# الفصل السابع

## الدائرة الداخلية والدوائر الخارجية للمثلث

### نقاط التماس

سوف نبدأ هذا الفصل بشكل قد يبدو مثيراً إلى حد ما. لنتذكر نظرية مألوفة من أساسيات الهندسة.

| نظرية : 7–1 | القطعتان المستقيمتان المماستان لدائرة المرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان. |
|---|---|

لنقم بدراسة التمرين التالي، حيث نستخدم في حله النظرية أعلاه عدة مرات.

إذا كان محيط $\Delta ABC$ يساوي 16 ( انظر الشكل $1-7$)، فأوجد طول $\overline{AK_1}$ ( لاحظ أن كلاً من الدوائر الأربع $I, I_1, I_2, I_3$ تمس المستقيمات التي تحمل أضلاع $\Delta ABC$).

**الحل**

بتطبيق نظرية $0-7$ على الشكل نجد أن :

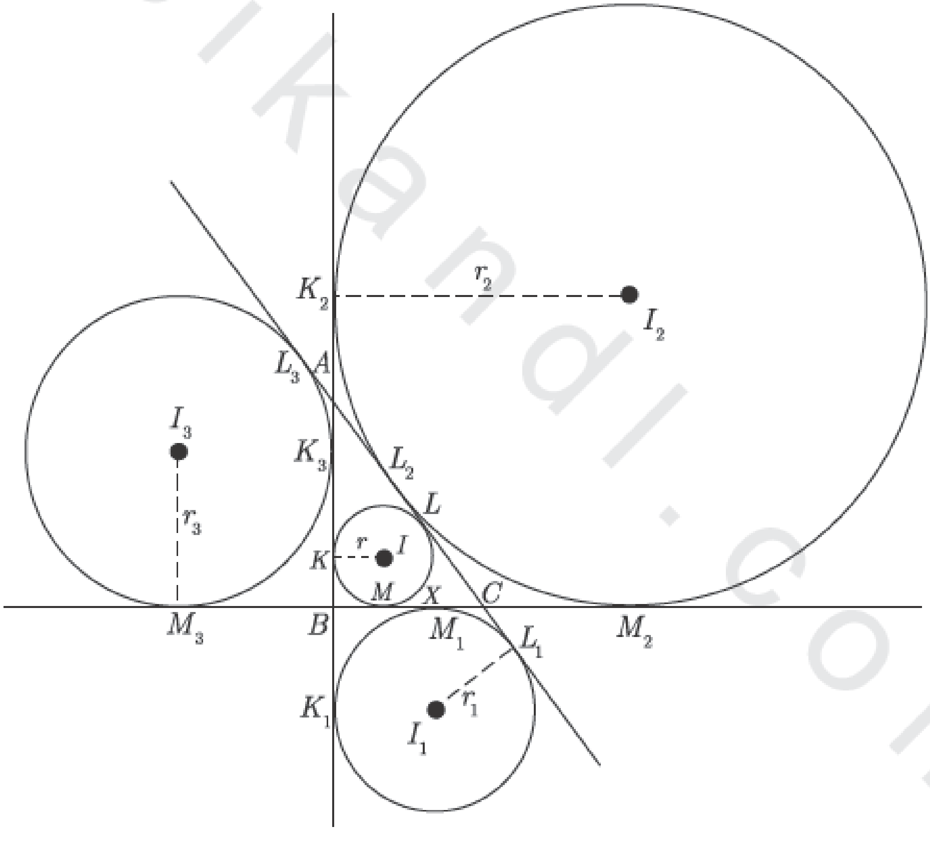
$$BK_1 = BM_1,\ CL_1 = CM_1$$

ولدينا محيط $\Delta ABC$ = $AB + BC + AC = AB + \left(BM_1 + CM_1\right) + AC$

بالتعويض : محيط $\Delta ABC$ = $AB + BK_1 + CL_1 + AC = AK_1 + AL_1$

ولكن $AK_1 = AL_1$ ( قطعتان مماستان لدائرة مرسومتان من نقطة خارجها ). إذن :

$$AK_1 = \frac{1}{2}\left( \text{محيط } \Delta ABC \right) = 8$$




شكل 1 – 7

الحل السابق يتعرض لعلاقة واحدة فقط من كثير من العلاقات الشيقة التي يحتويها موضوع الدوائر الثلاث الخارجية للمثلث أو الدائرة الداخلية له، وفي مناقشتنا التالية سوف نقدم علاقات أخرى تنطوي على هذه الدوائر الأربع للمثلث، ونقاط تماسها، حيث كل دائرة من هذه الدوائر تمس المستقيمات الثلاثة التي تحمل أضلاع المثلث.

والآن دعونا نؤصل العلاقة التي توصلنا إليها في التمرين السابق.

**نظرية : 1-7** طول القطعة المستقيمة التي تحوي ضلع مثلث، والواصلة بين رأس المثلث ونقطة تماس هذه القطعة مع الدائرة الخارجية المقابلة لتلك الرأس يساوي نصف محيط المثلث.

عندما نرمز لنصف محيط $\Delta ABC$ بالرمز $s$ ، فإننا يمكننا صياغة المطلوب على الصورة :

$$AK_1 = AL_1 = s$$

وإذا كان $BC = a, AC = b, AB = c$ ، فإن :

$$BM_1 = BK_1 = AK_1 - AB = s - c$$

$$CM_1 = CL_1 = AL_1 - AC = s - b$$

وبسهولة – بطريقة مماثلة – نحصل على العلاقات الأخرى.

**نظرية : 2-7** طول القطعة المستقيمة الواقعة على ضلع مثلث والواصلة بين أحد رؤوسه ونقطة تماس الدائرة الخارجية مع ذلك الضلع، تساوي طول نصف محيط المثلث مطروحاً منه طول الضلع المجاور المشترك مع الضلع السابق في نفس الرأس.

والآن نستدعي الطريقة التي نعين بها الدوائر الأربع، ففي التطبيق الثالث الوارد في الفصل الثاني أثبتنا أن المنصف الداخلي لأي زاوية في مثلث يتقاطع في نقطة واحدة مع المنصفين الخارجيين للزاويتين الأخريين، وهذه النقطة هي مركز الدائرة الخارجية، وتسمى المركز الخارجي للمثلث excenter .

وباستخدام الخاصية التي تنص على أن أي نقطة تقع على منصف الزاوية تقع على مسافات متساوية من ضلعي الزاوية، من السهل أن نثبت أن نقطة تقاطع المنصفات الداخلية لزوايا المثلث هي مركز الدائرة الداخلية للمثلث .

وعلى الرغم من معرفة الطلاب – من خلال مبادئ الهندسة – بالعلاقة بين القطعتين المستقيمتين المرسومتين من نقطة خارج دائرة، إلا أنهم لم يتطرقوا إلى العلاقة بين طولي هذين المماسين بدلالة أضلاع المثلث الناتج من المماسات المشتركة ؛ ولذلك فبرهان النظرية التالية يملأ هذا الفراغ.

**نظرية : 7-3** طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس مثلث ونقطة تماس الدائرة الداخلية لنفس المثلث تساوي طول نصف محيط هذا المثلث مطروحاً منه طول الضلع المقابل لهذه الرأس .

**البرهان**

في الشكل $7-1$ :

المحيط يساوي $AK + AL + BK + BM + CL + CM$

ومن نظرية $7-0$ ، لدينا:

$$AK = AL, BK = BM, CL = CM$$

إذن ؛ نصف المحيط $s = AK + BM + CM = AK + BC$ أو

$AK = s - BC$ ، وهو المطلوب ●.

هناك أيضاً بعض العلاقات الشيقة بين نقاط التماس ودوائر المثلث الأربع، نسعد بتقديمها فيما يلي.

**نظرية : 7-4** طول القطعة المماسة الواقعة على ضلع مثلث والواصلة بين نقطتي التماس للدائرتين الداخلية والخارجية لمثلث تساوي الفرق بين طولي الضلعين الآخرين لهذا المثلث.

## البرهان

من خلال نص النظرية فإننا سنحاول الحصول على طول $\overline{MM_1}$ بدلالة أطوال أضلاع المثلث.

تذكر أننا دائما نعتبر $AB = c, AC = b, BC = a$ . من النظرية $7 - 2$ ،

$$CM_1 = CL_1 = s - b$$

ومن النظرية $7 - 3$ :

$$BM = BK = s - b$$

حيث $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ . والآن :

$$\begin{aligned} MM_1 &= CB - BM - CM_1 = a - (s-b) - (s-b) \\ &= a - 2(s-b) = a + 2b - 2s \end{aligned}$$

أي أن $MM_1 = b - c$ .●

وانطلاقاً من البرهان السابق سنحاول إثبات أن نقطة منتصف $\overline{MM_1}$ هي أيضاً نقطة منتصف $\overline{BC}$. وسنبدأ ذلك بملاحظة أن $BM = CM_1$ ، وحيث إن $X$ منتصف $\overline{BC}$ ، $BX = CX$. بالطرح $MX = M_1X$ ، وتلك النتيجة هي ما تقرره النظرية التالية

| نظرية : 7-5 | نقطة منتصف أي ضلع من أضلاع المثلث هي أيضاً نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تقع بين نقطي تماس هذا الضلع مع الدائرتين الداخلية والخارجية لهذا المثلث. |
|---|---|

وبعد ما سبق من إدراك للعلاقات بين الدوائر الأربع ومماساتها، يكون من الطبيعي الآن أن نسأل عن طول $\overline{MM_3}$ ، وهي القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطي تماس الدائرة الداخلية للمثلث على أحد أضلاعه والدائرة الخارجية المجاورة لها. وهذا الطول من السهل استنتاجه فلدينا $MM_3 = CM_3 - CM$. ومن نظرية $1 - 7$ :

$$CM_3 = s$$

ومن نظرية $3 - 7$ :

$$CM = s - c$$

إذن :

$$MM_3 = s - \left(s - c\right) = c = LL_3 .$$

وعليه يمكننا صياغة ذلك في نص النظرية التالي.

| نظرية : 7-6 | طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتي تماس الدائرتين الداخلية والخارجية لمثلث تساوي طول ضلع المثلث المحصور بين هاتين الدائرتين. |
|---|---|

والآن لندرس معا القطع المستقيمة المماسية الخارجية المشتركة لدائرتين خارجيتين عن مثلث ولنبدأ بالنظرية التالية .

**نظرية : 7-7** طول القطعة المستقيمة المماسة الخارجية المشتركة بين دائرتين خارجيتين لمثلث تساوي مجموع أطوال هذا المثلث عدا الضلع الواقع على القطعة المستقيمة المماسة الخارجية المشتركة .

**البرهان**

هنا سنسعى لإيجاد طول $\overline{M_2M_3}$ : $M_2M_3 = MM_2 + MM_3$ ، ومن نظرية $7-6$ :

$MM_2 = b,\ MM_3 = c$ ، إذن :

$$M_2M_3 = b + c . \bullet$$

في النظرية التالية سنحاول تعيين طول القطعة المستقيمة المماسية الداخلية لدائرتين خارجيتين عن مثلث.

**نظرية : 8-7** طول القطعة المستقيمة المماسة الداخلية المشتركة بين دائرتين خارجيتين لمثلث تساوي طول الضلع المقابل لرأس هذا المثلث الواقعة على هذه القطعة المستقيمة المماسة.

**البرهان**

هنا سنسعى لإيجاد $\overline{M_1M_2}$ :

$$M_1M_2 = MM_2 - MM_1$$

ومن نظرية $7-6$ :

$$MM_2 = b$$

من نظرية $7-4$ :

$$MM_1 = b - c$$

إذن :

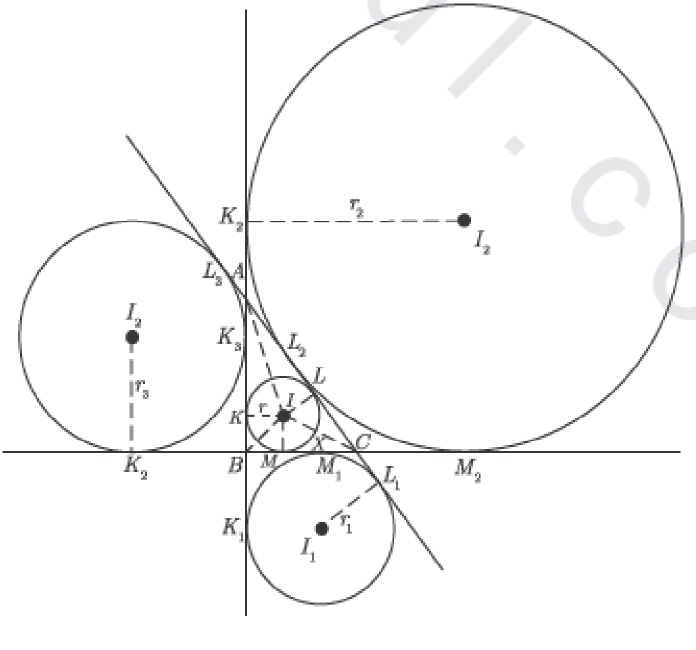
$$M_1M_2 = b - (b - c) = c. \bullet$$

وبالعلاقة السابقة نكون قد أكملنا دراسة القطع المستقيمة التي تعينها نقاط تماس الدوائر الأربع لأي مثلث.

## أنصاف أقطار الدوائر الأربع للمثلث Equiradii

في هذا الجزء من الفصل سنقوم بدراسة أنصاف أقطار الدوائر الأربع التي تعاملنا معها سابقاً، وسنطلق على نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث، نصف القطر الداخلي للمثلث inradius.

**نظرية : 7-9** طول نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث يساوي النسبة بين مساحة هذا المثلث إلى نصف محيطه.



شكل 2 – 7

## البرهان

على الشكل 2 – 7:

$$\left[\Delta ABC\right]=\left[\Delta BCI\right]+\left[\Delta ACI\right]+\left[\Delta ABI\right]=$$
$$=\frac{1}{2}(IM)(BC)+\frac{1}{2}(IL)(AC)+\frac{1}{2}(IK)(AB)$$
$$=\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc=\frac{1}{2}r\left(a+b+c\right)=sr$$
$$\Rightarrow r=\frac{\left[\Delta ABC\right]}{s}\ \bullet.$$

والآن لندرس علاقة أنصاف أقطار الدوائر الثلاث الخارجية للمثلث مع عناصر المثلث نفسه.

**نظرية: 7–10** طول نصف قطر الدائرة الخارجية للمثلث يساوي النسبة بين مساحة هذا المثلث إلى الفرق بين نصف محيطه وطول الضلع المحصور بين تلك الدائرة الخارجية والدائرة الداخلية.

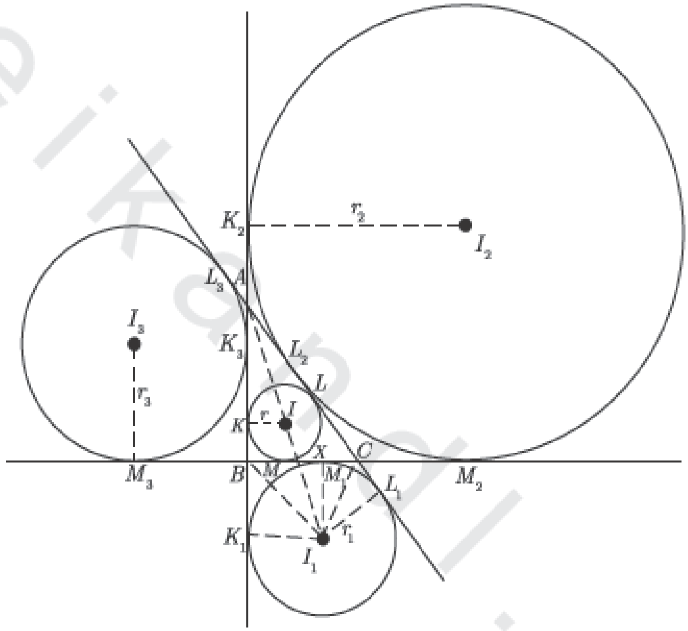
## البرهان

على الشكل 3 – 7:

$$\left[\Delta ABC\right]=\left[\Delta ABI_1\right]+\left[\Delta ACI_1\right]-\left[\Delta BCI_1\right]$$
$$=\frac{1}{2}(I_1K_1)(AB)+\frac{1}{2}(I_1L_1)(AC)-\frac{1}{2}(I_1M_1)(BC)$$
$$=\frac{1}{2}r_1c+\frac{1}{2}r_1b-\frac{1}{2}r_1a=\frac{1}{2}r_1\left(c+b-a\right)=r_1\left(s-a\right)$$
$$\Rightarrow r_1=\frac{\left[\Delta ABC\right]}{s-a}$$

وبالمثل يمكننا استنتاج أن :

$$r_2 = \frac{[\Delta ABC]}{s-b} \qquad , \qquad r_3 = \frac{[\Delta ABC]}{s-c} \bullet.$$




شكل $3-7$

والآن لنجرب أن نضرب النتائج التي توصلنا إليها في النظريتين $7-9, 7-10$.

سنحصل على :

$$r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \frac{[\Delta ABC]}{s} \cdot \frac{[\Delta ABC]}{s-a} \cdot \frac{[\Delta ABC]}{s-b} \cdot \frac{[\Delta ABC]}{s-c}$$
$$= \frac{([\Delta ABC])^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

سيذكرك المقام في العلاقة السابقة بصيغة هيرون Heron's formula لإيجاد مساحة أي مثلث

$$[\Delta ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

إذن: $([\Delta ABC])^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ ، وبالتعويض نجد أن:

$$r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = ([\Delta ABC])^2$$

ويمكننا صياغة هذا الذي توصلنا إليه في النظرية التالية.

| نظرية: 7-11 | حاصل ضرب أطوال أنصاف أقطار دوائر المثلث الأربع يساوي مربع مساحته. |
|---|---|

وكذلك يمكننا باستخدام نفس النظريتين $10-7$ ، $9-7$ الوصول للنظرية التالية.

| نظرية: 7-12 | مقلوب طول نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث يساوي مجموع مقلوبات أنصاف أقطار الدوائر الخارجية الثلاث لنفس المثلث. |
|---|---|

**البرهان**

من نظرية $10-7$ :

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{s-a}{[\Delta ABC]}+\frac{s-b}{[\Delta ABC]}+\frac{s-c}{[\Delta ABC]}=\frac{3s-(a+b+c)}{[\Delta ABC]}$$
$$=\frac{3s-2s}{[\Delta ABC]}=\frac{s}{[\Delta ABC]}$$

من نظرية $9-7$ :

$$\frac{1}{r}=\frac{s}{[\Delta ABC]}$$

إذن:

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}. \bullet$$

هناك علاقات مماثلة تحتوى الارتفاعات $h_a,h_b,h_c$ للمثلث $ABC$ ، نثبتها في النظرية التالية.

| نظرية: 7–13 | مجموع مقلوبات أطوال ارتفاعات المثلث يساوي مقلوب طول نصف قطر الدائرة الداخلية لنفس لمثلث. |
|---|---|

**البرهان**

بداية لبرهاننا، سنقدم مساحة $\Delta ABC$ بعدة طرق كما يلي

$$[\Delta ABC]=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$$
$$2([\Delta ABC])=ah_a=bh_b=ch_c$$

من نظرية $9-7$ ، لدينا $[\Delta ABC]=sr$ ، وبالتعويض نجد أن:

$$2sr=ah_a=bh_b=ch_c \Leftrightarrow \frac{2s}{\frac{1}{r}}=\frac{a}{\frac{1}{h_a}}=\frac{b}{\frac{1}{h_b}}=\frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

إذن :

$$\bullet \quad \frac{1}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}} = \frac{1}{\frac{1}{r}} \text{ ، أو } \frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_a} = \frac{1}{r}.$$

ومن النتيجة السابقة مع نظرية $12 - 7$ نحصل على النظرية التالية :

**نظرية: 7–14** مجموع مقلوبات أطوال ارتفاعات المثلث يساوي مجموع مقلوبات أنصاف أقطار الدوائر الخارجية الثلاث لنفس المثلث.

ويمكننا التعبير رياضيا عن نظرية $14 - 7$ على الصورة :

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$$

وفي نهاية دراستنا للدوائر الأربع للمثلث ، سنختتم ذلك بإيجاد العلاقة بين أنصاف أقطار هذه الدوائر ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث والتي تمر برؤوسه ، وهذا ما سنقدمه في النظرية $15 - 7$.

**نظرية: 7–15** مجموع أطوال أنصاف أقطار الدوائر الخارجية لمثلث يساوي طول نصف قطر الدائرة الداخلية مضافاً إليه أربعة أمثال نصف قطر الدائرة المحيطة بنفس المثلث.

**البرهان**

ليكن قطر الدائرة $O$ المحيطة بالمثلث $ABC$ هو $\overline{YZ}$ ، والذي حتما يمر بالنقطة $X$ التي هي منتصف $\overline{BC}, \overline{MM_1}$ ( نظرية $5 - 7$ ). إذن، $\overline{YZ} \perp \overline{BC}$ ، و ( $\overline{YZ} \perp \overline{M_2M_3}$ )، انظر الشكل $4 - 7$.

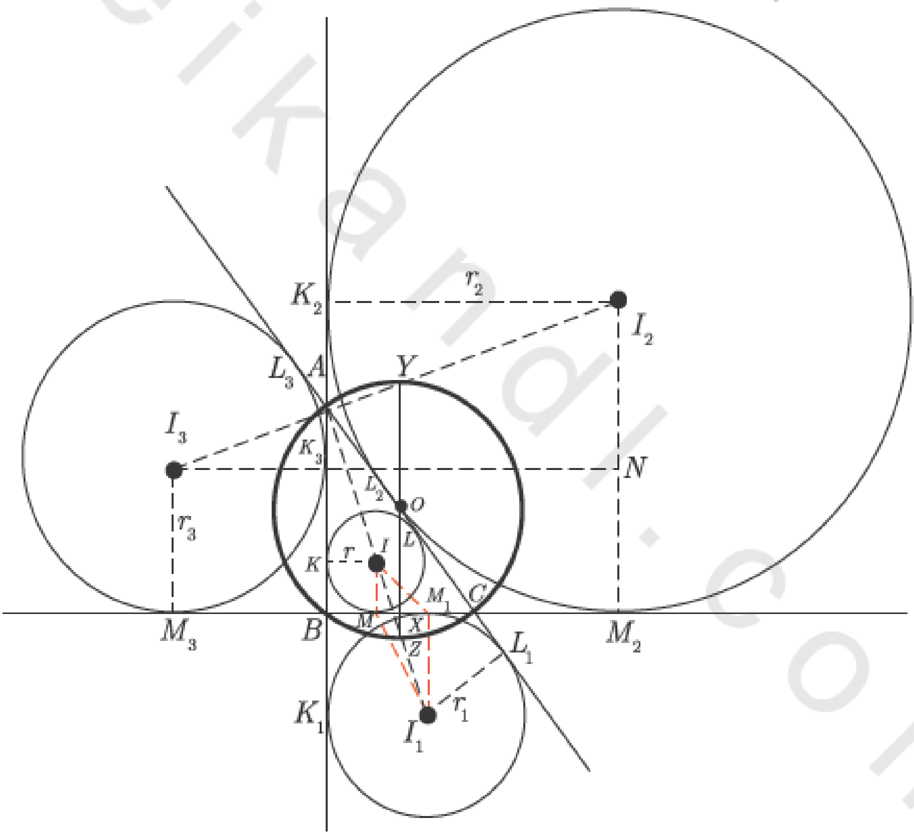
ولأن $\overline{YX}$ قاعدة متوسطة في شبه المنحرف $M_3I_3I_2M_2$ :

$$YX = \frac{1}{2}\left(I_2M_2 + I_3M_3\right) = \frac{1}{2}\left(r_2 + r_3\right)$$

ولأن طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي قطري شبه المنحرف تساوي نصف الفرق بين طولي القاعدتين المتوازيتين، إذن في شبه المنحرف $MIM_1I_1$ :

$$XZ = \frac{1}{2}\left(M_1I_1 - MI\right) = \frac{1}{2}\left(r_1 - r\right)$$

وأخيراً لنعمل على نصف قطر الدائرة المحيطة $R$ :




شكل 4 – 7

$$2R = YX + XZ$$

$$2R = \frac{1}{2}\left(r_2 + r_3\right) + \frac{1}{2}\left(r_1 - r\right)$$

$$4R = r_1 + r_2 + r_3 - r$$

$$4R + r = r_1 + r_2 + r_3 \ \bullet.$$

وأخيراً، لنعط قليلاً من الانتباه لمراكز دوائر المثلث الأربع وأبعادها عن مركز الدائرة المحيطة، وستكون أولى نظرياتنا هي التي قدمها أويلر ( ١٧٠٧ — ١٧٨٣ ) Leonhard Euler.

**نظرية: 7–16**

المسافة $d$ بين مركز الدائرة الداخلية ومركز الدائرة المحيطة بالمثلث يمكن الحصول عليها من العلاقة :

$$d^2 = R\left(R - 2r\right)$$

**البرهان**

لأن $Z$ منتصف $\overset{\frown}{BC}$ ، فإنه لابد أن يمر $\overrightarrow{AI}$ بالنقطة $Z$ (انظر الشكل 5 – 7).

لنرسم $\overleftrightarrow{IO}$ يقطع الدائرة $O$ في النقطتين $D, E$. ولنفرض أن $IO = d$ ، إذن :

$$\left(AI\right)\left(IZ\right) = \left(DI\right)\left(IE\right) = \left(R - d\right)\left(R + d\right)$$

لاحظ في الرباعي $BICI_1$ أن $\overline{BI} \perp \overline{BI_1}, \overline{CI} \perp \overline{CI_1}$ (منصفان خارجي وداخلي لزاوية واحدة )، وهذا يعنى أن $BICI_1$ رباعي دائري. ولأن مركز هذا الرباعي الدائري يتعين من تقاطع المنصف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{BC}$ (الذي هو $\overline{OXZ}$) والقطر $\overline{II_1}$ ، وتكون نقطة التقاطع هي $Z$ ، إذن، $IZ = CZ$ ، وبالتعويض نجد أن :

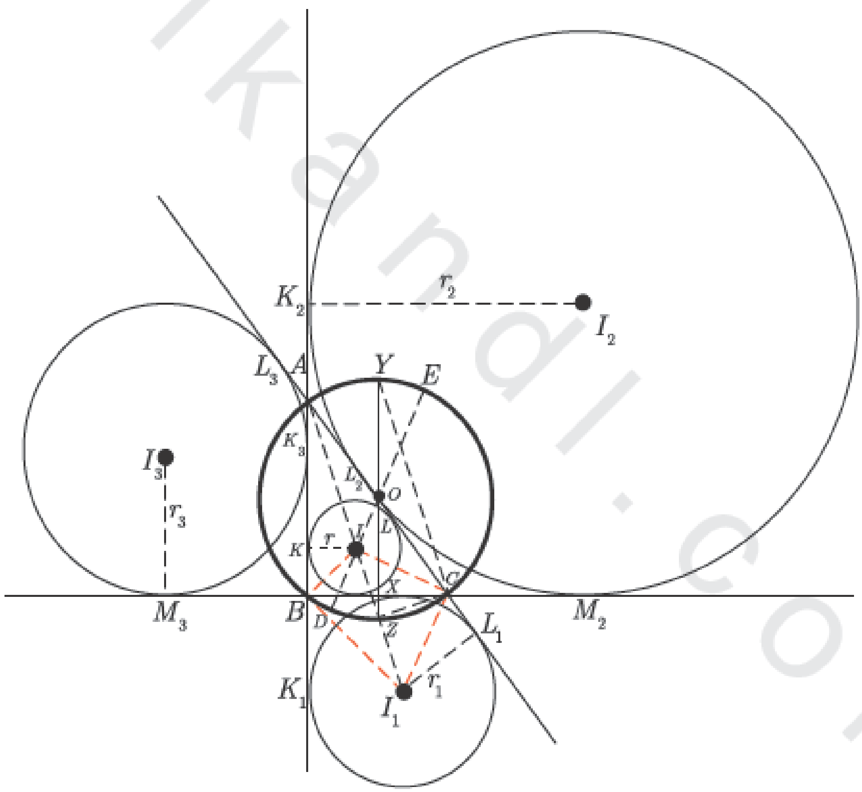
$$\left(AI\right)\left(CZ\right) = R^2 - d^2 \qquad \text{(I)}$$

ولأن $m\angle BAZ = m\angle CAZ$ ، $m\angle CYZ = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{CZ} = m\angle CAZ, m\angle BAZ = m\angle CAZ$ ، فإن :

$$m\angle CYZ = m\angle BAZ$$

إذن ؛ المثلثان القائمان $YZC, AIK$ متشابهان.

$$\Rightarrow \frac{AI}{YZ} = \frac{IK}{CZ} \Leftrightarrow (AI)(CZ) = (IK)(YZ)$$




شكل $5-7$

إذن،

$$\left(AI\right)\left(CZ\right)=\left(r\right)\left(2R\right) \qquad \left(\mathrm{II}\right)$$

من $\left(\mathrm{II}\right),\left(\mathrm{I}\right)$:

$$R^2-d^2=2Rr\Rightarrow d^2=R\left(R-2r\right).\bullet$$

ولاستكمال مناقشتنا حول المسافات بين مراكز تلك الدوائر، ستعطينا النظرية القادمة العلاقة بين المسافات بين مركز الدائرة المحيطة ومراكز الدوائر الثلاث الخارجية للمثلث.

**نظرية: 7–17** المسافات بين مركز الدائرة المحيطة ومراكز الدوائر الثلاث الخارجية يمكن الحصول عليها من العلاقات

$$\left(OI_1\right)^2=R\left(R+2r_1\right)$$
$$\left(OI_2\right)^2=R\left(R+2r_2\right)$$
$$\left(OI_3\right)^2=R\left(R+2r_3\right)$$

يمكن برهان هذه النظرية مثلما تعاملنا مع برهان النظرية 16 – 7 ؛ ولذا نترك برهانها كتمرين.

وفي الختام، ينبغي أن يوفر لك هذا الفصل كثيراً من الفهم حول العلاقات المتبادلة بين الدوائر الخارجية والدائرة الداخلية والدائرة المحيطة بالمثلث، ولكن هذا لا يعني أننا انتهينا كلياً من هذا الموضوع . والتدريبات التالية هي بمثابة نقطة انطلاق لإجراء مزيد من البحث في هذا الإطار.

### تدريبات

1. أثبت أنه إذا كان طول نصف قطر الدائرة الداخلية لمثلث يساوي نصف طول نصف قطر الدائرة المحيطة به ، فإن هذا المثلث يكون متطابق الأضلاع.

2. بالاستعانة بالشكل (1 – 7)، أثبت أن :

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}$$
$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}$$
$$\frac{1}{r_3}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}$$

3. أثبت أن مساحة المثلث القائم تساوي حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الناتجين من نقطة تماس الدائرة الداخلية مع الوتر.

4. أثبت أن $Rr=\dfrac{abc}{4s}$.

5. أثبت أن $R=\dfrac{abc}{4\left(area\ \Delta ABC\right)}$.

6. أثبت أن النسبة بين مساحة مثلث إلى مساحة المثلث الذي رؤوسه نقاط تماس الدائرة الداخلية للمثلث الأول تساوي ضعف طول نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث الأول إلى طول نصف قطر الدائرة الداخلية له.

7. أثبت أن : $r_1=\sqrt{\dfrac{s\left(s-b\right)\left(s-c\right)}{\left(s-a\right)}}$.

8. أثبت أن مجموع المسافات من مركز الدائرة المحيطة بمثلث إلى أضلاع هذا المثلث يساوي مجموع نصف قطر الدائرة المحيطة و نصف قطر الدائرة الداخلية لنفس المثلث.

9. أثبت صحة نظرية 17 – 7.

10.أثبت أنه إذا مر خط مستقيم برأس مثلث وقطع دائرتين من دوائره الخارجية، فإن حاصل ضرب مسافتين من هذه الرأس إلى نقطتين من نقاط التقاطع تساوي حاصل ضرب المسافتين الأخريين من نفس الرأس إلى النقطتين الباقيتين من نقاط التقاطع.

11.أثبت أن المستقيمات الماسة لدائرة داخلية لمثلث وتوازي أضلاع هذا المثلث تجتزئ من هذا المثلث ثلاثة مثلثات مجموع محيطاتها يساوي محيط المثلث الأصلي.

12. أثبت أن مجموع طولي ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية مطروحاً منه طول الوتر يساوي طول قطر الدائرة الداخلية لهذا المثلث .

13. أثبت أن :

$$h_a = \frac{2rr_1}{r_1 - r}$$

$$h_b = \frac{2rr_2}{r_2 - r}$$

$$h_c = \frac{2rr_3}{r_3 - r}$$

14. أثبت أن :

$$h_a = \frac{2r_2r_3}{r_2 + r_3}$$

$$h_b = \frac{2r_1r_3}{r_1 + r_3}$$

$$h_c = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$$

15. بالاستعانة (بالشكل 5 — 7)، أثبت أن :

$$(OI)^2 + (OI_1)^2 + (OI_2)^2 + (OI_3)^2 = 12R^2$$

16. بالاستعانة (بالشكل 5 — 7)، أثبت أن :

$$\left(II_1\right)^2+\left(II_2\right)^2+\left(II_3\right)^2=8R\left(2R-r\right)$$

17 . أثبت أنه إذا كانت $r_a, r_b, r_c$ أنصاف أقطار الدوائر الخارجية للمثلث والتي تمس على الترتيب أضلاعه $a, b, c$ فإن :

$$r_a=\frac{rs}{s-a}=\sqrt{\frac{s\left(s-b\right)\left(s-c\right)}{s-a}}$$

$$r_b=\frac{rs}{s-b}=\sqrt{\frac{s\left(s-a\right)\left(s-c\right)}{s-b}}$$

$$r_c=\frac{rs}{s-c}=\sqrt{\frac{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)}{s-c}}$$