الفصل السادس

الأشكال الرباعية

لقد بدأنا دراستنا للأشكال الرباعية في نهاية مقرر الهندسة في المرحلة الثانوية، وقبل ذلك كانت معظم دراستنا للأشكال الرباعية تتحدث عن الأشكال الخاصة منها، مثل أشباه المنحرف، ومتوازيات الأضلاع، والمعينات، والمستطيلات والمربعات. ولكننا هنا في هذا الجزء من الكتاب سنلقى نظرة على الشكل الرباعي في صورته العامة والتي لا تحمل أي خاصية مميزة، ثم ننظر للشكل الرباعي الدائري وهو الشكل الرباعي الذي تقع رؤوسه على دائرة.

الآن لنرسم أي شكل رباعي، ثم نحدد نقاط منتصفات أضلاعه. بالطبع ستكون الأدوات الهندسية مفيدة جداً في تجربتنا تلك. ماذا تتوقع أن يبدو الشكل الناتج ؟

لأجل الإجابة ، صل نقاط المنتصف التي حددتها بين كل ضلعين متتاليين، ثم لاحظ الشكل الرباعي الناتج، وستكون ملاحظتك ببساطة هي النظرية الأولى في هذا الفصل.

نظرية 6-1	الشكل الرباعي الناتج من القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفي كل ضلعين متتاليين في شكل رباعي آخر هو متوازي أضلاع.

البرهان

في الشكل $1-6$ النقاط P, Q, R, S منتصفات أضلاع الرباعي $ABCD$.

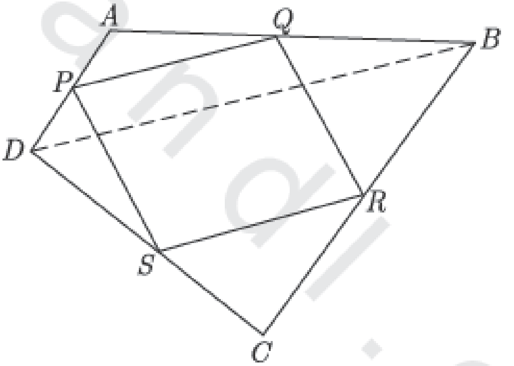
في ΔADB ، $\overline{PQ}$ قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين. إذن :

$$\overline{PQ} \parallel \overline{DB} \ , \quad PQ = \frac{1}{2}(DB)$$

وفي ΔCDB ، $\overline{SR}$ قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين. إذن :

$$\overline{SR} \,||\, \overline{DB}\,, SR = \frac{1}{2}(DB) \Rightarrow \overline{PQ} \,||\, \overline{SR}, PQ = SR$$

ومنه ، فالشكل الرباعي $PQRS$ متوازي أضلاع. ●



شكل $1-6$

والسؤال الآن، ما نوع الشكل الرباعي $ABCD$ ، الذي يجعل الشكل $PQRS$ مستطيلاً أو معيناً أو مربعاً ؟

نظرية 6–2

الشكل الرباعي الناتج من القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفي كل ضلعين متتاليين في شكل رباعي آخر قطراه متعامدان هو مستطيل .

البرهان

في الشكل $1-6$ ، لأن $\overline{AC} \parallel \overline{QR}$ ، فإن الشكل الرباعي $PQRS$ يكون مستطيلاً (أي متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متعامدان) إذا كان $\overline{PQ} \perp \overline{QR}$ ، وهذا صحيح لأن $\overline{DB} \perp \overline{AC}$.

نظرية 6–3 الشكل الرباعي الناتج من القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفي كل ضلعين متتاليين في شكل رباعي آخر قطراه متطابقان هو معين .

البرهان

ليكن لدينا شكل رباعي قطراه متطابقان (انظر الشكل $2-6$). في $\triangle ADB$ ، $\overline{PQ}$ قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين، إذن :

$$PQ = \frac{1}{2}(DB)$$

وبالمثل $\overline{SR}$ قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين في $\triangle CDB$ ، إذن :

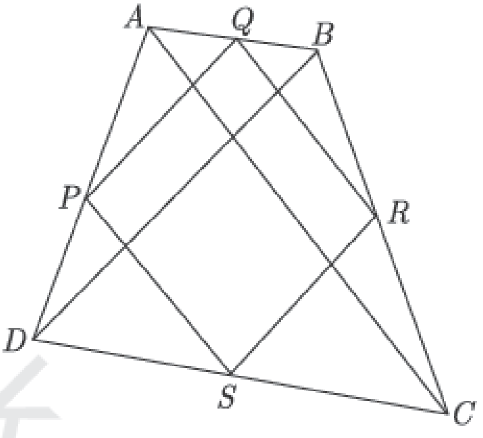
$$SR = \frac{1}{2}(DB)$$

ولكن

$DB = CA$ ، إذن:

$$PQ = QR$$

أي أن متوازي الأضلاع $PQRS$ معين . ●



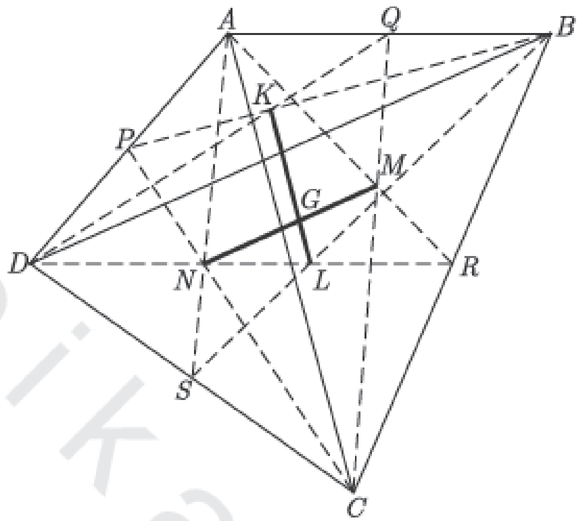
شكل $6-2$

بمقارنة نتيجتي نظريتي $6-2, 6-3$ ، يمكننا أن نتوصل إلى النظرية التالية.

نظرية 6–4 الشكل الرباعي الناتج من القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفي كل ضلعين متتاليين في شكل رباعي آخر قطراه متطابقان ومتعامدان هو مربع .

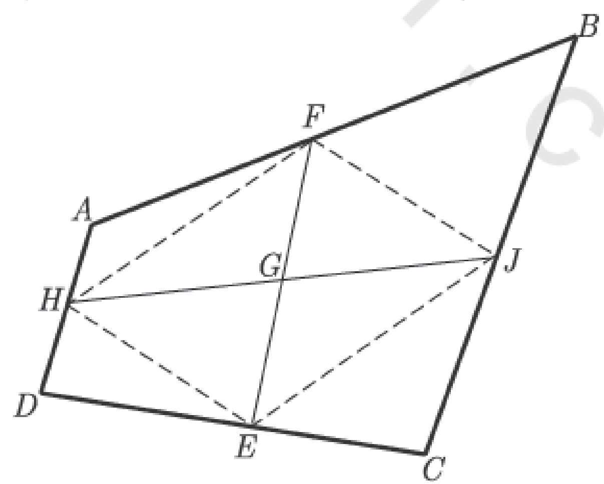
مراكز الشكل الرباعي Centers of a Quadrilateral

لتكن النقطتان M, N هما نقطتي تقاطع متوسطات $\Delta ABC, \Delta ADC$ على الترتيب، وكذلك النقطتان K, L هما نقطتي تقاطع متوسطات $\Delta ABD, \Delta BCD$ على الترتيب أيضاً، فإذا تقاطع كل من $\overline{MN}, \overline{KL}$ في النقطة G فإن هذه النقطة تكون مركز الشكل الرباعي Centroid (انظر الشكل $6-3$). كما يمكننا أيضاً تعريف النقطة G على النقطة التي يتوازن عندها ثقل الشكل الرباعي $ABCD$.



شكل $3-6$

أما *النقطة المتوسطة* في الرباعي فإنه يتم تعيينها من خلال تقاطع القطعتين الواصلتين بين منتصفي كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي، وكما في الشكل $4-6$ فإن النقطة G هي النقطة المتوسطة Centerpoint في الرباعي $ABCD$.



شكل $4-6$

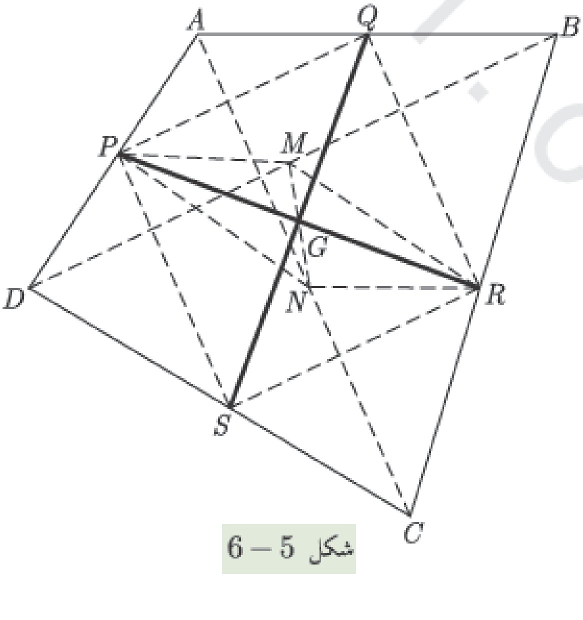
نظرية 6–5 القطعتان المستقيمتان الواصلتان بين منتصفي كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي تنصف كل منهما الأخرى.

البرهان

لأن القطعتين المستقيمتين الواصلتين بين منتصفي كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي هما قطرا متوازي الأضلاع الناتج من توصيل كل منتصفي ضلعين متتاليين في الشكل الرباعي، إذن ينصف كل منهما الآخر .●

على الشكل $6-5$ ، إذا كان لدينا النقاط P, Q, R, S منتصفات أضلاع الشكل الرباعي $ABCD$ ، والنقطة G الناتجة من تقاطع $\overline{PR}, \overline{QS}$ ، فإنه توجد علاقة بين $\overline{PR}, \overline{QS}$ ، $\overline{MN}$ ، حيث M, N منتصفا قطري الرباعي $ABCD$ ، وهذه العلاقة هي ما تنص عليه النظرية التالية.

نظرية 6–6 منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي قطري الشكل الرباعي هي النقطة المتوسطة لنفس الرباعي.



شكل $6-5$

البرهان

في الشكل 5 − 6 ، M,N منتصفا $\overline{PD},\overline{AC}$ ، والنقاط P,Q,R,S منتصفات أضلاع الشكل الرباعي $ABCD$. في ΔADC ، القطعة المستقيمة PN واصلة بين منتصفي ضلعين فيه. إذن :

$$\overline{PN} \parallel \overline{DC},\ PN = \frac{1}{2}(DC)$$

وفي ΔADC ، القطعة المستقيمة MR واصلة بين منتصفي ضلعين فيه. إذن :

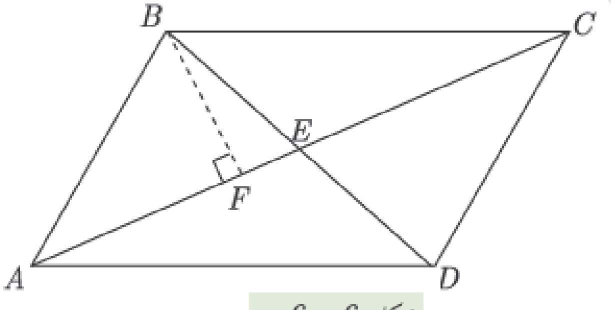
$$\overline{MR} \parallel \overline{DC},\ MR = \frac{1}{2}(DC) \Rightarrow \overline{PN} \parallel \overline{DC},\ PN = MR$$

إذن الشكل الرباعي $PMNR$ متوازي أضلاع ، وحيث إن قطريه ينصف كل منهما الآخر ويتقاطعان في النقطة G التي كنا قد أثبتنا أنها النقطة المتوسطة للشكل الرباعي $ABCD$. ●

وبما أننا مازلنا نتحدث عن متوازيات الأضلاع ، فإن النظرية القادمة تقدم علاقة مهمة ، وتسمح مع ما سبق بتقديم خواص أخرى مهمة للشكل الرباعي.

نظرية 6−7	مجموع مساحتي المربعين المنشأين على قطري متوازي أضلاع تساوي مجموع مساحات المربعات المنشأة على أضلاعه.

البرهان



شكل 6 − 6

قدمنا في برهان نظرية ستيوارت المعادلتين II,IV وسنستخدمهما في هذا البرهان. بعد تطبيقهما على متوازي الأضلاع $ABCD$ ، والمعطى $\overline{BF} \perp \overline{AC}$ (انظر الشكل $6-6$) نجد أنه في ΔABE :

$$(AB)^2 = (BF)^2 + (AE)^2 - 2(AE)(FE) \qquad \text{(I)}$$

بالمثل في ΔEBC :

$$(BC)^2 = (BE)^2 + (EC)^2 + 2(EC)(FE) \qquad \text{(II)}$$

بالجمع

$$(AB)^2 + (BC)^2 =$$
$$(BE)^2 + (AE)^2 + (BE)^2 + (BC)^2 - 2(AE)(FE) + 2(EC)(FE)$$

ولكن $AE = EC$ (قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر)

$$(AB)^2 + (BC)^2 = 2(BE)^2 + 2(AE)^2 \qquad \text{(III)}$$

بالمثل في ΔCAD :

$$(CD)^2 + (DA)^2 = 2(DE)^2 + 2(CE)^2 \qquad \text{(IV)}$$

بالجمع

$$(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (DA)^2 =$$
$$2(BE)^2 + 2(AE)^2 + 2(DE)^2 + 2(CE)^2$$

ولكن $DE = BE, AE = EC$

$$\Rightarrow (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (DA)^2 = 4(BE)^2 + 4(AE)^2$$
$$= (2BE)^2 + (2AE)^2 = (BD)^2 + (AC)^2 \; . \bullet$$

والآن لندمج النظريتين $7-6$ ، $1-6$ ، ونشاهد ما يحدث.

نظرية 6–8	مجموع مساحتي المربعين المنشأين على قطري أي شكل رباعي تساوي ضعف مجموع مساحات المربعين المنشأين على القطعتين المستقيمتين بين منتصفي كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي .

البرهان

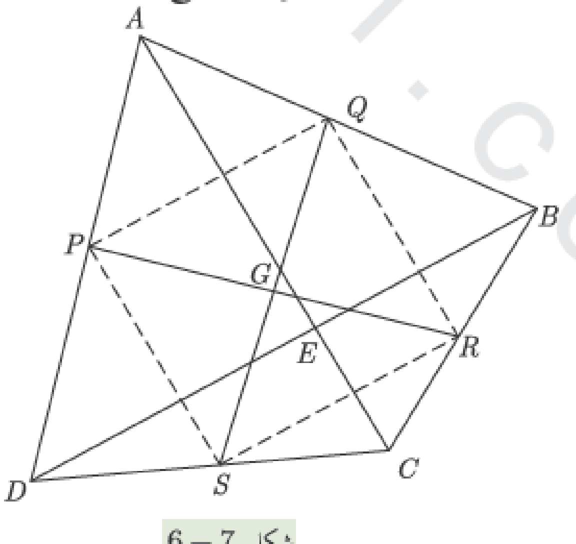
لقد أثبتنا في برهان النظرية 1 − 6 أن : $\overline{PQ} \parallel \overline{DB}, PQ = \frac{1}{2}(DB)$ ، وهذا يقود إلى :

$$(PQ)^2 = \frac{1}{4}(DB)^2,\ (SR)^2 = \frac{1}{4}(DB)^2 \qquad \text{(I)}$$

بالمثل $QR = \frac{1}{2}(AC), PS = \frac{1}{2}(AC)$ وهذا يقود إلى

$$(QR)^2 = \frac{1}{4}(AC)^2,\ (PS)^2 = \frac{1}{4}(AC)^2 \qquad \text{(II)}$$

وبتطبيق نظرية 7 − 6 على متوازي الأضلاع $PQRS$ (الشكل 7 − 6) نحصل على :



شكل 7 − 6

$$(PQ)^2 + (SR)^2 + (QR)^2 + (PS)^2 = (PR)^2 + (QS)^2 \qquad \text{(III)}$$

بالتعويض من $(\mathrm{I}),(\mathrm{II})$ في (III) :

$$\frac{1}{4}(DB)^2 + \frac{1}{4}(DB)^2 + \frac{1}{4}(AC)^2 + \frac{1}{4}(AC)^2 = (PR)^2 + (QS)^2$$

$$\frac{1}{2}(DB)^2 + \frac{1}{2}(AC)^2 = (PR)^2 + (QS)^2$$

$$(DB)^2 + (AC)^2 = 2\left[(PR)^2 + (QS)^2\right]. \bullet$$

الأشكال الرباعية الدائرية Cyclic Quadrilaterals

ربما تكون صيغة هيرون الإسكندري Heron of Alexandria لإيجاد مساحة مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه والتي تنص على

$$\text{مساحة المثلث} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

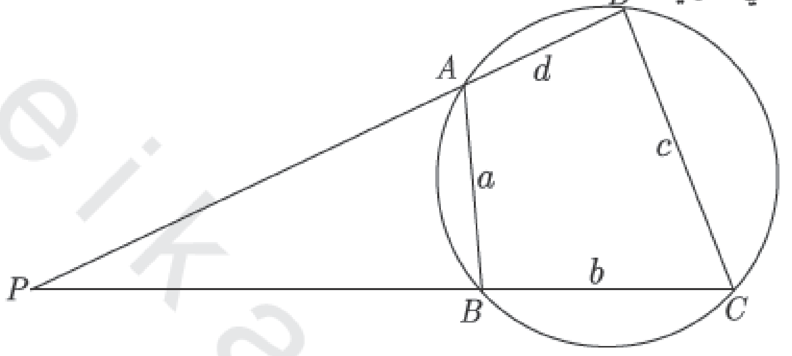
(حيث a, b, c أطوال أضلاع المثلث بينما $s = \dfrac{a+b+c}{2}$)

قد صادفتك قبل ذلك، وعندها ربما أيضاً تكون قد فكرت في توسعة تلك الصيغة لتشمل الشكل الرباعي ، معتبراً أن المثلث هو شكل رباعي طول أحد أضلاعه صفر. إن كان هذا تفكيرك فإنك تسلك نفس مسار التفكير الذي سلكه الرياضي الهندي براهاماجوبتا Brahmagupta * والذي عاش في بدايات القرن السابع الميلادي، واستخدم الصيغة التالية لإيجاد مساحة الرباعي الدائري والذي أطوال أضلاعه a, b, c, d، وطول نصف محيطه s،

* في العام ٦٢٨م، كتب براهاماجوبتا Brahmagupta الذي ولد في عام ٥٩٨ ما يسمى " النظام المنقح لبراهما– the Revised System of Brahma" في اثني عشر أو ثلاثة عشر فصلاً في الرياضيات .

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \text{مساحة الرباعي الدائري}$$

لاحظ أن براهاماجوبتا استخدم صيغة هيرون لإيجاد مساحة المثلث معتبراً أن المثلث هو رباعي دائري فيه $d = 0$.



شكل $8-6$

البرهان (صيغة براهاماجوبتا)

أولاً، لندرس الحالة التي فيها الشكل الرباعي $ABCD$ مستطيل أي $a = c, b = d$ وبفرض أن صيغة براهاماجوبتا صحيحة، فإن :

$$ABCD \text{ مساحة المستطيل } = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$
$$= \sqrt{(a+b-a)(a+b-b)(a+b-a)(a+b-b)}$$
$$= \sqrt{a^2b^2} = ab$$

وهذه هي مساحة المستطيل كما نحصل عليها بالطريقة العادية .

والآن لنعتبر $ABCD$ رباعياً دائرياً ليس مستطيل الشكل (انظر الشكل $8-6$). ونمد $\overline{DA}, \overline{CB}$ ليتقاطعا في P ، ولنفرض أن $PC = x, PD = y$ ثم نطبق صيغة هيرون : مساحة ΔDCP =

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+c)(y-x+c)(x+y-c)(x-y+c)} \qquad \text{(I)}$$

بما أن : $\angle CDA$ تكمل $\angle CBA$ ، $\angle ABP$ تكمل $\angle CBA$. إذن :

$$\angle CDA \cong \angle ABP$$

$$\Rightarrow \Delta BAP \sim \Delta DCP \qquad \text{(II)}$$

$$\Rightarrow \frac{[\Delta BAP]}{[\Delta DCP]}=\frac{a^2}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{[\Delta DCP]}{[\Delta DCP]}-\frac{[\Delta BAP]}{[\Delta DCP]}=\frac{c^2}{c^2}-\frac{a^2}{c^2}$$

$$\frac{[\Delta DCP]-[\Delta BAP]}{[\Delta DCP]}=\frac{areaABCD}{[\Delta DCP]}=\frac{c^2-a^2}{c^2} \qquad \text{(III)}$$

من (II) نحصل أيضاً على :

$$\frac{x}{c}=\frac{y-d}{a} \qquad \text{(IV)}$$

$$\frac{y}{c}=\frac{x-b}{a} \qquad \text{(V)}$$

بالجمع

$$\frac{x+y}{c}=\frac{x+y-d-b}{a}$$

$$\Leftrightarrow x+y=\frac{c}{c-a}(d+b)$$

$$\Leftrightarrow x+y+c=\frac{c}{c-a}(b+c+d-a) \qquad \text{(VI)}$$

وبطريقة مماثلة نحصل على العلاقات التالية :

$$y-x+c=\frac{c}{c+a}(a+c+d-b) \qquad \text{(VII)}$$

$$y+x-c=\frac{c}{c-a}(a+b+d-c) \qquad (\mathrm{VIII})$$

$$x-y+c=\frac{c}{c+a}(a+b+c-d) \qquad (\mathrm{IX})$$

بالتعويض من $(\mathrm{VI}),(\mathrm{VII}),(\mathrm{VIII}),(\mathrm{IX})$ في (I) نحصل على أن مساحة ΔDCP تساوي

$$\frac{c^2}{4(a^2-c^2)}\sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}$$

$$=\frac{c^2}{a^2-c^2}\frac{\sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}}{4}$$

$$=\frac{c^2}{a^2-c^2}\sqrt{\frac{(b+c+d-a)}{2}\cdot\frac{(a+c+d-b)}{2}\cdot\frac{(a+b+d-c)}{2}\cdot\frac{(a+b+c-d)}{2}}$$

$$=\frac{c^2}{a^2-c^2}\sqrt{\frac{(a+b+c+d-2a)}{2}\frac{(a+b+c+d-2b)}{2}\frac{(a+b+c+d-2c)}{2}\frac{(a+b+c+d-2d)}{2}}$$

ولكن : $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ ،

$$[\Delta DCP]=\frac{c^2}{a^2-c^2}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

من الممكن صياغة العلاقة (III) على الصورة :

$$ABCD \text{ مساحة الرباعي الدائري } =\frac{c^2-a^2}{c^2}\cdot[\Delta DCP]$$

$$= \frac{c^2 - a^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{a^2 - c^2} \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$
$$= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}. \bullet$$

وفي تطوير ممتع لصيغة براهاماجوبتا، يمكننا صياغة العلاقة التالية والتي سنقدمها بدون برهان :

مساحة سطح أي شكل رباعي (محدب) تساوي

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$$

حيث : a, b, c, d أطوال أضلاع الشكل الرباعي ، $s = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ ، α, γ قياسا زاويتين متقابلتين في الرباعي.

والصيغة السابقة تثبت لنا أن أكبر قيمة ممكنة لمساحة أي شكل رباعي معلوم أطوال أضلاعه الأربعة هي عندما : $abcd \cdot \cos^2\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\right) = 0$ وهذه الحالة لا تتحقق إلا عندما : $\alpha + \gamma = 180^\circ$ وهذا لا يتحقق إلا عندما يكون الشكل الرباعي دائرياً.

وهناك العديد من النظريات الشيقة التي تتحدث عن الشكل الرباعي الدائري، ولكن قبل أن نقوم بدراسة هذه النظريات، ننصح القارئ بالعودة إلى صفحة 21 التي توضح طرق إثبات أن الشكل الرباعي دائري.

وكذلك قدم برهاماجوبتا صيغاً لإيجاد طولي قطري الشكل الرباعي الدائري. وهي :

$$m^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}, \; n^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$

حيث a, b, c, d أطوال أضلاع الرباعي الدائري، m, n طولا قطريه.

وقبل أن نترك هذا الرياضي الرائع برهماجوبتا، نعرض النظرية التالية والتي تنسب إليه أيضاً.

نظرية 9-6	في الشكل الرباعي الدائري المتعامد قطراه، المستقيم المار بنقطة تقاطع القطرين والعمودي على احد أضلاع الرباعي الدائري ينصف الضلع المقابل لهذا الضلع.

البرهان

ليكن $\overline{AC}, \overline{BD}$ قطرين متعامدين في الرباعي الدائري $ABCD$ متقاطعين في النقطة G، $\overleftrightarrow{GE} \perp \overleftrightarrow{AED}$ (انظر الشكل $9-6$)، والمطلوب هو إثبات أن $\overleftrightarrow{GE}$ ينصف $\overline{BC}$ في النقطة P. في المثلث القائم الزاوية AEG، $\angle 5$ تكمل $\angle 1$، $\angle 2$ تكمل $\angle 1$، إذن:

$\angle 5 \cong \angle 2$ ولأن $\angle 4 \cong \angle 2$

إذن :

$$\angle 5 \cong \angle 4$$

ولكن $\angle 6 \cong \angle 5$ (كل منهما يساوي $\frac{1}{2} m\widehat{DC}$)،

ومن ذلك نستنتج أن:

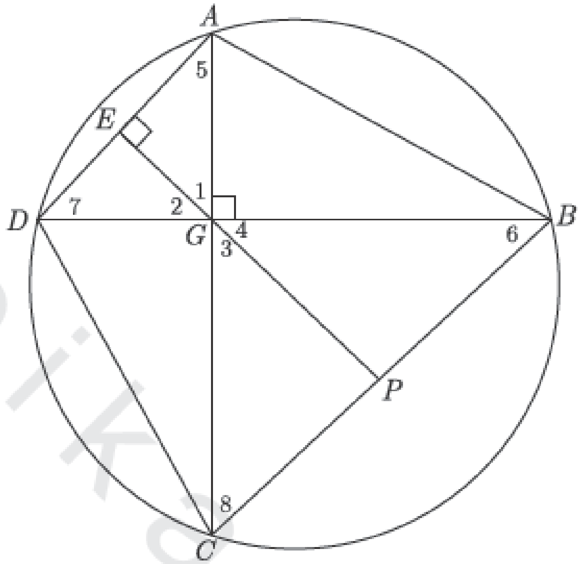
$\angle 4 \cong \angle 6$، $BP = GP$.

بالمثل لأن: $\angle 3 \cong \angle 7$، $\angle 8 \cong \angle 7$ فإن:

$$GP = PC$$

إذن:

$CP = BP$. ●

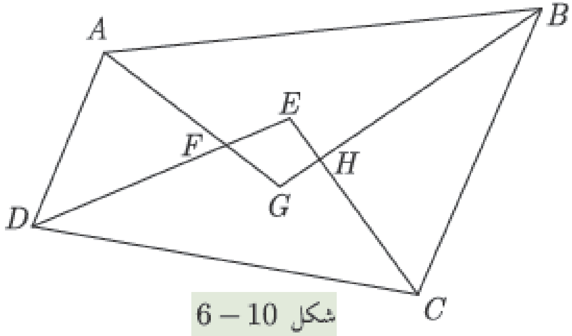


شكل 9 – 6

من الطرق الشيقة لإنشاء شكل رباعي دائري هو ما تقدمه النظرية التالية :

نظرية 6–10	إذا رسمنا منصف زاوية من كل زوج من الزوايا المتجاورة في شكل رباعي فإن القطع المستقيمة الواصلة بين نقاط التقاطع هي رؤوس شكل رباعي دائري.

البرهان *1*



شكل 10 – 6

في الشكل $10-6$ ، منصفات زوايا الشكل الرباعي $ABCD$ تلتقي لتشكل الرباعي $EFGH$ وسنحاول أن نثبت أن الشكل الرباعي السابق هو رباعي دائري.

بما أن $m\angle BAD + m\angle ADC + m\angle DCB + m\angle CBA = 360°$. إذن :

$$\frac{1}{2}m\angle BAD + \frac{1}{2}m\angle ADC + \frac{1}{2}m\angle DCB + \frac{1}{2}m\angle CBA = \frac{1}{2}\left(360°\right) = 180°$$

بالتعويض نستنتج أن :

$$m\angle EDC + m\angle ECD + m\angle GAB + m\angle ABG = 180° \qquad (\mathrm{I})$$

الآن، في $\Delta ABG, \Delta DEC$ ، لدينا :

$$\begin{aligned} m\angle EDC + m\angle ECD + m\angle GAB + m\angle ABG + m\angle AGB \\ + m\angle DEC = 2\left(180°\right) \end{aligned} \qquad (\mathrm{II})$$

بطرح (I) من (II) نحصل على:

$$m\angle AGB + m\angle DEC = 180°$$

ولأن زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي $EFGH$ متكاملتان، فإن الزاويتين الباقيتين هما أيضاً متكاملتان، أي أن الرباعي $EFGH$ هو رباعي دائري . ●

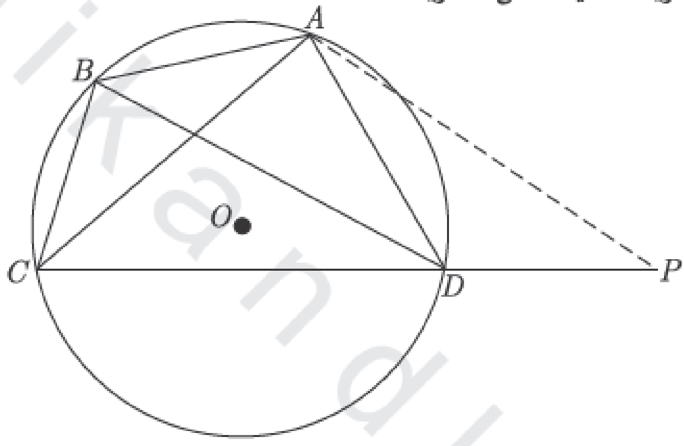
نظرية بطليموس Ptolemy's theorem

ربما تكون النظرية الأشهر التي تحدثت عن الشكل الرباعي الدائري هي التي تنسب لكلاوديوس بطليموس الإسكندري Claudius Ptolemaeus of Alexandria (والذي يعرف في المراجع الأجنبية باسم Ptolemy) وقد وردت في كتابه الذي يحمل عنوان : المجسطي* " (١٥٠ بعد الميلاد) والذي يعد أقدم الكتب المعروفة في الفلك.

* العنوان اليوناني Syntaxis Mathematica ، وتعني التجميع الرياضي أو الفلكي ، أما العنوان العربي للكتاب فكان المجسطي Almagest " ويعني الأطروحة الكبرى في الرياضيات. والكتاب عبارة عن دليل عن كل ما عرفه القدماء في علم الفلك الرياضي في ذلك. ويحتوي المجلد الأول من ثلاثة عشر مجلداً والتي يتألف منها هذا العمل الضخم على النظرية التي تحمل اسم نظرية بطليموس Ptolemy's theorem.

نظرية 6-11 **(نظرية بطليموس)** حاصل ضرب طولي قطري الرباعي الدائري يساوي مجموع حاصل ضربي كل زوج من الضلعين المتقابلين في الشكل.

سوف نقوم بإثبات النظرية بطريقتين مختلفتين، وسندمج إثبات عكس النظرية مع الطريقة الثانية ضمن النظرية 12 — 6.



شكل 11 — 6

في الشكل 11 — 6 ، الرباعي $ABCD$ مرسوم داخل الدائرة O ، والمستقيم المرسوم والمار بالنقطة A يلاقي $\overleftrightarrow{CD}$ في النقطة P ، بحيث

$$m\angle BAC = m\angle DAP \qquad \text{(I)}$$

ولأن الرباعي $BACD$ دائري، إذن:

$$m\angle ABC + m\angle ADC = 180°$$

ولكن

$$m\angle ADP + m\angle ADC = 180°$$

فيكون لدينا

$$m\angle ABC = m\angle ADP \qquad (\text{II})$$

$$\Delta BAC \sim \Delta DAP \ (AA) \qquad (\text{III})$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DP}$$

$$\Rightarrow \quad DP = \frac{(AD)\cdot(BC)}{AB} \qquad (\text{IV})$$

من (I) : $m\angle BAD = m\angle CAP$ ، ومن (III) : $\frac{AC}{AP} = \frac{AB}{AD}$. إذن :

$$\Delta ABD \sim \Delta ACP \ (SAS)$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{CP} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow CP = \frac{(AC)\cdot(BD)}{AB} \qquad (\text{V})$$

ولكن

$$CP = CD + DP \qquad (\text{VI})$$

بالتعويض من $(\text{V}),(\text{IV})$ في (VI) :

$$\frac{(AC)\cdot(BD)}{AB} = CD + \frac{(AD)\cdot(BC)}{AB}$$

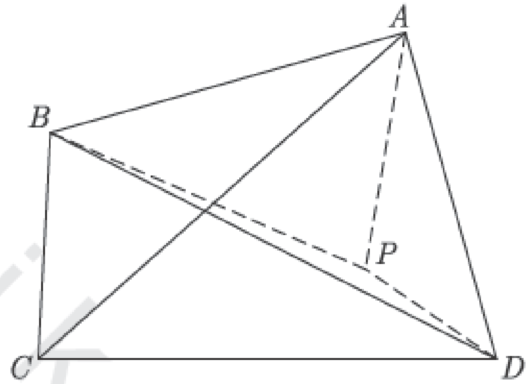
إذن ، $(AC)\cdot(BD) = (AB)\cdot(CD) + (AD)\cdot(BC)$. ●

البرهان II

في الرباعي $ABCD$ (الشكل $12-6$)، نرسم ΔDAP على الضلع $\overline{AD}$ يشابه ΔCAB ، ومن ذلك نستنتج أن :

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{PD} \qquad (\text{I})$$

$$\Rightarrow (AC)\cdot(PD) = (AD)\cdot(BC) \qquad \text{(II)}$$



شكل 12 − 6

ولأن $m\angle BAC = m\angle PAD, m\angle BAP = m\angle CAD$ ؛ إذن، من (I) :

$$\Delta BAP \sim \Delta CAD \ (SAS) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CD}$$

وعليه فإن :

$$(AC)\cdot(BP) = (AB)\cdot(CD) \qquad \text{(III)}$$

بجمع $(\text{II}),(\text{III})$:

$$(AC)(BP + PD) = (AD)\cdot(BC) + (AB)\cdot(CD) \qquad \text{(IV)}$$

والآن لنناقش وضع النقطة P بالنسبة للقطر $\overline{BD}$ ، فمن تشابه $\Delta DAP, \Delta CAB$ نستنتج أن :

$m\angle ADP = m\angle ACB$. ومن المعطى الخاص بأن الشكل $ABCD$ رباعي دائري نستنتج أيضاً أن $m\angle ADB = m\angle ACB$ ، ومن ذلك فإن النقطة P يجب أن تقع على $\overline{BD}$ إذا وفقط إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ دائرياً. هذا يقود إلى أن :

$$BP + PD = BD \qquad \text{(V)}$$

بالتعويض من $(\mathrm{IV}),(\mathrm{V})$:

إذن : $(AC)\cdot(BD)=(AB)\cdot(CD)+(AC)\cdot(BD)$. ●

لاحظ أننا هنا قد أثبتنا كلاً من نظرية بطليموس وعكسها، ونقدم ذلك تفصيلاً في النظرية التالية .

نظرية 6-12

(عكس نظرية بطليموس) إذا كان حاصل ضرب طولي قطري شكل رباعي يساوي مجموع حاصل ضربي كل زوج من الضلعين المتقابلين فيه ، فإن هذا الشكل الرباعي يكون دائرياً.

البرهان

نفرض أن الرباعي $ABCD$ ليس دائرياً (انظر الشكل $11-6$)، وإذا كانت النقاط C,D,P على استقامة واحدة، فإن $m\angle ADP \neq m\angle ABC$ ، ولكن إذا كانت النقاط C,D,P ليست على استقامة واحدة فإنه من الممكن أن يكون $m\angle ADP = m\angle ABC$ ، إذن $CP < CD + DP$ ومن $(\mathrm{IV}),(\mathrm{V})$ في البرهان الأول لنظرية بطليموس :

$$(AC)\cdot(BD)<(AB)\cdot(CD)+(AD)\cdot(BC)$$

ولكن ذلك يناقض المعطى :

$$(AC)\cdot(BD)=(AB)\cdot(CD)+(AD)\cdot(BC)$$

إذن الرباعي $ABCD$ دائري .●

والآن، لندرس تطويراً بسيطاً لنظرية بطليموس

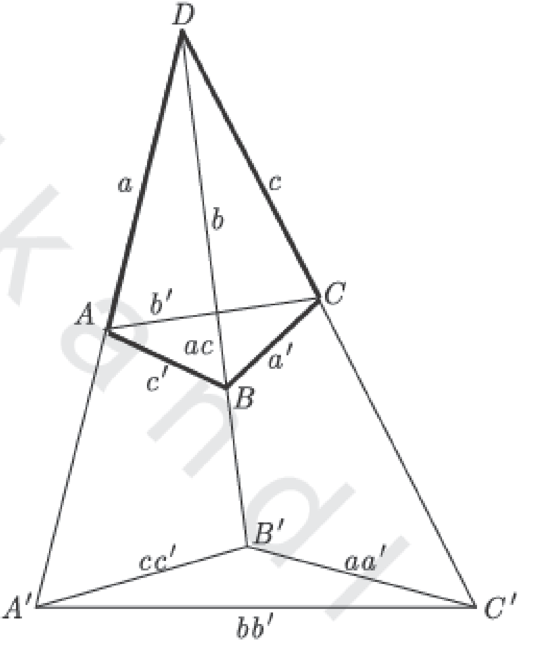
نظرية 6-13

ليكن لدينا رباعي غير دائري $ABCD$ ، ولنفرض فيه أن $AD=a$ ، $BD=b$ ، $CD=c$ ، $BC=a'$ ، $AC=b'$ ، $AB=c'$. إن مجموع أي عددين من الأعداد aa',bb',cc' أكبر من العدد الثالث (انظر الشكل $13-6$).

البرهان*

لننشئ A' على $\overleftrightarrow{AD}$ بحيث $DA' = bc$. ولننشئ B' على $\overleftrightarrow{BD}$ بحيث $DB' = ac$.

وأخيراً لننشئ C' على $\overleftrightarrow{CD}$ بحيث $DC' = ab$.



شكل 13 – 6

وعند ذلك سنلاحظ أن $\Delta DB'A' \sim \Delta DAB$ لأنهما يحتويان على زاوية مشتركة $\angle ADB$ وأضلاع متجاورة متناسبة كالتالي:

$$\frac{DB'}{DA} = \frac{ac}{a} = c, \frac{DA'}{DB} = \frac{bc}{b} = c \Rightarrow \frac{DA'}{DB} = \frac{DB'}{DA} = c$$

* البرهان مقدم من الدكتور/ هاري دبليو أبلجيت Harry W. Appelgate من جامعة مدينة نيويورك The City University of New York.

وهذا يعني أن $c = \dfrac{A'B'}{AB}$ أو $A'B' = cc'$ ، وبالمثل نستطيع الوصول إلى أن $B'C' = aa', A'C' = bb'$.

وأخيراً في $\Delta A'B'C'$ ، وبتطبيق متباينة المثلث نحصل على :

$$aa' + bb' > cc',\ aa' + cc' > bb',\ cc' + bb' > aa'. \bullet$$

والآن – عزيزي القارئ – هل فكرت في الوضع الذي تتحقق فيه المساواة : $aa' + cc' = bb'$ ؟

تطبيقات على نظرية بطليموس

في هذا الجزء سنقدم بعض النتائج المباشرة لنظرية بطليموس .

التطبيق 1

إذا مرت أي دائرة بالرأس A في متوازي الأضلاع $ABCD$ وقطعت AB, AD في R, P على الترتيب كما قطعت قطر متوازي الأضلاع AC في Q ، فأثبت أن :

$$(AQ)(AC) = (AP)(AB) + (AR)(AD)$$

البرهان

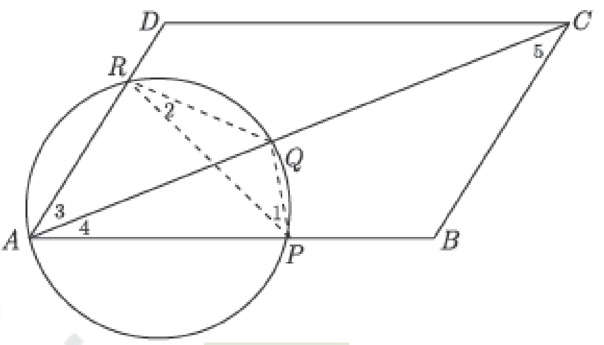
نرسم $\overline{RP}, \overline{QP}, \overline{RQ}$ كما في الشكل $6-14$ ، $m\angle 2 = m\angle 4, m\angle 1 = m\angle 3$.

ولكن $m\angle 3 = m\angle 5$ ، إذن $m\angle 1 = m\angle 5$. ومن ذلك نستنتج أن :

$$\Delta RQP \sim \Delta ABC .$$

ولكن أيضاً $\Delta CDA \cong \Delta ABC$ ؛ إذن :

$$\Delta RQP \sim \Delta ABC \sim \Delta CDA .$$



شكل $14-6$

$$\frac{AC}{RP}=\frac{AB}{RQ}=\frac{AD}{PQ} \qquad \text{(I)}$$

بتطبيق نظرية بطليموس على الرباعي $RQPA$:

$$(AQ)(RP)=(RQ)(AP)+(PQ)(AB) \qquad \text{(II)}$$

بضرب كل نسبة من النسب المتساوية في العلاقة (I) في كل حد من حدود العلاقة (II) نحصل على :

$$(AQ)(RP)\frac{AC}{RP}=(RQ)(AP)\frac{AB}{RQ}+(PQ)(AB)\frac{AD}{PQ}$$

أو

$$(AQ)(AC)=(AB)(AP)+(AD)(AB).$$ ●

التطبيق 2

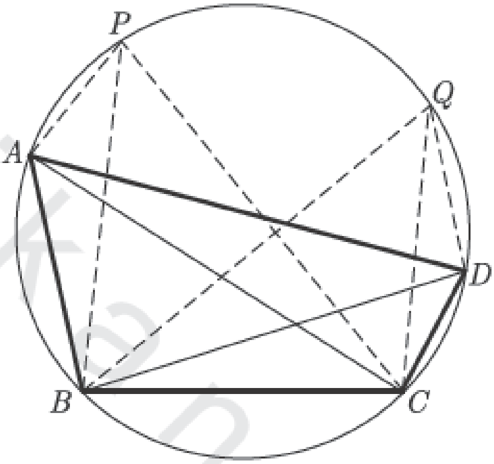
أوجد النسبة بين طولي قطري الشكل الرباعي الدائري وبين أطوال أضلاعه.

البرهان

لنختر أي نقطتين P,Q على الدائرة المحيطة بالشكل الرباعي $ABCD$ ، بحيث $PA=DC$ ، $QD=AB$ كما في الشكل $15-6$.

بتطبيق نظرية بطليموس على الرباعي الدائري $ABCD$

$$(AC)(PB) = (AB)(PC) + (BC)(PA) \qquad (\mathrm{I})$$



شكل $15 - 6$

وبتطبيق نظرية بطليموس على الرباعي الدائري $BCDQ$

$$(BD)(QC) = (DC)(QB) + (BC)(QD) \qquad (\mathrm{II})$$

الآن، لأن $PA + AB = DC + QD$ ، فإن:

$$m\widehat{PAB} = m\widehat{QDC} \text{ ، } PB = QC.$$

ولأن $m\widehat{PBC} = m\widehat{DBA}$ ، فإن:

$$PC = AD$$

وكذلك لأن $m\widehat{QCB} = m\widehat{ACD}$ ، فإن $QB = AD$. وأخيراً بقسمة (I) على (II) وبالتعويض عن أي حد يحتوي P, Q نحصل على :

$$\frac{(AC)(PB)}{(BD)(QC)}=\frac{(AB)(PC)+(BC)(PA)}{(DC)(QB)+(BC)(QD)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(AC)(PB)}{(BD)(PB)}=\frac{(AB)(AD)+(BC)(DC)}{(DC)(AD)+(BC)(AB)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AC}{BD}=\frac{(AB)(AD)+(BC)(DC)}{(DC)(AD)+(BC)(AB)}.\bullet$$

التطبيق 3

إذا كانت النقطة P تقع داخل متوازي الأضلاع $ABCD$ بحيث $\angle APB$ تكمل $\angle CPD$ (الشكل $16-6$). فأثبت أن $.(AB)(AD)=(BP)(DP)+(AP)(CP)$

البرهان

نرسم على الضلع $\overline{AB}$ في متوازي الأضلاع $ABCD$ ، $\Delta AP'B \cong \Delta DPC$ ،

إذن

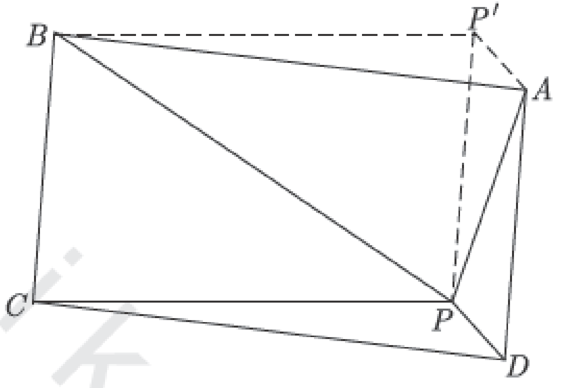
$$DP = AP',\ CP = BP' \qquad (\mathrm{I})$$

لأن $\angle APB$ تكمل $\angle CPD$ ، $m\angle BP'A = m\angle CPD$ ، $\angle APB$ تكمل $\angle BP'A$ ، فإن الشكل الرباعي $BP'AP$ دائري ، وبتطبيق نظرية بطليموس عليه نحصل على :

$$(AB)(PP') = (BP)(AP') + (AP)(BP')$$

من (I) لدينا :

$$(AB)(PP') = (BP)(DP) + (AP)(CP) \qquad (\text{II})$$



شكل $16 - 6$

الآن، لأن $m\angle BAP' = m\angle CDP$ ، $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ ، فإن $\overline{PD} \parallel \overline{P'A}$ ، ومن ذلك فإن الشكل $PDAP'$ متوازي أضلاع ؛ إذن :

$$.PP' = AD$$

بالتعويض في (II) :

$$(AB)(AD) = (BP)(DP) + (AP)(CP). \bullet$$

وبعد أن انتهينا من التطبيق السابق، فإن التطبيقات الخمسة التالية تقدم لنا نمطيات جميلة تدور حول المضلعات المنتظمة.

التطبيق 4

إذا رسم ΔABC المتطابق الضلعين ($AB = AC$) داخل دائرة، وكانت النقطة $P \in \widehat{BC}$ فأثبت أن $\dfrac{PA}{PB + PC} = \dfrac{AC}{BC}$ ، وهو ثابت للمثلث المعطى.

البرهان

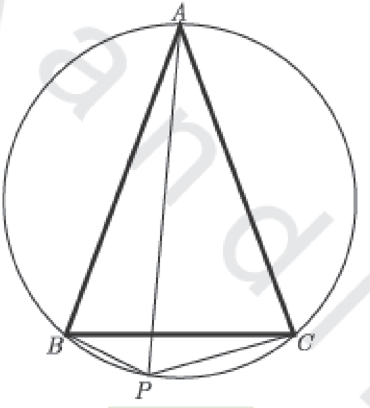
بتطبيق نظرية بطليموس على الدائري $ABPC$ (الشكل $15-6$):

$$(PA)(BC)=(BP)(AC)+(PC)(AB)$$

ولكن : $AB=AC$ ، إذن:

$$(PA)(BC)=AC(BP+AB)$$

$$\Leftrightarrow \frac{PA}{PB+PC}=\frac{AC}{BC}.$$ ●



شكل $17-6$

التطبيق 5

إذا رسم ΔABC المتطابق الأضلاع داخل دائرة ، وكانت النقطة $P\in\widehat{BC}$

فأثبت أن :

$PA=PB+PC$.

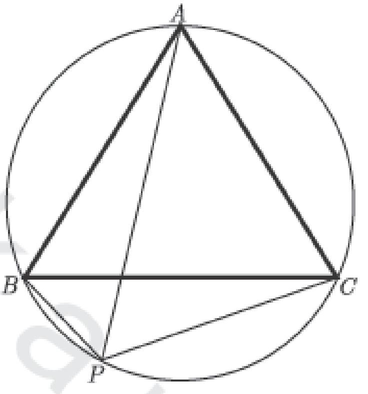
البرهان

بتطبيق نظرية بطليموس على الدائري $ABPC$ (الشكل $18-6$):

$$(PA)(BC) = (BP)(AC) + (PC)(AB) \qquad (I)$$

ولكن : $AB = AC = BC$

$$\Rightarrow PA = PB + PC \;.●$$



شكل $18 - 6$

التطبيق 6

إذا رسم المربع $ABCD$ داخل دائرة، وكانت النقطة $P \in \widehat{BC}$ فأثبت أن

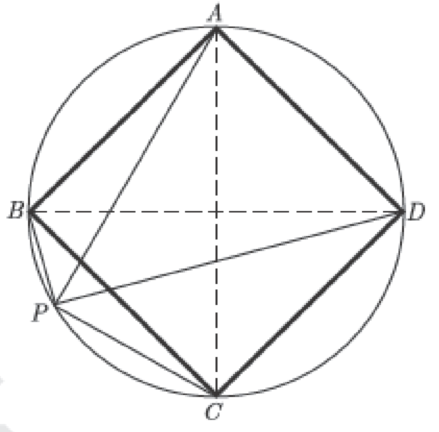
$$\frac{PA + PC}{PB + PD} = \frac{PD}{PA}$$

البرهان

في الشكل $19 - 6$، ΔABD متطابق الضلعين ($AB = AD$)، وباستخدام

ما توصلنا إليه في التطبيق 4 ، نحصل على :

$$\frac{PA}{PB + PD} = \frac{AD}{DB} \qquad (I)$$



شكل $6-19$

بالمثل في المثلث المتطابق الضلعين ΔADC :

$$\frac{PD}{PA+PC}=\frac{DC}{AC} \qquad (\text{II})$$

ولكن : $AD=DC, DB=AC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{DC}{AC} \qquad (\text{III})$$

من $(\text{I}),(\text{II}),(\text{III})$ نحصل على :

$$\frac{PA}{PB+PD}=\frac{PD}{PA+PC} \Leftrightarrow \frac{PA+PC}{PB+PD}=\frac{PD}{PA}.$$ ●

التطبيق 7

إذا رسم الخماسي المنتظم $ABCDE$ ، داخل دائرة ، وكانت النقطة $P \in \overset{\frown}{BC}$ فأثبت أن :

$$PA+PD=PB+PC+PE$$

البرهان

في الرباعي $ABPC$ (انظر الشكل 20 – 6) وبتطبيق نظرية بطليموس :

شكل المتطابق الضلعين ($AB = AD$) وباستخدام ما توصلنا إليه في التطبيق 4 ،

نحصل على :

$$(PA)(BC) = (BA)(PC) + (PB)(AC) \qquad \text{(I)}$$

وفي الرباعي $BPCD$:

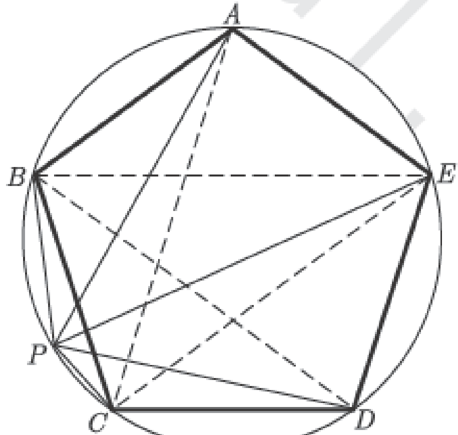
$$(PD)(BC) = (CD)(PB) + (PC)(BD) \qquad \text{(II)}$$

ولكن : $AD = DC, DB = AC$ ، وبجمع $\text{(I)}, \text{(II)}$ نحصل على

$$BC(PA + PD) = BA(PB + PC) + AC(PB + PC) \qquad \text{(III)}$$

ولأن ΔBEC متطابق الضلعين، وبتطبيق ما توصلنا إليه في التطبيق 4 نحصل على :

$$\frac{CE}{BC} = \frac{PE}{PB + PC} \Leftrightarrow \frac{(PE)(BC)}{(PB + PC)} = CE = AC \qquad \text{(IV)}$$



شكل 20 – 6

بالتعويض من (IV) في (III)

$$BC(PA+PD)=BA(PB+PC)+\frac{(PE)(BC)}{(PB+PC)}(PB+PC)$$

$$\Rightarrow BC(PA+PD)=BA(PB+PC)+(PE)(BC)$$

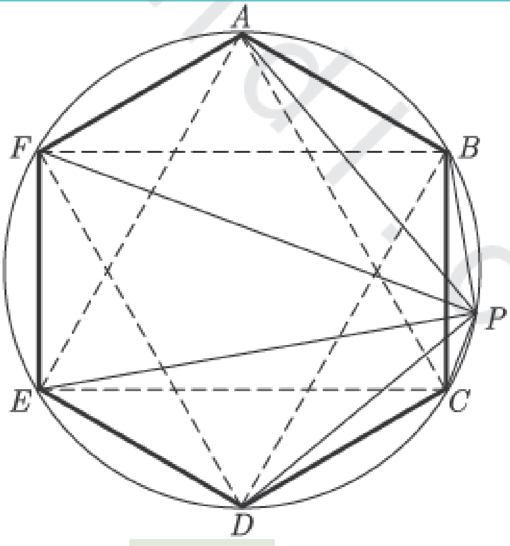
ولكن : $BC=BA$ ، إذن $PA+PD=PB+PC+PE$. ●

التطبيق 8

إذا رسم السداسي المنتظم $ABCDEF$ داخل دائرة، وكانت النقطة $P\in\widehat{BC}$ ، فأثبت أن :

$$PE+PF=PA+PB+PC+PD$$

البرهان



شكل $6-21$

نرسم الخطوط التي تصل بين الرؤوس A,E,C ، والتي ينتج منها المثلث المتطابق الأضلاع ACE

$$PE = PA + PC \quad \text{(I)}$$

وبالمثل في ΔBPF المتطابق الأضلاع :

$$PF = PB + PD \quad \text{(II)}$$

بجمع $\text{(I)}, \text{(II)}$:

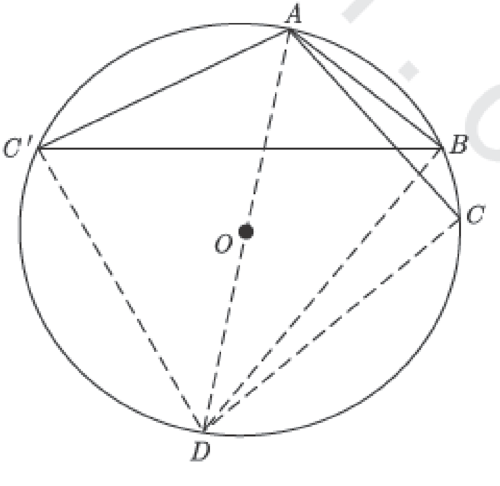
$$PE + PF = PA + PB + PC + PD. \bullet$$

التطبيق 9

إذا رسم مثلث داخل دائرة نصف قطرها 5 ، وكان طولا ضلعين في هذا المثلث 5,6 ، فأوجد طول الضلع الثالث في المثلث.

البرهان

في الشكل 22 − 6 ، نلاحظ أن هناك حالتين يجب أخذهما في الاعتبار عند حل هذه المشكلة، فكلا $\Delta ABC, \Delta ABC'$ يمكن إنشاؤهما داخل الدائرة O والتي نصف قطرها 5 بحيث يكون $AB = 5$ ، $AC = AC' = 6$ ، وعليه سنحاول أن نحصل على طول كل من BC, BC'.



شكل 22 − 6

نرسم قطر الدائرة $\overline{AOD}$ والذي طوله 10 ، ونصل كلاً من $\overline{DC}, \overline{DB}, \overline{DC'}$

$$\Rightarrow m\angle AC'D = m\angle ACD = m\angle ABD = 90^\circ$$

والآن لندرس الحالة التي فيها $\angle A$ حادة في ΔABC ، ففي ΔACD القائم، $DC = 8$ ، وفي ΔABD القائم ، $BD = 5\sqrt{3}$ ، وبتطبيق نظرية بطليموس على الرباعي $ABCD$

$$(AC)(BD) = (AB)(DC) + (AD)(BC), (6)(5\sqrt{3}) = (5)(8) + (10)(BC)$$

$$\Rightarrow BC = 3\sqrt{3} - 4$$

أما الحالة التي فيها $\angle A$ منفرجة في $\Delta ABC'$، ففي $\Delta AC'D$ القائم، $DC' = 8$ ، وبتطبيق نظرية بطليموس على الرباعي $ABDC'$ ، نجد أن:

$$(AC')(BD) + (AB)(DC') = (AD)(BC'), (6)(5\sqrt{3}) + (5)(8) = (10)(BC')$$

$$\Rightarrow BC' = 3\sqrt{3} + 4 \; . \bullet$$

لقد بدأنا في هذا الفصل دراسة الأشكال الرباعية في صورتها العامة، والتي قادتنا بدورها للأشكال الرباعية الدائرية والتي مساحاتها أكبر ما يمكن عندما تكون أطوال أضلاعها معلومة، بالإضافة إلى خصائصها الكثيرة والمهمة، وخير دليل على ذلك صيغة برهماجوبتا ونظرية بطليموس.

ولأن المجال يتسع بلا حدود فالأمر متروك للقارئ لمواصلة دراسة خصائص أنواع أخرى مختلفة من الأشكال الرباعية .

تدريبات

1. حدد نوع الشكل الرباعي الناتج من توصيل منتصفات الأضلاع المتتالية لكل رباعي مما يلي :

A.شبه منحرف غير متطابق الضلعين . B.شبه منحرف متطابق الضلعين .

مع ذكر السبب في كل حالة.

2. رسم مثلثان متطابقا الضلعين على قاعدة واحدة وفي جهتين مختلفتين منها ليكونا شكلاً رباعياً. حدد نوع الرباعي الناتج من توصيل منصفات أضلاعه.

3. هل عكس نظرية $1-6$ صحيح؟ أثبت إجابتك.

4. أثبت أن محيط الشكل الرباعي الناتج من توصيل منتصفات الأضلاع المتتالية لشكل رباعي معطى يساوي مجموع طولي قطري الرباعي المعطى.

5. أثبت أن مساحة الشكل الرباعي الناتج من توصيل منتصفات الأضلاع المتتالية لشكل رباعي معطى يساوي نصف مساحة الرباعي المعطى.

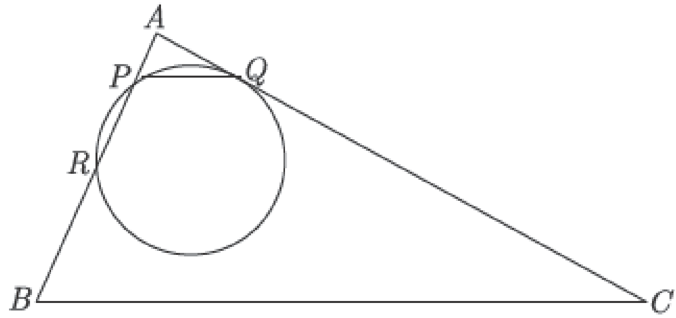
6. أثبت أن مجموع مربعات أضلاع أي شكل رباعي تساوي مجموع مربعي قطريه مضافاً إليه أربعة أمثال مربع القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي هذين القطرين.

7. أوجد مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه $13,14,15$.

8. أوجد مساحة الرباعي الدائري الذي أطوال أضلاعه $9,10,10,21$.

9. أوجد مساحة الرباعي الدائري الذي أطوال أضلاعه $7,15,20,24$.

10. الخط المستقيم $\overleftrightarrow{PQ}$ يوازي القاعدة $\overline{BC}$ في ΔBAC ، ويقطع $\overline{AB},\overline{AC}$ في P,Q على الترتيب (الشكل $23-6$). رسمت الدائرة التي تمر بالنقطة P وتمس $\overline{AC}$ في Q وتقطع $\overline{AB}$ في R. أثبت أن النقاط R,C,B,Q تقع على دائرة واحدة.

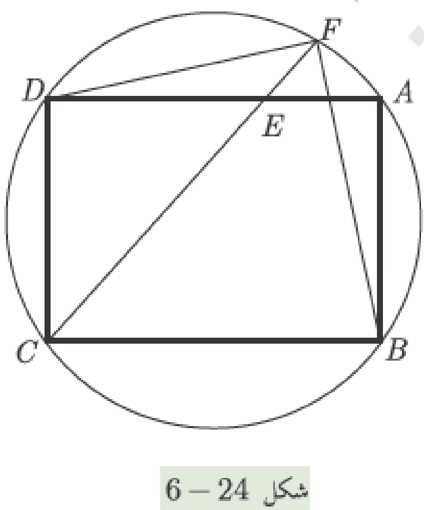


شكل 23 – 6

11. أثبت أن المستقيمات المرسومة من منتصفات كل ضلع في الرباعي الدائري والعمودية على الضلع المقابل تتقاطع في نقطة واحدة.

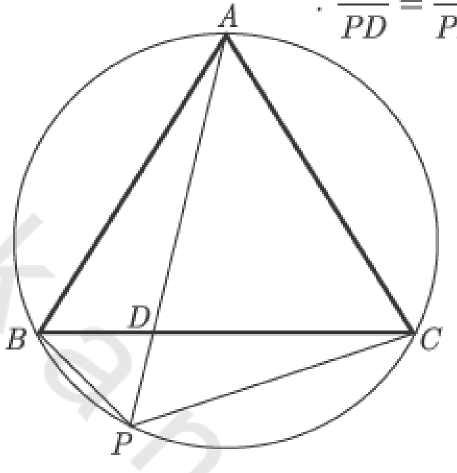
12. إلى أي نتيجة مشهورة تؤول نظرية بطليموس عندما يكون الشكل الرباعي الدائري مستطيلاً؟ برهن إجابتك.

13. النقطة E على $\overline{AD}$ في المستطيل $ABCD$ بحيث $DE = DC = 6$ و $DA = 8$ (الشكل 24 – 6)، ومددنا $\overline{CE}$ ليقطع الدائرة المحيطة بالمستطيل في F. أوجد طولي $\overline{DF}, \overline{FB}$.



شكل 24 – 6

14. إذا رسم خط يمر بالرأس A في ΔABC المتطابق الأضلاع ويقطع كلاً من $\overline{BC}$ في D والدائرة المحيطة في النقطة P (انظر الشكل 25 – 6). أثبت أن $\frac{1}{PD} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.



شكل 25 – 6

15. أثبت أنه إذا وفقط إذا تعامد قطرا شكل رباعي فإن مجموع مربعي أي زوج من أضلاع الرباعي المتقابلين يساوي مجموع مربعي الضلعين المتقابلين الآخرين.