الفصل الثاني

مبدأ التضمين والإقصاء
THE INCLUSION-EXCLUSION PRINCIPLE

يعتبر مبدأ المجموع للعدّ أبسط مبادئ العد الأساسية، ويفيدنا بأنه إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات منتهية منفصلة زوجاً زوجاً، فإن $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$. ومبدأ التضمين والإقصاء – في أبسط صوره – يعطينا صيغة لحساب $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$ عندما نسمح للمجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ أن تكون متشابكة.

فيما يلي سنفرض أن U مجموعة شاملة منتهية معطاة وأن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات جزئية من U، ولكل $i = 1,2,\ldots,n$ نضع $\alpha_i = \sum \left| \bigcap_{k=1}^{i} A_{j_k} \right|$ حيث يؤُخذ المجموع على جميع المجموعات الجزئية الممكنة $\{j_1, j_2, \ldots, j_i\} \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$.

مبرهنة(٢,١) (مبدأ التضمين والإقصاء)

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \cdots + (-1)^{n-1} \alpha_n$$

البرهان

ليكن $x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. عند حساب $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$ فإن x يُعدّ مرة واحدة، ويختلف الأمر عند حساب كل من $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. سنثبت أن إسهام x في حساب العدد $\alpha_1 - \alpha_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_n$ يساوي 1. نفرض أن x ينتمي فقط إلى المجموعات $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m}$. إذن إسهام x في حساب العدد $\alpha_1 = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$ يساوي m. كذلك، إن إسهام x في حساب العدد $\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_1 \cap A_n| + |A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|$ يساوي $\binom{m}{2}$؛ لأن إسهام x في حساب $|A_i \cap A_j|$ يساوي 0 في حالة $\{i, j\} \not\subset \{j_1, \ldots, j_m\}$ ويساوي 1 في حالة $\{i, j\} \subseteq \{j_1, \ldots, j_m\}$. وبالمثل فإن إسهام x في حساب العدد α_i يساوي $\binom{m}{i}$ لكل $1 \le i \le n$. إذن، إن إسهام x في حساب العدد $\alpha_1 - \alpha_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_n$ يساوي $\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}$؛ لأن $\binom{m}{i} = 0$ لكل $m < i \le n$. ولكن باستخدام مبرهنة ذات الحدين نعلم أن $1 = \binom{m}{0} = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}$ وهذا يتم البرهان. □

في كثير من المسائل، نحسب عدد العناصر التي لا تنتمي إلى أي من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_m$ مستخدمين النتيجة التالية لمبدأ التضمين والإقصاء.

نتيجة(٢,١)

إذا كانت U مجموعة شاملة منتهية وكانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات جزئية من U، فإن $|U - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = |U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots + (-1)^n \alpha_n$.

والآن نستند إلى مبدأ التضمين والإقصاء ونتيجته ونقدم مجموعة من المبرهنات والأمثلة المتنوعة.

مبرهنة(٢,٢)

عدد التطبيقات الشاملة من المجموعة $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ إلى المجموعة $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ ، حيث $m\geq n$ ، يساوي

$$n^m-\binom{n}{1}(n-1)^m+\binom{n}{2}(n-2)^m-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^m=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$$

البرهان

لتكن U هي مجموعة التطبيقات من A إلى B. ضع $A_k=\{f\in U: b_k\notin R(f)\}$ لكل $1\leq k\leq n$، حيث $R(f)$ ترمز إلى مدى f. إذن، المطلوب حساب العدد $|U-(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)|$. واضح أن $|U|=n^m$. الآن نحسب α_1 من العلاقة $\alpha_1=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|$. من تعريف A_k ينتج أن $|A_k|$ يساوي عدد التطبيقات من A إلى $B\setminus\{b_k\}$ ، وبالتالي فإن $|A_k|=(n-1)^m$ لكل $1\leq k\leq n$. إذن $\alpha_1=n(n-1)^m$. لحساب $\alpha_2=|A_1\cap A_2|+\cdots+|A_1\cap A_n|+|A_2\cap A_3|+\cdots+|A_{n-1}\cap A_n|$ نلاحظ أن $|A_i\cap A_j|$، حيث $1\leq i<j\leq n$ ، يساوي عدد التطبيقات من A إلى $B\setminus\{b_i,b_j\}$ ؛ وبالتالي فإن $|A_i\cap A_j|=(n-2)^m$. إذن، $\alpha_2=\binom{n}{2}(n-2)^m$

وبالمثل نجد أن $\alpha_k=\binom{n}{k}(n-k)^m$ لكل $1\leq k\leq n$. إذن،

$$|U-(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)|=|U|-\alpha_1+\alpha_2-\cdots+(-1)^n\alpha_n$$

$$= n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^m$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^m. \ \square$$

إذا كان $f:\{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ تبديلاً، فإننا نقول إنه **تبديل تام** (derangement) إذا تحقق الشرط التالي: $f(i) \neq i$ لكل $1 \le i \le n$. نرمز لزمرة تناظر المجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ بالرمز S_n ولعدد تباديلها التامة بالرمز d_n.

مبرهنة(٢,٣)

إن عدد التباديل التامة للمجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ يساوي
$$d_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

البرهان

ضع $U = S_n$، ولكل $1 \le k \le n$ ضع $A_k = \{f \in S_n : f(k) = k\}$. إذن المطلوب حساب العدد $|U - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)|$. نعلم أن $|U| = |S_n| = n!$. الآن نحسب α_1 من العلاقة $\alpha_1 = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$. من تعريف A_k ينتج أن $|A_k|$ يساوي عدد تباديل المجموعة $\{1,2,\ldots,n\} \setminus \{k\}$، وبالتالي فإن $|A_k| = (n-1)!$ لكل $1 \le k \le n$. إذن $\alpha_1 = n((n-1)!) = \frac{n!}{1!}$. لحساب $\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_1 \cap A_n| + |A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|$ نلاحظ أن $|A_i \cap A_j|$، حيث $1 \le i < j \le n$، يساوي عدد تباديل المجموعة $\{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i,j\}$، وبالتالي فإن $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$. إذن

$\alpha_2 = \binom{n}{2}\left((n-2)!\right) = \dfrac{n!}{2!}$. وبالمثل نجد أن $\alpha_k = \binom{n}{k}((n-k)!) = \dfrac{n!}{k!}$ لكل $1 \le k \le n$. إذن

$$|U-(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = |U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots + (-1)^n \alpha_n$$
$$= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \ \square$$

نلاحظ أن $\dfrac{d_n}{n!} = 1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{n!} \approx e^{-1} \approx 0.368$ من أجل قيم n الكبيرة. أي، إن عدد التباديل التامة للمجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ يساوي $\dfrac{1}{3}$ عدد تباديلها تقريباً.

مثال(٢,١)

نقول إن التبديل $f \in S_n$ خالٍ من التعاقب إذا حقق الشرط التالي: $f(j+1) \ne f(j)+1$ لكل $1 \le j < n$. نريد حساب عدد التباديل الخالية من التعاقب، والذي نرمز له بالرمز q_n. لأجل ذلك ضع $U = S_n$، ولكل $1 \le k < n$ لتكن A_k هي مجموعة التباديل $f \in S_n$ التي تحقق $f(j) = k, f(j+1) = k+1$ لإحدى قيم $1 \le j < n$.

إذن المطلوب حساب العدد $q_n = |U-(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1})|$.
وابتغاءً للسهولة، نستخدم الآن لغة الأنساق للحديث عن التباديل. نلاحظ أن تبديلاً ما ينتمي إلى المجموعة A_1 إذا وفقط إذا كان يحتوي على النسق 12. وبالتالي فإنه يوجد تقابل من A_1 إلى مجموعة تباديل مجموعة الرموز $\{12,3,4,\ldots,n\}$. إذن $|A_1| = (n-1)!$. بالمثل نجد أن $|A_k| = (n-1)!$ لكل $1 \le k < n$. وهكذا فإن $\alpha_1 = (n-1)((n-1)!)$. الآن، نحسب

$\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_1 \cap A_n| + |A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1}|$. نلاحظ أنه إذا كان $f \in A_1 \cap A_2$ فإن f يحتوي على النسقين 23 و 12؛ أما إذا كان $f \in A_1 \cap A_3$ فإن f يحتوي على النسقين 34 و 12. في الحالة الأولى يحتوي النسقان 23 و 12 على العنصر المشترك 2، وبالتالي فإن كل $f \in A_1 \cap A_2$ يحتوي على النسق 123. إذن $|A_1 \cap A_2|$ يساوي عدد تباديل المجموعة $\{123,4,5,\ldots,n\}$. أي، $|A_1 \cap A_2| = (n-2)!$. وفي الحالة الثانية لا يحتوي النسقان 34 و 12 على أي عنصر مشترك. إذن $|A_1 \cap A_3|$ يساوي عدد تباديل المجموعة $\{12,34,5,6,\ldots,n\}$. أي، $|A_1 \cap A_3| = (n-2)!$. وبالمثل نجد أن $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ لكل $1 \le i < j < n-1$. وبالتالي فإن $\alpha_2 = \binom{n-1}{2}((n-2)!)$.

وبشكل عام نجد أن $\alpha_k = \binom{n-1}{k}((n-k)!)$ لكل $1 \le k \le n-1$. إذن

$$q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$$

ولكن

$$\binom{n-1}{k}(n-k)! = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \cdot (n-k)! = (n-1)!\frac{n-k}{k!}$$

إذن

$$q_n = n! - (n-1)!\,\frac{n-1}{1!} + (n-1)!\,\frac{n-2}{2!} - \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{(n-1)!}$$
$$= (n-1)!\left[n - \frac{n-1}{1!} + \frac{n-2}{2!} - \frac{n-3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right]$$
$$= (n-1)!\left[n - \frac{n}{1!} + \frac{n}{2!} - \frac{n}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n}{(n-1)!} + (-1)^n\frac{n}{n!}\right] +$$

$$(n-1)!\left[\frac{1}{1!}-\frac{2}{2!}+\frac{3}{3!}-\frac{4}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n-1}{(n-1)!}-(-1)^n\frac{n}{n!}\right]$$

$$=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]+(n-1)!\left[1-\frac{1}{1!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right]=d_n+d_{n-1}$$

ونلاحظ أن

$$\frac{q_n}{n!}=\frac{d_n}{n!}+\frac{d_{n-1}}{n!}=\frac{d_n}{n!}+\frac{1}{n}\cdot\frac{d_{n-1}}{(n-1)!}\approx\frac{1}{e}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{e}=\frac{n+1}{en}$$

مثال(٢,٢)

جد عدد الأعداد الصحيحة x بحيث $1\le x\le 500$، 5 لا يقسم x، 6 لا يقسم x، 8 لا يقسم x.

الحل

ضع $U=\{1,2,\ldots,500\}$ وضع $A_1=\{x\in U:5|x\}$ و $A_2=\{x\in U:6|x\}$ و $A_3=\{x\in U:8|x\}$ فيكون المطلوب حساب العدد $|U-(A_1\cup A_2\cup A_3)|$.

نلاحظ أن $|A_1|=\left\lfloor\frac{500}{5}\right\rfloor=100$، $|A_2|=\left\lfloor\frac{500}{6}\right\rfloor=83$، $|A_3|=\left\lfloor\frac{500}{8}\right\rfloor=62$.

وكما هو معلوم فإن $a\,|\,n$ و $b\,|\,n$ إذا وفقط إذا كان $lcm(a,b)\,|\,n$؛ لذلك نجد أن $|A_1\cap A_2|=\left\lfloor\frac{500}{30}\right\rfloor=16$، $|A_1\cap A_3|=\left\lfloor\frac{500}{40}\right\rfloor=12$، $|A_2\cap A_3|=\left\lfloor\frac{500}{24}\right\rfloor=20$، $|A_1\cap A_2\cap A_3|=\left\lfloor\frac{500}{120}\right\rfloor=4$. وبالتالي فإن

$$|U-(A_1\cup A_2\cup A_3)|=|U|-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$$
$$=500-(100+83+62)+(16+12+20)-4=299$$

مثال(٢,٣)

احسب $\varphi(40)$. أي، احسب قيمة دالة أويلر φ عند العدد 40.

الحل

نلاحظ أن $40 = (2^3)(5)$ ونضع $U = \{1,2,\ldots,40\}$ ، $A_1 = \{x \in U : 2|x\}$ و $A_2 = \{x \in U : 5|x\}$. إذن

$$\varphi(40) = |U| - (|A_1| + |A_2|) + |A_1 \cap A_2| = 40 - \left(\left\lfloor \frac{40}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{40}{5} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{40}{10} \right\rfloor$$

$$= 40 - (20 + 8) + 4 = 16$$

وهكذا يمكن حساب $\varphi(n)$ عندما نعلم تحليل n إلى عوامله الأولية.

مثال(٢,٤)

جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 = 13$ بحيث $0 \le X_1 \le 6$ ، $0 \le X_2 \le 9$ ، $0 \le X_3 \le 3$.

الحل

نفرض أن U مجموعة الحلول الصحيحة بحيث $X_i \ge 0$ لكل $1 \le i \le 3$ ، وأن A_1 مجموعة الحلول الصحيحة بحيث $X_1 \ge 7$ ، $X_2 \ge 0$ ، $X_3 \ge 0$ ، وأن A_2 مجموعة الحلول بحيث $X_1 \ge 0$ ، $X_2 \ge 10$ ، $X_3 \ge 0$ ، وأن A_3 مجموعة الحلول بحيث $X_1 \ge 0$ ، $X_2 \ge 0$ ، $X_3 \ge 4$. إذن المطلوب حساب العدد $\left|U - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)\right|$.

واضح أن $105 = \binom{3-1+13}{13} = |U|$. وبالمثل نجد أن

$28 = \binom{3-1+13-7}{13-7} = |A_1|$ ، $10 = \binom{3-1+13-10}{13-10} = |A_2|$ ،

$$|A_1 \cap A_2| = 0 \;،\; |A_3| = \binom{3-1+13-4}{13-4} = 55 \;،$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0 \;،\; |A_2 \cap A_3| = 0 \;،\; |A_1 \cap A_3| = \binom{3-1+13-7-4}{13-7-4} = 6$$

وبالتالي فإن

$$|U-(A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = 105-(28+10+55)+(0+6+0)-0 = 18 \quad \square$$

ينتج من تعريف اتحاد المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ أن مبدأ التضمين والإقصاء يُعيّن عدد العناصر التي تنتمي على الأقل إلى واحدة من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$. وللحصول على تعميمين بسيطين لهذا المبدأ، نرمز لعدد العناصر التي تنتمي بالضبط إلى m مجموعة من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ بالرمز e_m، كما نستخدم الرمز l_m للدلالة على عدد العناصر التي تنتمي على الأقل إلى m مجموعة من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$. المبرهنة التالية تعطينا التعميمين المطلوبين.

مبرهنة(٢,٤)

(أ) $$e_m = \alpha_m - \binom{m+1}{m}\alpha_{m+1} + \binom{m+2}{m}\alpha_{m+2} + \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n}{m}\alpha_n$$

(ب) $$l_m = \alpha_m - \binom{m}{m-1}\alpha_{m+1} + \binom{m+1}{m-1}\alpha_{m+2} + \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n-1}{m-1}\alpha_n$$

البرهان

(أ) ليكن $x \in U$، حيث U المجموعة الشاملة. نفرض أن x ينتمي بالضبط إلى r مجموعة من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$. إذا كان $r < m$ فإن إسهام x في حساب كل من الأعداد $e_m, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ يساوي 0 وبالتالي فإن إسهام x في

حساب كل من طرفي المعادلة يساوي 0. وإذا كان $r = m$ فإن إسهام x في حساب كل من العددين e_m, α_m يساوي 1 وإن إسهام x في حساب كل من $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_n$ يساوي 0 ؛ وبالتالي فإن إسهام x في حساب كل من طرفي المعادلة يساوي 1. أخيراً، نفرض أن $m < r \leq n$. نلاحظ أن إسهام x في حساب e_m يساوي 0 ؛ كما أن إسهام x في حساب الأعداد $\alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_r, \ldots, \alpha_n$ يساوي $\binom{r}{m}, \binom{r}{m+1}, \ldots, \binom{r}{r}, 0, \ldots, 0$ على الترتيب. إذن يجب إثبات أن إسهام x في حساب الطرف الأيمن للمعادلة يساوي 0. أي يجب إثبات أن

$$\binom{r}{m} - \binom{m+1}{m}\binom{r}{m+1} + \binom{m+2}{m}\binom{r}{m+2} + \cdots + (-1)^{r-m}\binom{r}{m}\binom{r}{r} = 0$$

باستخدام العلاقة $\binom{r}{k}\binom{k}{t} = \binom{r}{t}\binom{r-t}{k-t}$ نجد أن

$$\binom{r}{m} - \binom{m+1}{m}\binom{r}{m+1} + \binom{m+2}{m}\binom{r}{m+2} + \cdots + (-1)^{r-m}\binom{r}{m}\binom{r}{r} =$$

$$= \binom{r}{m} - \binom{r}{m}\binom{r-m}{1} + \cdots + (-1)^{r-m}\binom{r}{m}\binom{r-m}{r-m}$$

$$= \binom{r}{m}\left[1 - \binom{r-m}{1} + \cdots + (-1)^{r-m}\binom{r-m}{r-m}\right] = \binom{r}{m}(1 + (-1))^{r-m} = 0$$

(ب) نلاحظ أولاً أن $l_m = e_m + l_{m+1}$ ، $l_n = e_n$ وبالتالي فإن $l_m = e_m + e_{m+1} + e_{m+2} + \cdots + e_n$. من ناحية أخرى، من تمرين ١٦ في تمارين (١,٢) نجد العلاقة

$$\binom{r}{k} - \binom{r}{k+1} + \binom{r}{k+2} - \binom{r}{k+3} + \cdots + (-1)^{r-k}\binom{r}{r} = \binom{r-1}{k-1}$$

التي تبسط لنا صيغة $l_m = e_m + e_{m+1} + e_{m+2} + \cdots + e_n$ الناتجة من (أ) إلى الشكل

$$l_m = \alpha_m - \binom{m}{m-1}\alpha_{m+1} + \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n-1}{m-1}\alpha_n$$

مثال(٢,٥)

نقول إن التبديل $f \in S_n$ يثبت العنصر $x \in \{1,2,\ldots,n\}$ عندما يكون $f(x) = x$. نستخدم الرمز $d_{n,m}$ للدلالة على عدد التباديل $f \in S_n$ التي تثبت بالضبط m عنصراً من العناصر $1,2,\ldots,n$. واضح أن $d_{n,m} = \binom{n}{m}d_{n-m}$ ؛ لأنه إذا كان f يثبت بالضبط m عنصراً فلا بد أن يصاحبه تبديل تام لِـ $n-m$ عنصراً. نريد حساب $d_{n,m}$. باستخدام (أ) من مبرهنة(٢,٣) والنقاش المتضمن في مثال (٢,١) نجد أن

$$\begin{aligned}
d_{n,m} &= e_m = \alpha_m - \binom{m+1}{m}\alpha_{m+1} + \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n}{m}\alpha_n \\
&= \binom{n}{m}(n-m)! - \binom{m+1}{m}\binom{n}{m+1}(n-m-1)! + \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n}{m} \\
&= \binom{n}{m}\left[(n-m)! - \binom{n-m}{1}(n-m-1)! + \cdots + (-1)^{n-m}\right] = \binom{n}{m}d_{n-m}
\end{aligned}$$

مثال(٢,٦)

أثبت بطريقة تركيبية أن $n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k}2^{n-k}$.

الحل

نفرض أن $U = \{x_1x_2\ldots x_n : x_i \in \{0,1\}\ \forall\ i = 1,2,\ldots,n\}$ ولكل $i = 1,2,\ldots,n$ نفرض أن $A_i = \{x_1x_2\ldots x_n \in U\ : x_i = 0\}$. نحسب عدد المتتاليات التي تحتوي بالضبط على 0 واحد. أولاً، لكل $i = 1,2,\ldots,n$ توجد متتالية واحدة بحيث يكون

0 حدها رقم i بينما تكون حدودها الأخرى 1. إذن عدد المتتاليات المطلوبة يساوي n. ثانياً، حسب (أ) من مبرهنة(٣،٢) فإن عدد هذه المتتاليات يساوي

$$e_1 = \alpha_1 - \binom{2}{1}\alpha_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{1}\alpha_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\alpha_k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k}2^{n-k}$$

إذن
$$n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k}2^{n-k}$$

ونلاحظ أنه يمكن الحصول على العلاقة السابقة بطريقة غير تركيبية كما يلي:

من مبرهنة ذات الحدين نجد أن

$$(x+2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k 2^{n-k}$$

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى x نجد أن

$$n(x+2)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}2^{n-k}$$

وعندما يكون $x = -1$ نحصل على

$$n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(-1)^{k-1}2^{n-k}.$$

تمارين

١- أظهر استعراض لتسجيل 100 من الطلاب أن 32 طالباً مسجلون في المقرر أ، 44 طالباً مسجلون في المقرر ب، 47 طالباً مسجلون في المقرر ج، 11 طالباً مسجلون في المقررين ب و ج، 12 طالباً مسجلون في المقررين أ و ج، 12 طالباً

مسجلون في المقررين أ و ب، و أن 3 طلاب مسجلون في المقررات الثلاثة. جد عدد الطلاب غير المسجلين في أي من المقررات الثلاثة.

٢- أجريت اختبارات على 200 عينة من المياه الجوفية بهدف البحث عن وجود الأملاح أ، ب، ج فيها. فوجد أن 14 عينة تحتوي على الملح أ، 10 عينات تحتوي على الملح ب، 8 عينات تحتوي على الملح ج، 6 عينات تحتوي على الملحين أ و ب، 6 عينات تحتوي على الملحين ب و ج، 4 عينات تحتوي على الملحين أ و ج، وعينتان تحتويان على الملحين أ و ب ولا تحتويان على الملح ج. جد عدد العينات التي تحتوي على الأقل على واحد من الأملاح الثلاثة.

٣- (أ) جد عدد تباديل $1,2,\ldots,11$ التي تترك كل عدد زوجي في موضعه الطبيعي وتجعل كل عدد فردي في غير موضعه الطبيعي.

(ب) ما هو عدد تباديل $1,2,\ldots,11$ التي تترك بالضبط 4 أعداد في أماكنها الطبيعية؟

(ج) جد عدد تباديل $1,2,\ldots,11$ التي تجعل كل عدد فردي في غير موضعه الطبيعي.

٤- جد عدد تباديل $1,2,\ldots,n$ التي تترك كل عدد زوجي في موضعه الطبيعي وتجعل كل عدد فردي في غير موضعه الطبيعي.

٥- جد عدد تباديل $1,2,\ldots,n$ التي تترك بالضبط k عدداً في أماكنها الطبيعية.

٦- جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 20$ بحيث يكون

(أ) $0 \le X_i \le 10$ لكل $i = 1,2,\ldots,5$.

(ب) $0 \le X_i \le 8$ لكل $i = 1,2,\dots,5$.

٧– جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 30$ بحيث يكون

(أ) $0 \le X_i \le 8$ لكل $i = 1,2,3,4$.

(ب) $-10 \le X_i \le 20$ لكل $i = 1,2,3,4$.

(ج) $0 \le X_4 \le 18$ ، $0 \le X_3 \le 15$ ، $0 \le X_2 \le 9$ ، $0 \le X_1 \le 6$.

٨– جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 = 30$ بحيث يكون $5 \le X_1 < 11$ ، $6 < X_2 \le 14$ ، $10 \le X_3 \le 24$.

٩– إذا كانت $A = \{1,2,\dots,999999\}$ ، فما هو عدد الأعداد التي تنتمي إلى A والتي مجموع أرقام كل منها يساوي 15؟

١٠– جد عدد المجموعات المضاعفة من السعة 15 المأخوذة من المجموعة $A = \left\{a_1, a_2, a_3\right\}$ بحيث يكون تكرار a_1 أصغر من 5 ، تكرار a_2 أصغر من 7 ، تكرار a_3 أصغر من 6 .

١١– جد عدد الأعداد الصحيحة n ، $1 \le n \le 2000$ ، بحيث

(أ) $2 \nmid n, 3 \nmid n, 5 \nmid n$. (ب) $2 \nmid n, 3 \nmid n, 5 \nmid n, 7 \nmid n$. (ج) $2 \nmid n, 3 \nmid n, 5 \nmid n, 7 \mid n$.

١٢– جد عدد تباديل الحروف $a, b, c, \dots, x, y, z$ التي لا تحتوي على أي من الأنساق path, train, time.

١٣– جد عدد تباديل حروف الكلمة equation التي لا تثبت أي حرف من حروف العلّة a, e, i, o, u.

١٤– (أ) احسب d_3, d_4, d_5 .

(ب) إذا كان 11660 يساوي عدد التباديل التامة للأعداد $1,2,\ldots,n$ التي تظهر فيها الأعداد $1,2,3,4,5$ في المواضع الخمسة الأولى من التبديل التام، فجد n.

١٥– إذا كان $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ حيث p_1 و p_2 عددان أوليان مختلفان، فأثبت أن $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)$ ثم احسب $\varphi(135)$.

١٦– استخدم مبدأ التضمين والإقصاء لحساب عدد الأعداد الأولية التي هي أقل من 45. [إرشاد: إذا كان $n > 1$ عدداً صحيحاً مؤلفاً فإن له قاسماً أولياً أصغر من أو يساوي $\sqrt{n}$.]

١٧– استخدم مبدأ التضمين والإقصاء لحساب عدد الأعداد الأولية التي هي أقل من 120.

١٨– إذا رميت 8 أحجار نرد مختلفة فجد احتمال أن تظهر جميع الأعداد $1,2,3,4,5,6$.

١٩– جد عدد ترتيبات الحروف a,a,a,b,b,b,c,c,c بحيث

(أ) لا تكون أي 3 حروف متعاقبة من النوع نفسه.

(ب) لا يكون أي حرفين متعاقبين من النوع نفسه.

٢٠– جد عدد ترتيبات الحروف a,a,a,b,b,b,b,c,c بحيث لا تكون الحروف من النوع نفسه متعاقبه.

٢١– جد عدد ترتيبات الحروف a,a,b,b,c,c,d,d,d بحيث لا يكون أي حرفين متعاقبين من النوع نفسه.

٢٢– جد عدد ترتيبات حروف الكلمة INTELLIGENT بحيث

(أ) يوجد زوج واحد على الأقل من الحروف المتعاقبة من النوع نفسه.

(ب) يوجد زوجان على الأقل من الحروف المتعاقبة من النوع نفسه.

(ج) يوجد زوجان بالضبط من الحروف المتعاقبة من النوع نفسه.

٢٣– جد عدد طرق توزيع r كرةً مختلفة على n صندوقاً مختلفاً، $r \geq n$، بحيث لا يكون أي من الصناديق خالياً.

٢٤– استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات مبدأ التضمين والإقصاء.

٢٥– استخدم نوعاً من الاستقراء الرياضي الخلفي لإثبات العلاقة المعطاة في (ب) من مبرهنة(٢,٣)، كما يلي:

(أ) لاحظ أن $l_n = e_n = \alpha_n$

(ب) لاحظ أن $l_{n-1} = e_{n-1} + l_n$

(ج) أثبت أن $l_{n-1} = \alpha_{n-1} - \binom{n-1}{n-2}\alpha_n$

(د) لكل $1 \leq r \leq n-1$، لاحظ أن $l_{r-1} = e_{r-1} + l_r$

(هـ) استخدم الاستقراء الرياضي الخلفي لإثبات المطلوب.