

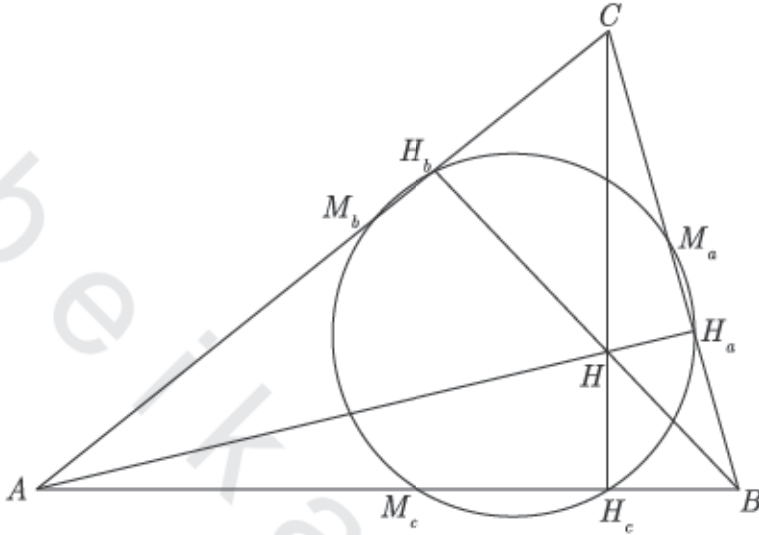
دائرة النقاط التسع

نبذة حول دائرة النقاط التسع

لعل من أكثر الأمور إمتاعاً في الهندسة هو أن تلاحظ كيف أن شكلاً واحداً ينتج لنا عدداً لا نهاية له من الخصائص والعلاقات، وأمثلتنا على ذلك تبدأ بتسع نقاط محددة على المثلث وهي :

- منتصفات أضلاع المثلث.
- مساقط ارتفاعات المثلث على أضلاعه.
- منتصفات القطع المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث ورؤوسه.

هذه النقاط بينها علاقة محددة هي أنها تقع جميعاً على دائرة واحدة ، تسمى دائرة النقاط التسع للمثلث (انظر الشكل 1- 8) .



شكل 1 - 8

وبعد أن ثبت أن هذه النقاط التسع تقع على دائرة واحدة، سنقوم ببحث العديد من الخصائص الخاصة بهذه الدائرة الشهيرة وسنستطرد قليلاً لنطور بعض الخصائص الخاصة بارتفاعات المثلث.

أثبت ليونارد أويلر Leonhard Euler في العام ١٧٦٥ أن ست نقاط من هذه النقاط تمر بها دائرة وحيدة وكانت هذه النقاط هي منتصفات أضلاع المثلث ومساقط ارتفاعاته على هذه الأضلاع، وظل ذلك قائماً حتى عام ١٨٢٠ حين قدم تشارلز جوليان براينشون و جان فيكتور بونسيلييه Charles-Julian Brianchon & Jean Victor Poncelet ورقة بحثية أثبتا فيها أن النقاط الثلاث الباقية (منتصفات القطع المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث ورؤوسه) تقع على نفس الدائرة، واستكملا في ورقتهما أول برهان تام لهذه النظرية، وأطلقا عليها لأول مرة "دائرة النقاط التسع".

و يُعزى جزء كبير من شهرة عالم الرياضيات الألماني الموهوب كارل فيلهلم فيورباخ (١٨٠٠ - ١٨٣٤) Karl Wilhelm Feuerbach إلى ورقة بحثية قدمها في العام (١٨٢٢) قال فيها "الدائرة التي تمر بمساقط ارتفاعات المثلث على أضلاعه تمس أيضا الدوائر الأربع للمثلث (الدائرة الداخلية والثلاث دوائر الخارجية) " وهذه النظرية هي النظرية 18 - 8 في هذا الفصل. ونتيجة لعمله هذا سميت هذه النظرية باسمه " نظرية فيورباخ " ، وفي بعض الأحيان يطلق على نظرية دائرة النقاط التسع نظرية فيورباخ.

في أي مثلث، نقاط منتصفات أضلاعه ومساقط ارتفاعاته على أضلاعه ومنتصفات القطع المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع هذه الارتفاعات ورؤوسه، تقع جميعاً على دائرة واحدة.

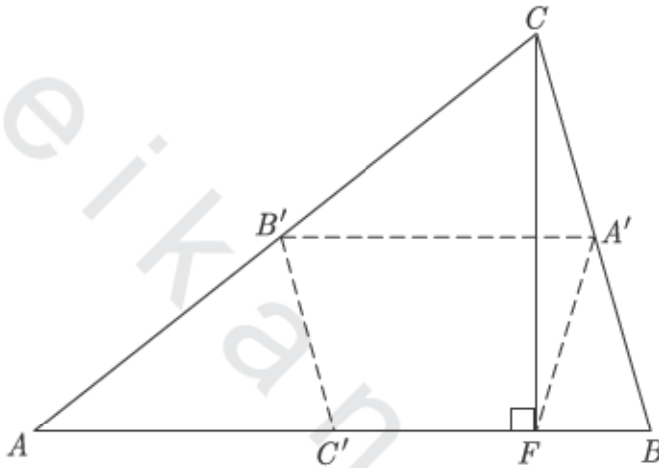
نظرية: 8-1

البرهان

من أجل تبسيط مناقشتنا لبرهان هذه النظرية، سنقوم بدراسة كل جزء منها على حدة وعلى شكل منفصل، واضعين في أذهاننا أن الأشكال من 2 - 8 إلى 5 - 8 هي مجرد أجزاء من الشكل 6 - 8.

ففي ΔABC ، النقاط A', B', C' منتصفات الأضلاع $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ على الترتيب (انظر الشكل 2 - 8)، ولنعتبر \overline{CF} ارتفاعاً في ΔABC ، ولأن $\overline{A'B'}$ متوسط في نفس المثلث، $\overline{A'B'} \parallel AB$ ، إذن الشكل الرباعي $A'B'C'F$ شبه منحرف، وبما أن $\overline{B'C'}$ متوسط أيضاً، إذن $B'C' = \frac{1}{2}BC$ ، ولأن $\overline{A'F}$ متوسط خارج من رأس القائمة في ΔBCF ، إذن $A'F = \frac{1}{2}BC$ ، وهذا يعني أن $B'C' = A'F$ ، ومنه شبه

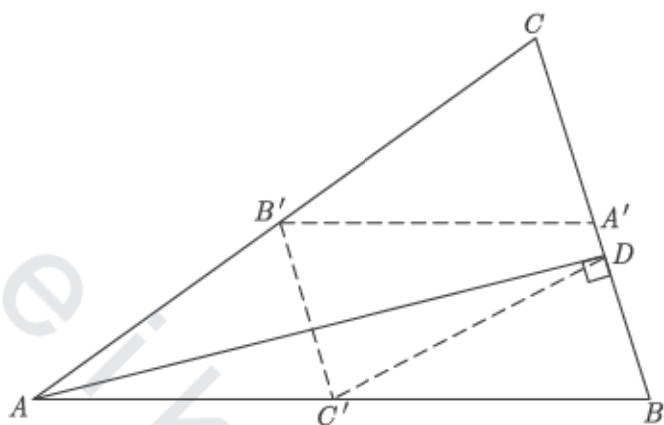
المنحرف $A'B'C'F$ يكون متطابق الضلعين، أي أنه يوجد به زاويتان متقابلتان متكاملتان، أي أن الشكل $A'B'C'F$ رباعي دائري، وهذا يثبت لنا أن النقاط الأربع A', B', C', F (من أصل النقاط التسع) تقع على دائرة واحدة.



شكل 2 - 8

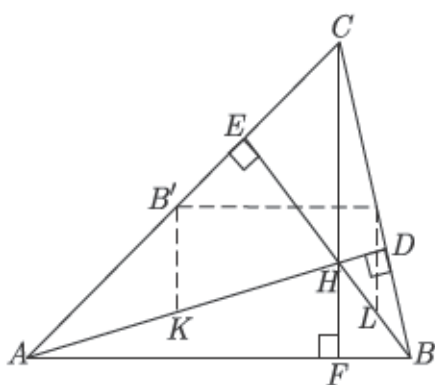
ولتفادي الخلط والالتباس، سنرسم $\triangle ABC$ الذي ارتفاعه \overline{AD} (الشكل 8 - 3) وباستخدام نفس الخطوات السابقة نستطيع إثبات أن الشكل $A'B'C'D$ رباعي دائري. أي أننا الآن نملك خمس نقاط (A', B', C', F, D) من النقاط التسع تقع على دائرة واحدة.

ويتكرر ذلك مرة أخرى مع ارتفاع المثلث \overline{BE} (انظر الشكل 8 - 4) نصل إلى أن النقاط الست (A', B', C', F, D, E) تقع على نفس الدائرة.

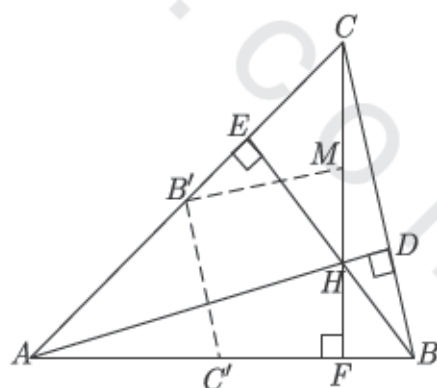


شكل 3 - 8

والآن، باعتبار النقطة H هي نقطة تقاطع ارتفاعات $\triangle ABC$ ، نفرض أن النقطة M منتصف CH (انظر الشكل 4 - 8)، ومن ذلك تكون قطعة $B'M$ واصله بين منتصفي ضلعين في $\triangle ACH$ ، وتوازي AH أو الارتفاع AD في $\triangle ABC$.



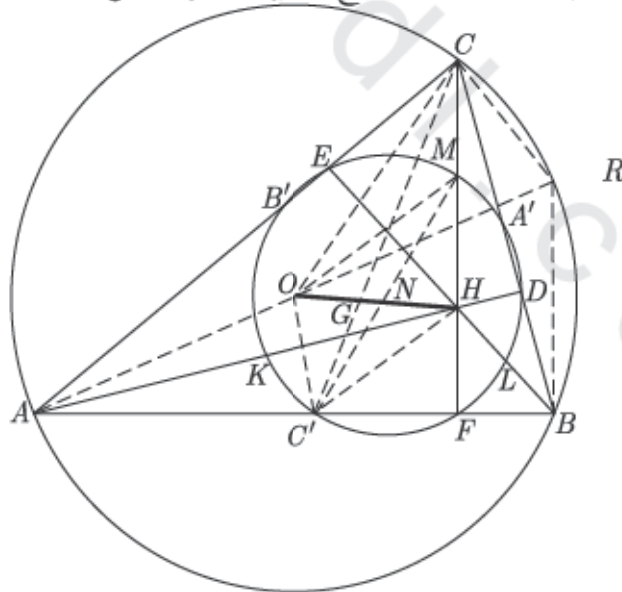
شكل 5 - 8



شكل 4 - 8

وبالمثل، بما أن $\overline{B'C'}$ واصله بين منتصفين ضلعين في ΔABC ،
 $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ ، ولأن $\angle ADC, \angle MB'C'$ قائمتان، نستنتج أن الشكل $MB'C'F$
 رباعي دائري (زاويتان متقابلتان متكاملتان)، وهذا يجعل النقطة M هي النقطة
 السابعة التي تنتمي لدائرتنا. ويتكرر نفس الإجراءات مع النقطة L التي هي منتصف
 \overline{BH} (انظر الشكل 5-8) نحصل على أن $\angle B'A'L, \angle B'EL$ قائمتان أي أن
 النقاط B', E, A', L تقع على دائرة واحدة، حيث إنها رؤوس لرباعي دائري (فيه
 زاويتان متقابلتان متكاملتان)، أي أن النقطة الثامنة لدينا هي النقطة L .

ولتحديد موقع نقطتنا التاسعة والأخيرة بالنسبة للدائرة، لتكن النقطة K
 منتصف \overline{AH} وكما سبق نجد أن $\angle A'B'K, \angle A'DK$ قائمتان مما يعطينا مرة أخرى
 رباعياً دائرياً هو $A'DKB'$ ، والنقطة K هي النقطة التاسعة التي تقع على الدائرة
 وعلى ذلك نكون حددنا النقاط التسع للدائرة (انظر الشكل 6-8) .



شكل 6-8

والآن نحن جاهزون لبرهنة بعض الخواص الأساسية لدائرة النقاط التسع.

نظرية: 2-8

مركز دائرة النقاط التسع للمثلث هو نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع الارتفاعات ومركز الدائرة المحيطة لنفس المثلث.

البرهان

لأن $\overline{MC'}$ يقابل $\angle CFC'$ المحيطة القائمة في دائرة النقاط التسع للمثلث، إذن $\overline{MC'}$ قطر لهذه الدائرة ومن ذلك نقطة منتصفه N هي مركز دائرة النقاط التسع للمثلث (انظر الشكل 6-8). نرسم \overline{AO} ليقطع الدائرة المحيطة O في النقطة R ، ثم نرسم $\overline{CR}, \overline{BR}$ ، وحيث إن $\overline{OC'}$ قطعة مستقيمة واصله بين منتصفي ضلعين في $\triangle ARB$ فإن $\overline{OC'} \parallel \overline{RB}$ ، ولأن $\angle ABR$ قائمة (زاوية محيطية مرسومة في نصف دائرة)، أي أن كلا من $\overline{CF}, \overline{RB}$ عمودي على \overline{AB} ، أي أن $\overline{CF} \parallel \overline{RB}$ ، وبالمثل $\overline{BE} \parallel \overline{CR}$ ، أي أن لدينا متوازي الأضلاع $CRBH$ ، ومن ذلك $RB = CH$. ومرة أخرى، حيث إن $\overline{OC'}$ قطعة مستقيمة واصله بين منتصفي ضلعين في $\triangle ARB$:

$$OC' = \frac{1}{2}(RB) = \frac{1}{2}(CH) = HM$$

ومن هذا نستنتج أن الشكل $OC'HM$ متوازي أضلاع (لأن فيه ضلعين متقابلين متطابقين ومتوازيين)، ولكن قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر، إذن النقطة N التي هي منتصف $\overline{MC'}$ هي أيضاً منتصف \overline{OH} .

نظرية: 3-8

طول قطر دائرة النقاط التسع للمثلث تساوي طول نصف قطر الدائرة المحيطة لنفس المثلث.

البرهان

في الشكل 6-8 نلاحظ أن \overline{MN} قطعة مستقيمة واصله بين منتصفي ضلعين في ΔOHC ،
إذن :

$$MN = \frac{1}{2}(OC) . \bullet$$

في العام ١٧٦٥م قدم لينارد أويلر Leonhard Euler ورقة بحثية أثبت فيها أن نقطة تقاطع المتوسطات G في المثلث تثلث \overline{OH} ، أي أن $OG = \frac{1}{3}(OH)$ ، وهذا الخط \overline{OH} يطلق عليه خط أويلر Euler Line للمثلث.

نظرية: 4-8
نقطة تقاطع المتوسطات في المثلث تقع على الثلث الأول من القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع الارتفاعات ومركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث ، وذلك من جهة مركز الدائرة المحيطة.

البرهان

لقد أثبتنا قبل قليل أن $\overline{OC'} \parallel \overline{CH}$ ، وكذلك $OC' = \frac{1}{2}(CH)$ (انظر الشكل 6-8) ومن ذلك نستنتج أن $\Delta OGC' \sim \Delta HGC(AA)$ بنسبة تشابه قدرها $\frac{1}{2}$ ؛ إذن :

$$OG = \frac{1}{2}(HG) \Rightarrow OG = \frac{1}{3}(OH)$$

والآن يبقى لنا إثبات أن G نقطة تقاطع المتوسطات للمثلث ABC ، ومن السهل إثبات ذلك فمن المثلثات اللذين أثبتنا تشابههما توأماً :

$$C'G = \frac{1}{2}(GC) = \frac{1}{3}(C'C)$$

وحيث إن $\overline{C'C}$ متوسط في المثلث، فإن النقطة G حتما هي نقطة تقاطع

- المتوسطات؛ حيث لأنها تقسم المتوسط بنسبة 1 : 2 من جهة الرأس .
من الشيق أن نلاحظ أن :

$$\frac{HN}{NG} = \frac{3}{1} = \frac{HO}{OG}$$

إذن، \overline{HG} تقسمها النقطة N داخليا، وأيضاً تقسمها O من الخارج بنفس النسبة وهذا ما يعرف باسم التقسيم التوافقي.

جميع المثلثات المنشأة داخل دائرة معلومة ولها نفس نقطة تقاطع الارتفاعات لها أيضاً نفس دائرة النقاط التسع.

نظرية: 5-8

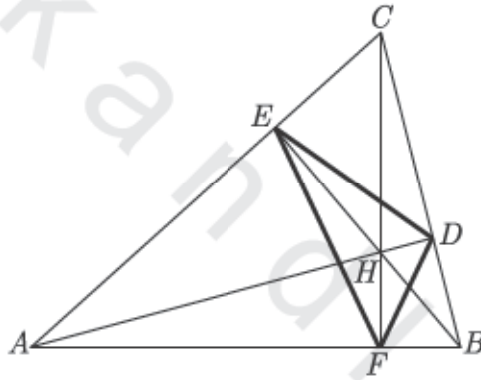
البرهان

لأن جميع المثلثات المنشأة داخل دائرة معلومة ولها نفس نقطة تقاطع الارتفاعات هي أيضاً لها نفس خط أويلر، ولأن مركز دائرة النقاط التسع لجميع هذه المثلثات ثابت ويقع في منتصف خط أويلر (نظرية 2-8)، وكذلك لأن طول نصف قطر دائرة النقاط التسع لكل هذه المثلثات يساوي نصف طول نصف قطر الدائرة المحيطة (نظرية 3-8)، أي أن دوائر النقاط التسع لهذه المثلثات لها نفس نصف القطر ومركز ثابت، وهذا يحتم أن تكون هناك دائرة نقاط تسع وحيدة لهذه المثلثات .

ارتفاعات المثلث Altitudes

لقد استخدمنا نظرية شيفا في الفصل الثاني من كتابنا هذا لإثبات أن ارتفاعات المثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة (انظر التطبيق الثاني صفحة 55) وقد أطلقنا على المثلث الذي رؤوسه مساقط أي نقطة داخل أي المثلث اسم مثلث المساقط Pedal

Triangle ، وفي حالة خاصة أو نوع خاص من مثلثات المساقط عندما تكون النقطة التي تخرج منها الأعمدة إلى أضلاع المثلث هي نقطة تقاطع الارتفاعات الأصلية للمثلث Orthocenter فإننا نطلق على مثلث المساقط هذا اسم مثلث المساقط من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث Orthic triangle (أي المثلث التي تعينه نقاط تقاطع ارتفاعات المثلث مع أضلاع هذا المثلث. ففي الشكل 7 - 8 ، مثلث المساقط من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث هو $\triangle DEF$. ووفقاً لنظرية 6 - 8 $\triangle ABC$ يشابه كلاً من $\triangle DEC, \triangle AEF, \triangle DBF$.



شكل 7 - 8

مثلث المساقط من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث يجزئ المثلث الأصلي إلى ثلاثة مثلثات كل منها يشابه المثلث الأصلي.

نظرية: 6-8

البرهان

سنثبت أن $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (شكل 7 - 8) . وسنحتاج فقط من أجل

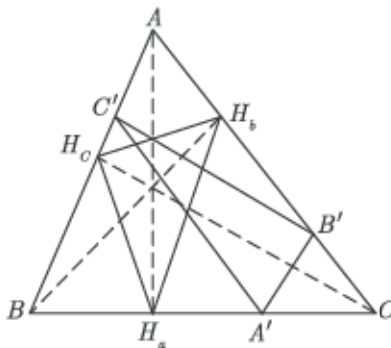
استكمال البرهان تكرار ما قمنا به مع $\triangle AEF, \triangle DBF$.

الشكل $AEDB$ رباعي دائري لأن $\angle AEB \cong \angle ADB = 90^\circ$ ؛ إذن $\angle EAB, \angle EDB$ متكاملتان (زاويتان متقابلتان في الرباعي الدائري)، ولكن $\angle EDC, \angle EDB$ متكاملتان؛ إذن $\angle EAB \cong \angle EDC$ ، ولأنه أيضاً $\angle C$ مشتركة بين المثلثين، فإن $\triangle ABC \sim \triangle DEC$. وبالمثل نستطيع إثبات أن $\triangle ABC \sim \triangle AEF$ (استخدم الرباعي الدائري $ECBF$)، وكذلك $\triangle ABC \sim \triangle DBF$ (استخدم الرباعي الدائري $AFDC$).

الميزة الخاصة بمثلث المساقط من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث التي أتت على النحو المنصوص عليه في نظرية 6-8 تقودنا لحقيقة شيقة أخرى حول هذا المثلث، فحواها أنه إذا أنشئ مثلث داخل مثلث بحيث تقع رؤوس المثلث الثاني على أضلاع المثلث الأول، فأى من المثلثات الحادة الزوايا يمكن أن يكون المثلث الثاني (المنشأ داخل المثلث الحاد الزوايا) هو الأقل في طول محيطه. ستخبرنا نظرية 7-8 عن أن هذا المثلث هو مثلث المساقط من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث.

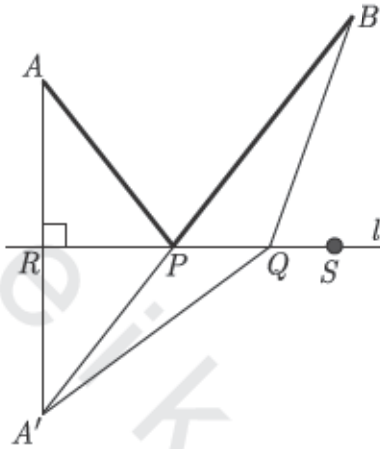
لأي مثلث منشأ داخل مثلث حاد الزوايا، يكون محيط المثلث المنشأ أقل ما يمكن إذا كان هذا المثلث المنشأ هو مثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث (انظر شكل 8-8).

نظرية: 7-8



شكل 8-8

يعتمد برهان هذه النظرية اعتماداً كبيراً على نظرية أخرى يتم تدريسها في المرحلة الثانوية وتنص على أن "أقصر مسار من نقطة معلومة إلى مستقيم معلوم ثم إلى نقطة أخرى تقع في نفس



شكل 8 - 9

الاتجاه هو المسار الذي يشكل زاويتين متطابقتين مع المستقيم المعلوم". فعلى سبيل المثال لتكن النقطتان A, B في جهة واحدة بالنسبة للمستقيم l (انظر شكل 9 - 8)،

ولتكن كذلك A' صورة A حول l . إذن: $AR = A'R$ ، $AA' \perp l$ ؛ وحيث إن النقطة P هي نقطة تقاطع $A'B$ مع l فمن السهل إثبات أن $AP + PB$ أقصر مسافة من A إلى l إلى B . ولأن $\angle APR \cong \angle A'PR$

نستنتج أن $\angle A'PR \cong \angle BPS$ (وهي خاصية هامة لإيجاد أقل محيط). ولإثبات أن $AP + PB$ أقل مسافة مطلوبة، نختار نقطة Q تنتمي للمستقيم l بحيث لا تقع على النقطة P . والآن $A'B < A'Q + QB$ ، أو $A'P + PB < A'Q + QB$ ، وهذا يجعل اختيار النقطة P هو الذي يحقق أقل مسافة مطلوبة، والآن نحن جاهزون لإثبات نظرية 7 - 8.

البرهان

في إثبات نظرية 6 - 8، توصلنا إلى أن مثلث المساقط من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث يجزئ المثلث الأصلي إلى ثلاثة مثلثات كل منها يشابه المثلث الأصلي؛ وهذا يجعلنا بسهولة نستنتج أن $\angle AEF \cong \angle CED$ (شكل 7 - 8)

E إلى النقطة E مسار طولاً من النقطة E إلى \overline{AB} إلى النقطة D هو $EF + FD$ ، بالمثل أقل مسار طولاً من النقطة E إلى \overline{AC} إلى النقطة D هو $ED + DF$ ، وأقل مسار طولاً من النقطة D إلى F هو $DF + EF$ ، وهذا يعني أن $\triangle EDF$ المنشأ داخل المثلث الحاد الزوايا ABC له أقل طول محيط ممكن.

ولمقارنة محيط أي مثلث آخر منشأ داخل $\triangle ABC$ مع مثلث المساقط من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث EDF ، سنجد بسهولة أن محيط $\triangle EDF$ هو الأقل .

من الزوايا التي أثبتنا تطابقها سابقاً يمكننا الوصول لخاصية جديدة تطور عملنا على مثلث المساقط من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث. فنلاحظ من كون $\angle AFE \cong \angle BFD$ ، وكون الزاويتان $\angle EFC$ ، $\angle DFC$ متتامتين (مجموع قياسهما يساوي 90°) ، وكذلك كون $\angle DFC$ ، $\angle DFB$ أيضاً متتامتين ؛ لذا نستنتج أن :

$$\angle EFC \cong \angle DFC$$

وبشكل عام نقدم ذلك في النظرية التالية 8 - 8 .

نظرية: 8-8 ارتفاعات المثلث الحاد الزوايا تنصف زوايا مثلث المساقط.

بالنظر إلى التطبيق رقم ٥ في الفصل الثاني ، ندرك كم هو ممتع أن نرى كيف لبرهان هذا التطبيق أن يستخدم في حالات أخرى ، فنحن الآن نملك نقطة تقاطع ارتفاعات $\triangle ABC$ التي هي في نفس الوقت مركز الدائرة الداخلية للمثلث EDF (انظر شكل 7 - 8) .

وقبل التوسع في العمل على الشكل 7 - 8 ، لندرس معاً النظرية البسيطة التالية.

نظرية: 8-9 نقطة تقاطع الارتفاعات في المثلث تقسم الارتفاع إلى جزأين ، حاصل

ضرب كل زوج منهما يساوي حاصل ضرب الزوجين الآخرين.

البرهان

لأن $\Delta CDH \sim \Delta AFH$ (انظر الشكل 7-8)، $\frac{CH}{AH} = \frac{HD}{HF}$ ويمكن

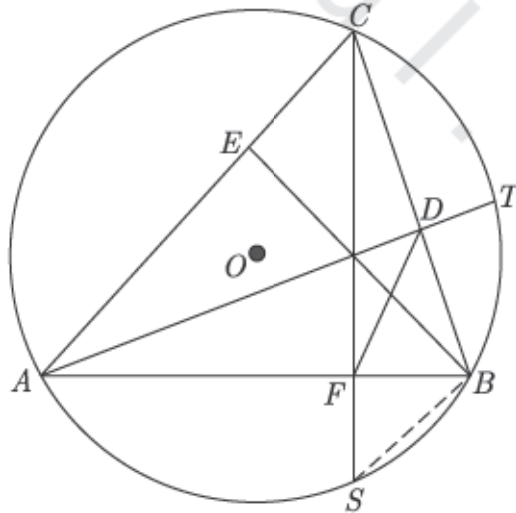
التعبير عن هذا التناسب كالتالي :

$$(CH)(HF) = (AH)(HD)$$

ويكتمل برهاننا باستخدام زوج آخر من المثلثات المتشابهة بنفس الطريقة السابقة. ●
والآن عند دراستنا للدائرة O المحيطة بالمثلث ABC (انظر الشكل 8-10)،
وبفرض أن \overline{CF} يقطع O في النقطة S . نلاحظ أن \overline{AB} تنصف \overline{HS} ، وهذا ما
تعممه النظرية التالية.

القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع الارتفاعات في
مثلث ونقطة تقاطع الارتفاع (امتداده من جهة مسقطه) مع
الدائرة المحيطة بهذا المثلث، ينصفها ضلع المثلث.

نظرية: 8-10



شكل 8-10

البرهان

لاحظ أن $\angle CSB \cong \angle CAB$ (لأنهما زاويتان محيطيتان في دائرة واحدة
 تحصران نفس القوس ، \widehat{BC}) (انظر الشكل 10 - 8). في $\triangle ACF$ ، الزاويتان
 $\angle ACF, \angle CAF$ متتامتان ، وكذلك أيضاً في $\triangle CEH$ ، الزاويتان
 $\angle ECH, \angle CHE$ متتامتان ، ولكن $\angle BHF \cong \angle CHE$ ، إذن :
 $\angle CAF \cong \angle BHF$. لأن كلاً من $\angle CSB, \angle BHF$ تطابق $\angle CAB$ ، إذن هما
 متطابقتان ، مما يعني أن $\triangle HBS$ متطابق الضلعين ، أي أن $\angle BFS \cong \angle BFH$ ،
 $HF = SF$ وهذا يثبت النظرية لارتفاع واحد من ارتفاعات المثلث الثلاثة. بخطوات
 مماثلة لهذا البرهان ، نثبت النظرية لباقي الارتفاعات في المثلث . ●

نظريتنا التالية تثبت أن الرأس B منتصف القوس TS (انظر الشكل

10 - 8) .

رأس المثلث هي نقطة منتصف قوس الدائرة المحيطة المحصور
 بين امتدادي ارتفاعين من ارتفاعات المثلث من جهة مسقطيهما
 (انظر الشكل 10 - 8) .

نظرية: 8-11

البرهان

الرباعي $AFDC$ (الشكل 10 - 8) دائري لأن $\angle AFC \cong \angle ADC$ (قائمتان) ،

إذن :

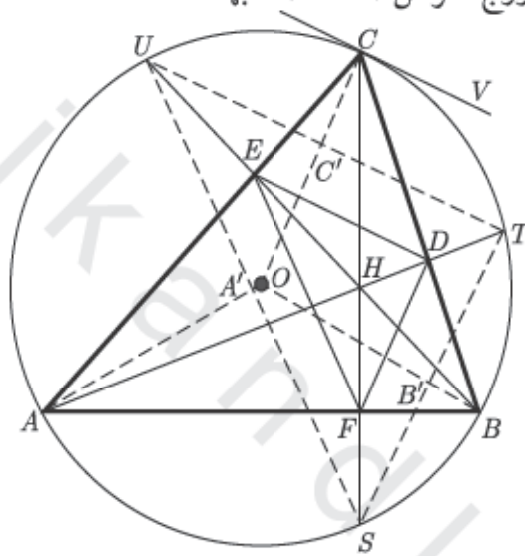
$$\angle FAD \cong \angle DCF$$

ومن ذلك نستنتج أن :

$$\widehat{SB} \cong \widehat{TB}$$

(زاويتان محيطيتان متطابقتان مرسومتان في دائرة واحدة لهما قوسان متطابقان).
تذكر أن ما يمكن إثباته على زوج من الارتفاعات هو صحيح لأي زوج آخر من
ارتفاعات المثلث الثلاثة. ●

ما سبق يقودنا إلى زوج آخر من المثلثات المتشابهة .



شكل 11 - 8

المثلث الذي رؤوسه تقاطع امتدادات ارتفاعات المثلث مع
الدائرة المحيطة يشابه مثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات
المثلث ، وتتوازي أضلاعها المتناظرة .

نظرية: 8-12

البرهان

لقد أثبتنا في النظرية 10-8 أن $HF = SF, HD = TD$ (انظر الشكل

11-8)؛ إذن في $\triangle HST$ ، \overline{DF} قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين

توازي \overline{ST} ، وبفس الخطوات سنثبت أن $\overline{DE} \parallel \overline{TU}$ ، $\overline{EF} \parallel \overline{US}$ ، ومن ذلك $\Delta DEF \sim \Delta TUS$.

تمنحنا نظرية 8-12 مزيداً من الحركة نحو الحصول على علاقات أخرى مفيدة تساعدنا على استكمال دراسة دائرة النقاط التسع.

نظرية: 8-13 أنصاف أقطار الدائرة المحيطة بالمثلث التي تحوي رؤوسه عمودية على أضلاع مثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث الأصلي المقابلة لها.

البرهان

سوف نقوم بإثبات هذه النظرية لنصف قطر واحد ونترك إثبات القطرين الآخرين للقارئ.

على الشكل (8-11) ، \overline{OC} نصف قطر الدائرة المحيطة لكل من $\Delta ABC, \Delta STU$. من نظرية 8-11 ، $\widehat{UC} \cong \widehat{TC}$ ؛ إذن \overline{OC} عمودي وينصف \overline{TU} ، ولأن $\overline{OC} \perp \overline{TU}$ فإن \overline{OC} أيضاً عمودي على \overline{DE} (لأننا في نظرية 8-12 قد أثبتنا أن $\overline{DE} \parallel \overline{TU}$).

والآن سنقدم نظرية لا بد أن تعقب النظرية السابقة.

نظرية: 8-14 مماسات الدائرة المحيطة بالمثلث عند رؤوسه توازي الأضلاع المناظرة لها من مثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث الأصلي.

البرهان

مرة ثانية سنقوم بإثبات النظرية لضلع واحد من مثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث. \overline{OC} عمودي على المماس \overline{VC} (الشكل 11-8)، ولكن $\overline{OC} \perp \overline{DE}$ (نظرية 13-8)، إذن $\overline{VC} \parallel \overline{DE}$ وبفس الطريقة تتحقق العلاقة مع الأضلاع الأخرى من مثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث. ●

دائرة النقاط التسع - مرة أخرى

نعود الآن لدراستنا لخواص دائرة النقاط التسع ونقدم في الجزء القادم خاصيتين تعتبران نتيجتين مباشرتين للنظريتين 14-8، 13-8.

نظرية: 8-15

مماسات دائرة النقاط التسع للمثلث عند نقاط منتصفات أضلاعه توازي الأضلاع المناظرة من مثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث الأصلي.

البرهان

نصف القطر $\overline{NC'}$ لدائرة النقاط التسع عمودي على $\overline{C'W}$ (انظر الشكل 12-8). بتطبيق نظرية 13-8، $\overline{OC} \perp \overline{DE}$ ، ولقد أثبتنا سابقاً أن \overline{MN} قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين في $\triangle COH$ ، إذن:

$$\overline{MN} \parallel \overline{OC}$$

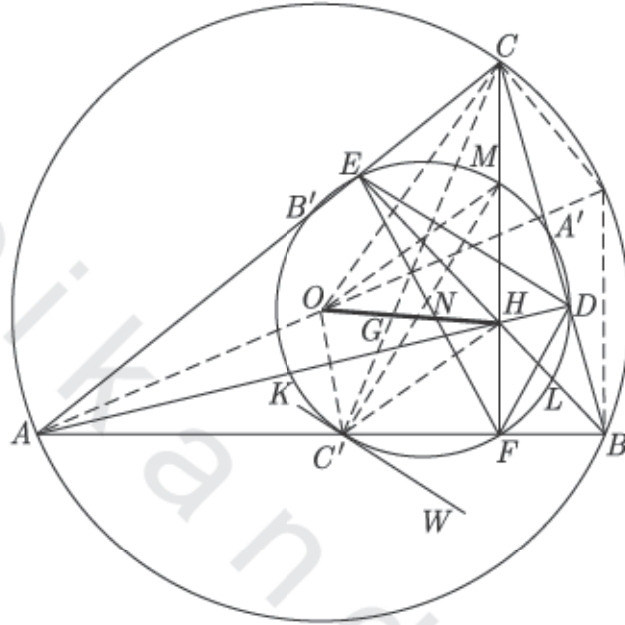
وهذا يؤدي إلى أن:

$$\overline{MNC'} \parallel \overline{OC}$$

أي أن:

$$\overline{C'W} \parallel \overline{DE}$$

- وبنفس الطريقة يمكننا إثبات النظرية على الضلعين الباقيين من المثلث .



شكل 12 - 8

مماسات دائرة النقاط التسع عند منتصفات أضلاع المثلث توازي
مماسات الدائرة المحيطة عند رؤوس هذا المثلث.

نظرية: 8-16

البرهان

لأن كلاً من مماسات دائرة النقاط التسع عند منتصفات أضلاع المثلث، ومماسات
الدائرة المحيطة عند رؤوس هذا المثلث، توازي أضلاع مثلث المساقط المنشأ من مساقط

- ارتفاعات المثلث. إذن هما متوازيان .

يتكون نظام نقاط تقاطع الارتفاعات orthocentric system من أربع نقاط، كل منها هو نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث الذي رؤوسه النقاط الثلاث المتبقية، ففي الشكل 8-12، النقاط A, B, C, H تشكل نظاماً لنقاط تقاطع الارتفاعات وذلك كالتالي :

- H نقطة تقاطع الارتفاعات في ΔABC ؛
- A نقطة تقاطع الارتفاعات في ΔBCH ؛
- B نقطة تقاطع الارتفاعات في ΔACH ؛
- C نقطة تقاطع الارتفاعات في ΔABH .

المثلثات الأربعة لنظام نقاط تقاطع الارتفاعات لها نفس دائرة النقاط التسع.

نظرية: 8-17

البرهان

برهان هذه النظرية متروك للقارئ ، حيث يتطلب ذلك التأكد من أن كلاً من

- النقاط التسع لكل من المثلثات الأربعة تقع على نفس الدائرة N .

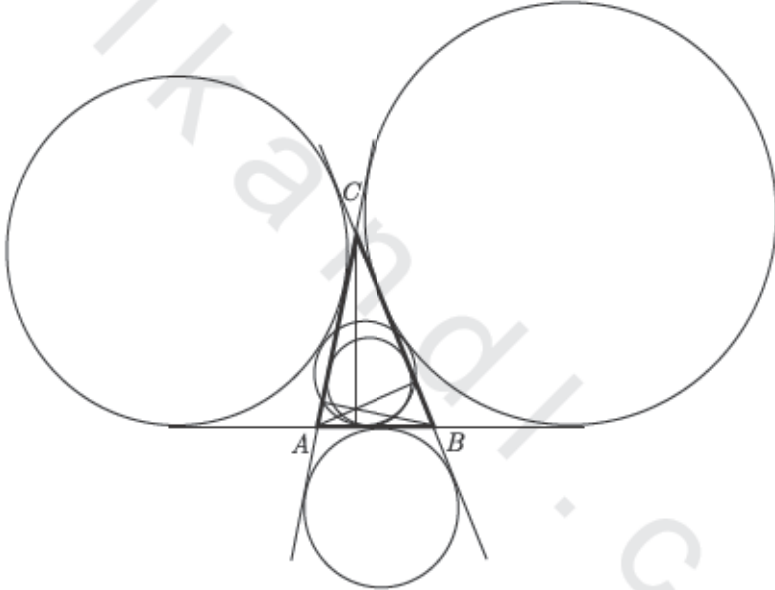
تعد الخاصية التي تربط بين دائرة النقاط التسع للمثلث من جهة والدوائر الخارجية و الدائرة الداخلية لنفس المثلث من جهة أخرى واحدة من أشهر خصائص دائرة النقاط التسع والتي اكتشفها وبرهنها الرياضي الألماني كارل فيلهلم فيورباخ Karl Wilhelm Feuerbach في عام ١٨٢٢ م. وهي تنص على ما يلي

(نظرية فيورباخ) دائرة النقاط التسع للمثلث تمس كلاً من

نظرية: 8-18

الدوائر الخارجية والدائرة الداخلية لنفس المثلث. (انظر الشكل 8-13).

يعد برهان هذه الخاصية معقد إلى حد بعيد، ولكنه في ذات الوقت مفيد، والقارئ المهتم سيجد أربعة براهين مختلفة لنظرية فيوريباخ في كتاب الهندسة الحديثة Modern Geometry تأليف روجر أ. جونسون*. أما البرهان الذي استخدمه فيوريباخ فقد اعتمد على حساب المسافات بين مركز دائرة النقاط التسع ومراكز كل من الدائرة الداخلية (p) والدائرة المحيطة (R)



شكل 13 - 8

والدائرة الداخلية لمثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث (أو مثلث المساقط في صورته العامة) المثلث DEF في شكل 12 - 8، ثم وضح أن هذه المسافات تساوي المجموع والفرق لأنصاف الأقطار المتناظرة.

$$(OI)^2 = R^2 - 2Rp$$

$$(IH)^2 = 2p^2 - 2Rr$$

$$(OH)^2 = R^2 - 4Rr$$

$$(NI)^2 = \frac{1}{2}[(OI)^2 + (IH)^2] - (NH)^2 = \frac{1}{4}R^2 - Rp + p^2 = \left(\frac{1}{2}R - p\right)^2$$

لاحظ أن I هي مركز الدائرة الداخلية للمثلث، H هي نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث، O مركز الدائرة المحيطة.

تدريبات

1. أثبت أن مركز الدائرة المحيطة لأي مثلث هي نقطة تقاطع الارتفاعات للمثلث الذي رؤوسه نقاط المنتصف لأضلاع المثلث الأصلي.
2. أثبت أن أطوال ارتفاعات المثلث تتناسب عكسياً مع أطوال أضلاع هذا المثلث.
3. في الشكل 12-8، أثبت أن $\Delta A'B'C' \cong \Delta A'B'F$.
4. في الشكل 12-8، أثبت أن OM, CC' ينصف كل منهما الآخر.
5. لماذا استخدمنا المثلث الحاد الزوايا فقط عند إثباتنا أن مثلث المساقط المنشأ من مساقط ارتفاعات المثلث له أقل طول محيط ممكن بين المثلثات المنشأة داخل المثلث الأصلي (نظرية 7-8)؟
6. ليكن AM هو ارتفاع المثلث ABC على الضلع BC حيث $M \in BC$ ، ولتكن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث. أثبت أن $(BM)(MC) = k(AM)$ حيث k هي بعد H عن BC .
7. أثبت أن قياس الزاوية المحصورة بين ارتفاع المثلث ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث والمشتركون في نفس الرأس يساوي الفرق بين قياسي زاويتي المثلث المتبقيتين.

8. أثبت أن الزاوية المحصورة بين ارتفاع المثلث ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث والمتركين في نفس الرأس ينصفها منصف زاوية رأس المثلث الخارج منها ارتفاع المثلث ونصف قطر الدائرة المحيطة.

9. أثبت أن الدائرة المحيطة بمثلث تطابق الدائرة التي تمر برأسين من رؤوس هذا المثلث ونقطة تقاطع ارتفاعاته.

10. أثبت أن طول القطعة المستقيمة العمودية الخارجة من مركز الدائرة المحيطة بمثلث إلى أحد أضلاعه تساوي نصف طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المثلث المقابلة لهذا الضلع ونقطة تقاطع ارتفاعات هذا المثلث.

11. أثبت أن مجموع أطوال ارتفاعات المثلث أقل من طول محيطه.

12. أثبت أن دائرة النقاط التسع للمثلث الذي رؤوسه أي ثلاث نقاط من النقاط التالية : مركز الدائرة الداخلية لمثلث ABC ، مراكز الدوائر الثلاث الخارجية للمثلث ABC ، تمر بالرؤوس A, B, C .

13. أثبت أن الخط المستقيم الذي تقع عليه نقطة تقاطع ارتفاعات مثلث ، ونقطة منتصف ضلع من أضلاع هذا المثلث يتقاطع مع قطر الدائرة المحيطة به والخارج من الرأس المقابلة لهذا الضلع في نقطة تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث.

14. أثبت أن مركز دائرة النقاط التسع لمثلث يقع على استقامة واحدة مع كل من نقطتي تقاطع العمودين الساقطين من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث على المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية الرأس ، ونقطة منتصف ضلع المثلث المقابل لهذه الرأس.

15. أثبت أنه إذا كان لمثلث رأس ثابتة ودائرة نقاط تسع ثابتة فإن المحل الهندسي للنقاط التي يمكن أن تكون مركزاً للدائرة المحيطة بالمثلث تقع على دائرة.