٢٧- أوجد صيغة مختصرة للدالة المولدة للمتتالية (a_n) حيث $a_n = n^2 3^n$.

٢٨- استخدم الدالة المولدة المطلوبة في تمرين ٢٦ لإيجاد صيغة مختصرة للمجموع $2\times 1 + 3\times 2 + \cdots + n(n-1)$.

٢٩- استخدم الدالة المولدة المطلوبة في تمرين ٢٧ لإيجاد صيغة مختصرة للمجموع $1^2 3 + 2^2 3^2 + \cdots + n^2 3^n$.

٣٠- لكل عدد صحيح $n \ge 0$ ، ليكن a_n هو عدد تجزئات $n > 0$ التي أجزاؤها مختلفة و $a_0 = 1$. أثبت أنه يمكن كتابة الدالة المولدة للمتتالية (a_n) على الشكل $g(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$.

(٣,٣) الدوال المولدة الأسية

تُعنى الدوال المولدة الأسية بعدد التباديل. في هذا البند سنستخدم بعض الخواص الجبرية والتحليلية لمتسلسلات القوى لإيجاد عدد التباديل.

مثال(٣,١٧)

كم عدد المتتاليات من الطول r المأخوذة من المجموعة $\{A, B\}$ التي تظهر فيها A مرة واحدة على الأكثر وتظهر فيها B مرة أو مرتين؟

الحل

من الجدول أدناه يتضح أن عدد المتتاليات يساوي $\frac{1!}{0!1!}$ إذا كان $r=1$ و $\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{0!2!}$ إذا كان $r=2$ و $\frac{3!}{1!2!}$ إذا كان $r=3$.

العدد	عدد مرات ظهور B	عدد مرات ظهور A
$\frac{1!}{0!1!}$	1	1
$\frac{2!}{0!2!}$	2	0
$\frac{2!}{1!1!}$	1	1
$\frac{3!}{1!2!}$	2	1

مثال(٣,١٨)

أوجد مفكوك $\left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}\right)\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)$

الحل

$$g(x)=\left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}\right)\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)=\frac{x}{0!1!}+\left(\frac{1}{0!2!}+\frac{1}{1!1!}\right)x^2+\frac{x^3}{1!2!}$$

لاحظ أن معامل x^i في $g(x)$ مضروباً في $i!$ يساوي عدد المتتاليات من الطول i في مثال(٣,١٧) لكل $i=1,2,3$. يمكن تعميم هذه الملاحظة كما في المبرهنة التالية.

مبرهنة(٣,٧)

ليكن a_r هو عدد تباديل $r=r_1+r_2+\cdots+r_n$ شيئاً مأخوذاً من n نوعاً من الأشياء بشرط أن عدد العناصر r_i المأخوذة من النوع i يحقق $r_i=\alpha_{i,1},\alpha_{i,2},\ldots$ لكل $i=1,2,\ldots,n$. إن الدالة المولدة الأسية للمتتالية (a_r) هي

$$g(x)=(\frac{x^{\alpha_{1,1}}}{\alpha_{1,1}!}+\frac{x^{\alpha_{1,2}}}{\alpha_{1,2}!}+\cdots)(\frac{x^{\alpha_{2,1}}}{\alpha_{2,1}!}+\frac{x^{\alpha_{2,2}}}{\alpha_{2,2}!}+\cdots)\cdots(\frac{x^{\alpha_{n,1}}}{\alpha_{n,1}!}+\frac{x^{\alpha_{n,2}}}{\alpha_{n,2}!}+\cdots)$$

البرهان

إن حداً نمطياً في مفكوك $g(x)$ قبل التبسيط وتجميع الحدود المتشابهة يكون على الشكل المرتب

$$\frac{x^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\cdot\frac{x^{\alpha_2}}{\alpha_2!}\cdot\cdots\cdot\frac{x^{\alpha_n}}{\alpha_n!}$$

حيث الحد $\frac{x^{\alpha_i}}{\alpha_i!}$ مأخوذ من العامل $(\frac{x^{\alpha_{i,1}}}{\alpha_{i,1}!}+\frac{x^{\alpha_{i,2}}}{\alpha_{i,2}!}+\cdots)$ لكل $i=1,2,\ldots,n$. وبعد التبسيط يكون الحد النمطي على الشكل $\frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$ وللحصول على $\frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}x^r$ لا بد أن يكون $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=r$ وبالتالي فإن معامل $\frac{x^r}{r!}$ في مفكوك $g(x)$ يساوي $\sum\frac{r!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$ حيث المجموع مأخوذ على جميع العديدات $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ من النوع n التي تحقق $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=r$ وتحقق $\alpha_i\in\{\alpha_{i,1},\alpha_{i,2,\ldots}\}$ لكل $i=1,2,\ldots,n$. وكما نعلم من مبرهنة(١,٦) فإن عدد تباديل $r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ شيئاً مأخوذاً من n نوعاً من الأشياء بشرط أن عدد الأشياء المأخوذة من النوع i يساوي α_i هو $\frac{r!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$. إذن معامل $\frac{x^r}{r!}$ في مفكوك $g(x)$ يساوي a_r. وبالتالي فإن $g(x)$ هي الدالة المولدة الأسية للمتتالية (a_r).

مثال(٣,١٩)

كم عدد طرق ترتيب 7 حروف مأخوذة من المجموعة $\{A, B, C\}$ إذا كان عدد مرات ظهور A هو 2 أو 3 أو 6 و عدد مرات ظهور B هو 1 أو 5 و عدد مرات ظهور C هو 0 أو 3 أو 7.

الحل

من مبرهنة(٣,٧)، العدد المطلوب يساوي $7!$ مضروباً في معامل x^7 في مفكوك الدالة

$$g(x) = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!}\right)\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!}\right)$$

معامل x^7 في $g(x)$ يساوي $\frac{1}{2!5!} + \frac{1}{3!1!3!} + \frac{1}{6!1!}$؛ ومنه فالعدد المطلوب يساوي

$$\frac{7!}{2!5!} + \frac{7!}{3!1!3!} + \frac{7!}{6!1!} = 168$$

مثال(٣,٢٠)

أوجد الدالة المولدة الأسية لعدد التباديل من الطول r المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n.

الحل

عدد التباديل من الطول r المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n يساوي $(n)_r$ ومنه فإن الدالة المولدة الأسية المطلوبة هي

$$g(x) = \frac{(n)_0}{0!} + \frac{(n)_1}{1!}x + \frac{(n)_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(n)_n}{n!}x^n$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$$

ملاحظـة: يتـضح مـن مثـال(٣,٥) و مثـال(٣,٢٠) أن $(1+x)^n$ هـي الدالـة المولـدة العادية لعدد التوافيق من الطول r المأخوذة مـن مجموعـة عـدد عناصـرها n وأنهـا نفسها هي الدالة المولدة الأسية لعدد التباديل مـن الطـول r المـأخوذة مـن مجموعـة عدد عناصرها n.

إن استخراج a_r من الدالـة المولـدة الأسـية يتطلـب أحيانـاً إيجـاد مفكـوك عبارات تحتوي على دوال أسية. ونقدم في المبرهنة التالية بعض العلاقـات المفيـدة في هذا المجال.

مبرهنة(٣,٨)

(أ) $$(e^x)^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k x^k}{k!} = e^{nx}$$

(ب) $$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(ج) $$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

البرهان

يمكن للقارئ إثبات المطلوب بسهولة. وفيما يلي نقدم برهاناً جبرياً وآخر تركيبياً للفقرة (أ).

(١) البرهان الجبري:

$$(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots)^n = (e^x)^n = e^{nx} = 1+\frac{nx}{1!}+\frac{n^2x^2}{2!}+\cdots+\frac{n^kx^k}{k!}+\cdots$$

(٢) البرهان التركيبي: ليكن a_k هو عدد المتتاليات من الطول k المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n، ولتكن $g(x)$ هي الدالة المولدة الأسية للمتتالية (a_k). نجد $g(x)$ بطريقتين مختلفتين. ينتج من مبرهنة(٣,٧) أن

$$g(x) = (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots)^n$$

ومن ناحية أخرى، نعلم من بند (١,٣) أن $a_k = n^k$. إذن،

$$g(x) = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n^2x^2}{2!} + \cdots + \frac{n^kx^k}{k!} + \cdots$$

وبالتالي فإن

$$(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n^2x^2}{2!} + \cdots$$

مثال(٣,٢١)

كم عدد المتتاليات الثنائية من الطول r والتي تحوي عدداً فردياً من الأصفار؟

الحل

الدالة المولدة الأسية لعدد المتتاليات المطلوب هي

$$g(x) = (\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots)(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots)$$

$$= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]e^x = \frac{e^{2x} - 1}{2} = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}$$

ومنه معامل x^r في $g(x)$ يساوي $\frac{2^{r-1}}{r!}$. ومن مبرهنة(٣,٧)، العدد المطلوب يساوي 2^{r-1}.

مثال(٣,٢٢)

كم عدد المتتاليات من الطول r المأخوذة من المجموعة $\{1,2,3,4\}$ والتي يظهر فيها كل من $1,2,4$ مرة واحدة على الأقل؟

الحل

الدالة المولدة الأسية للعدد المطلوب هي

$$g(x)=(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots)(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots)^3=e^x(e^x-1)^3$$

$$=e^x\left[e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1\right]=e^{4x}-3e^{3x}+3e^{2x}-e^x$$

وعليه فإن معامل x^r في مفكوك $g(x)$ يساوي $\frac{4^r}{r!}-3\frac{3^r}{r!}+3\frac{2^r}{r!}-\frac{1}{r!}$. ومن مبرهنة(٣,٧)، العدد المطلوب يساوي $4^r-3^{r+1}+3.2^r-1$.

وفي ختام هذا الفصل نشير إلى أن الدوال المولدة تؤدي دوراً مهماً في معالجة موضوع العلاقات الارتدادية وسنرى ذلك بشيء من التفصيل في فصل قادم.

تمارين (٣,٢)

١- كم عدد طرق ترتيب 4 من حروف كلمة ENGINE؟

٢- أوجد الدالة المولدة الأسية لعدد الكلمات من الطول r والمأخوذة حروفها من الأبجدية $\{a,b,c,d\}$.

٣- أوجد الدالة المولدة الأسية للمتتالية $(r!)$.

٤- أوجد الدالة المولدة الأسية للمتتالية $(a_r)=(1/r)$ حيث $a_0=0$.

٥- أوجد الدالة المولدة الأسية لعدد طرق توزيع r شخصاً على n غرفة مختلفة بحيث لا يقل عدد الأشخاص في الغرفة الواحدة عن اثنين ولا يزيد عن خمسة.

٦- أوجد الدالة المولدة الأسية لعدد الكلمات من الطول $r \geq 0$ والمأخوذة حروفها من الكلمات التالية:

(أ) MISSISSIPPI

(ب) HAWAII

(ج) ISOMORPHISM

٧- أوجد حل فقرة (أ) من تمرين ٦ عندما تظهر I في الكلمة مرتين على الأقل.

إذا كانت $g(x)$ هي الدالة المولدة الأسية للمتتالية (a_n) و $h(x)$ هي الدالة المولدة الأسية للمتتالية (b_n) فأثبت أن $g(x)h(x)$ هي الدالة المولدة الأسية للمتتالية (c_n) حيث $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$. تسمى c_n التفاف ذات الحدين (binomial convolution) للمتتاليتين (a_n) و (b_n).