الفصل الخامس

المزيد من خصائص المثلث

مقدمة

تأتي أهمية دراسة خصائص المثلث بالنسبة للطلاب الذين يدرسون الهندسة في المدارس الثانوية من كونها تمثل قاعدة أساسية لدراسة الهندسة الإنشائية. وفي الواقع، بعد إكمال الطلاب مقرر الهندسة في المرحلة الثانوية يشعرون بأنهم قد تعرفوا على كل ما يختص بالمثلثات. ولكن بعد أن وصلنا إلى هذه المرحلة من كتابنا هذا نرى أن ذلك غير صحيح. بالطبع، ستشعر بأنك لا تزال في نطاق المبادئ الأولية للهندسة، ومع ذلك واصل القراءة وشاهد كيف أن بعض الخصائص البسيطة للمثلث هي في الحقيقة ليست عادية.

منصفات الزوايا Angle bisectors

في سنوات دراستنا السابقة، تعرفنا جميعاً على القاعدة التي تقول بأن منصفي زاويتي القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان، وهذا من السهل إثباته. ولكن لا يزال عكس هذه القاعدة مهملاً مع أن هذا العكس أيضا يمثل نظرية صحيحة ولكنها صعبة الإثبات.

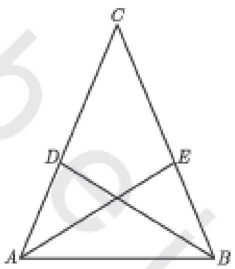
نظرية 5–1 إذا تطابق منصفا زاويتين في مثلث، فإن هذا المثلث يكون متطابق الضلعين.

يعد برهان هذه النظرية من أصعب البراهين في الهندسة الأساسية؛ ولهذا السبب سنقدم عدداً من البراهين المختلفة والتي لكل منها مزاياه الخاصة.

بداية، نعيد عرض النظرية على ΔABC.

المعطيات : $\overline{AE}, \overline{BD}$ منصفا زاويتين في ΔABC، $\overline{AE} \cong \overline{BD}$. (انظر الشكل $5-1$).

المطلوب : أثبت أن ΔABC متطابق الضلعين.

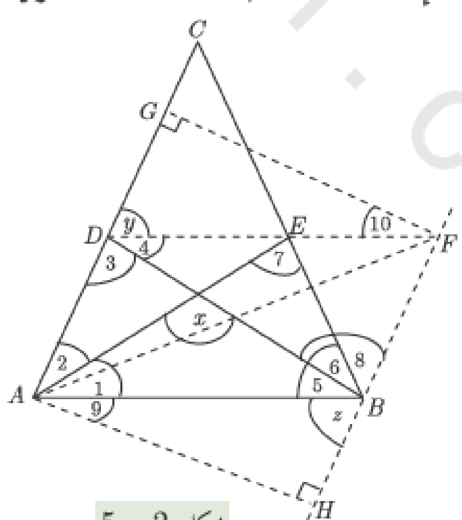


شكل $5-1$

البرهان *I*

نرسم $\angle AEB \cong \angle DBF$ بحيث $\overline{BF} \cong \overline{BE}$، ثم نصل $\overline{DF}$ (انظر الشكل $5-2$). ونرسم $\overleftrightarrow{FB} \perp \overline{AH}, \overline{AC} \perp \overline{FG}$ في H.

لأن $\angle 8 \cong \angle 7, \overline{FB} \cong \overline{EB}, \overline{AE} \cong \overline{DB}$ ؛ إذن $\Delta AEB \cong \Delta DBF$ (SAS)، ومنه فإن $m\angle 4 = m\angle 1, \overline{AB} \cong \overline{DF}$ ، وأيضاً



شكل $5-2$

$m\angle x = m\angle 3 + m\angle 2$ (زاوية خارجة عن المثلث)

$m\angle x = m\angle 3 + m\angle 1$ (بالتعويض)

$m\angle x = m\angle 3 + m\angle 4$ (بالتعويض)

$m\angle x = m\angle 7 + m\angle 6$ (زاوية خارجية)

$m\angle x = m\angle 5 + m\angle 7$ (بالتعويض)

$m\angle x = m\angle 5 + m\angle 8$ (بالتعويض)

$\Rightarrow m\angle 5 + m\angle 8 = m\angle 3 + m\angle 4$ (بالتعدي)

$$\Rightarrow m\angle y = m\angle z$$

$$\Delta FDG \cong \Delta ABH \Rightarrow FG = AH, DG = BH$$

$$\Delta AFG \cong \Delta FAH \Rightarrow AG = FH$$

ومن ذلك نستنتج أن الشكل $GFHA$ متوازي أضلاع . أي أن :

$m\angle 10 = m\angle 9 \Rightarrow \angle DAB = \angle DFB$ (بالطرح)

ولكن $m\angle DFB = m\angle EBA$ (من $\Delta DBF, \Delta AEB$). بالطرح نحصل على :

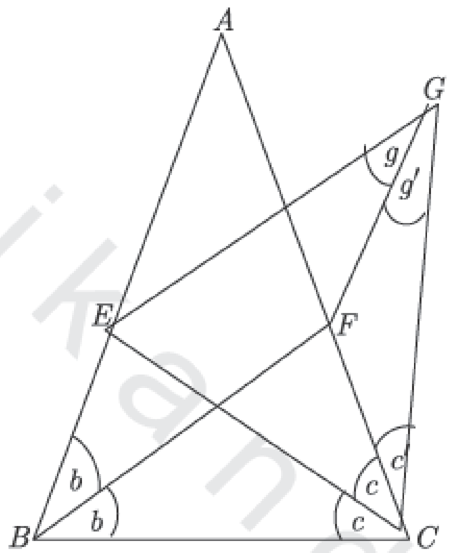
$m\angle DAB = m\angle EBA$ (بالتعدي)

أي أن ΔABC متطابق الضلعين . ●

البرهان II (غير مباشر)

نفرض أن ΔABC غير متطابق الضلعين، ولتكن $m\angle ABC > m\angle ACB$
(انظـــر الــــشكل $3-5$) ، باســـتخدام المعطـــى $\overline{BF} \cong \overline{CE}, \overline{BC} \cong \overline{BC}$

و $CF > BE$ *. ومن النقطة F ننشئ $\overline{GF} \parallel \overline{EB}$ ومن النقطة E ننشئ $\overline{GE} \parallel \overline{BF}$ ، ومن ذلك نحصل على متوازي الأضلاع $BFGE$ الذي فيه



شكل $3-5$

$\overline{BF} \cong \overline{EG}, \overline{EG} \cong \overline{CE}$ ، وبالتالي يكون ΔGEC متطابق الضلعين.

$$\Rightarrow m\angle\left(g+g'\right)=m\angle\left(c+c'\right)$$

ولدينا

$$m\angle\left(g\right)=m\angle\left(b\right)\Rightarrow m\angle\left(b+g'\right)=m\angle\left(c+c'\right)$$

ولأن

$$m\angle b > m\angle c$$

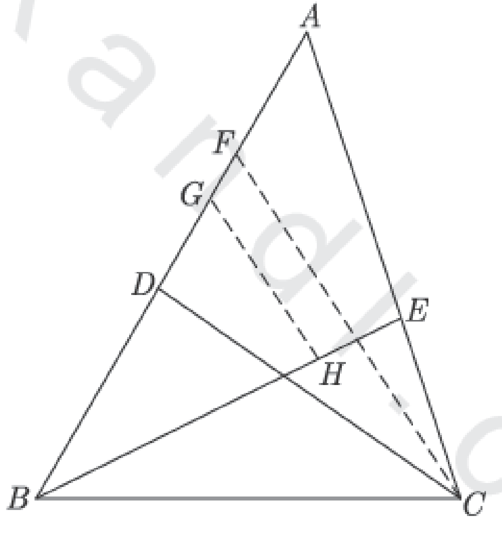
* إذا طابق ضلعان في مثلث نظيريهما في مثلث آخر وكانت الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول أكبر من الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الآخر ، فإن الضلع الثالث في المثلث الأول أكبر من الضلع الثالث في المثلث الآخر.

(من الفرض)، نجد أن $m\angle g' < m\angle c'$. وباستعمال المتباينة الأخيرة في ΔGFC ، نصل إلى أن $CF < GF$ ، ولكن $GF = BE$ ، إذن $CF < BE$. وبالعودة للمتباينة $m\angle ABC > m\angle ACB$ التي فرضناها أولاً، نحصل على التناقض التالي :

$$CF < BE,\ CF > BE$$

لذا فإن ΔABC متطابق الضلعين . ●

البرهان III (غير مباشر)



شكل $4-5$

في ΔABC ، $BE = DC$ حيث BE, DC منصفا الزاويتين ABC, ACB على الترتيب (انظر الشكل $4-5$). نفرض أن $m\angle ABC < m\angle ACB$ ، ثم نرسم $\angle FCD \cong \angle ABE$.

لاحظ أننا نستطيع وضع النقطة F بين رأسي المثلث A, B دون أن نفقد العمومية. في ΔFBC ، $FB > FC$ (إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهما أيضاً يكونان مختلفين في الطول، حيث يكون الضلع الأكبر في الطول مواجهاً للزاوية الكبرى في القياس).

لنختر النقطة G بحيث $\overline{BG} \cong \overline{FC}$ ثم نرسم $\overline{GH} \parallel \overline{FC}$ ، وعليه :

$$\angle BGH \cong \angle BFC$$
$$\Rightarrow \Delta BGH \cong \Delta CFD \qquad (SAS)$$

ومن التطابق تستنتج أن $BH = DC$ ولكن $BH < BE$ ومنه $DC > BE$ وهذا يناقض المعطى الخاص بأن منصفي الزاويتين متساويان في الطول أي أنه يستحيل أن تكون $m\angle ABC < m\angle ACB$. وبنفس الطريقة يمكننا إثبات أنه من المستحيل أيضاً أن تكون $m\angle ABC > m\angle ACB$ مما يؤدي إلى أن :

$$m\angle ACB = m\angle ABC$$

أي أن ΔABC متطابق الضلعين . ●

البرهان IV (غير مباشر)

في ΔABC ، نفرض أن $m\angle B > m\angle C$ ، $\overline{BE} \cong \overline{DC}$ حيث BE, DC منصفا الزاويتين ABC, ACB على الترتيب. نرسم $\overline{BH} \parallel \overline{DC}, \overline{CH} \parallel \overline{DB}$ فنحصل على متوازي الأضلاع $DCHB$ كما في الشكل $5-5$. إذن $\overline{BH} \cong \overline{BE} \cong \overline{DC}$ ، و ΔBHE متطابق الضلعين.

وعليه فإن :

$$m\angle BEH = m\angle BHE \qquad (\mathrm{I})$$

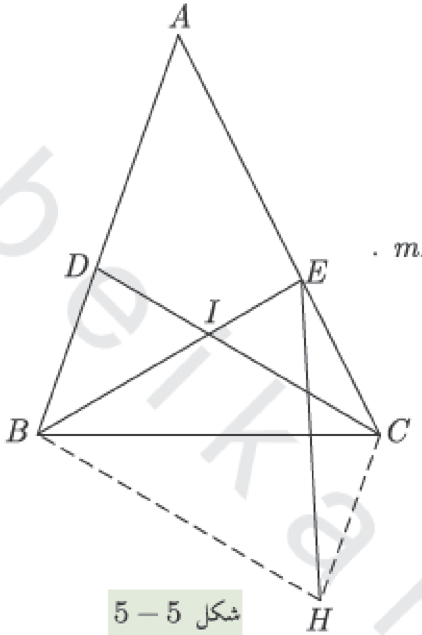
ومن الفرض $m\angle B > m\angle C$ لدينا

$m\angle CBE > m\angle BCD,\ CE > DB$.

ولأن $BH = DC$ ، فإن $CE > CH$ ،

وهذا يؤدي إلى أن

$$m\angle CHE > m\angle CEH . \qquad (\mathrm{II})$$



شكل $5-5$

في ΔCEH ، بجمع $(\mathrm{I}),(\mathrm{II})$ ، نحصل على $m\angle BHC > m\angle BEC$ ، ولأن الشكل $DCHB$ متوازي أضلاع ؛ فإن $m\angle BHC = m\angle BDC$ ، ثم بالتعويض نحصل على :

$$m\angle BDC > m\angle BEC$$

وفي $\Delta DBI, \Delta ECI$ ،

لدينا

$$m\angle DIB = m\angle EIC$$

ولأن $m\angle BDC > m\angle BEC$ ، نجد :

$$m\angle DBI < m\angle ECI$$

وبمضاعفة المتباينة الأخيرة نحصل على $m\angle B < m\angle C$ ، وهذا يناقض الفرض الذي فرضناه أولاً $(m\angle B > m\angle C)$ ، وبنفس الطريقة إذا بدأنا بفرض أن

$m\angle B > m\angle C$ ، فإننا نحصل على نفس التناقض مما يؤدي إلى أن

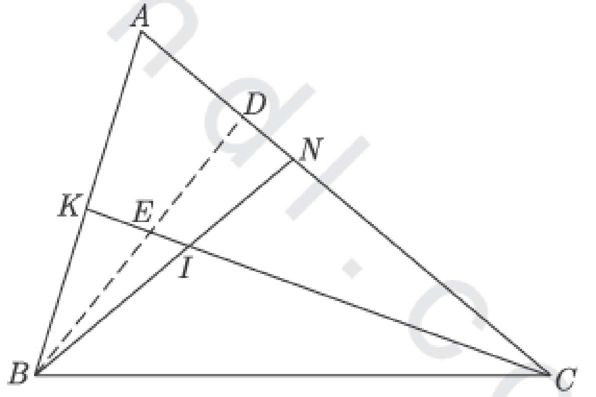
$$m\angle ACB = m\angle ABC$$

أي أن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين . ●

نظرية 5-2

إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث فإن منصف الزاوية الكبرى يكون أقل طولاً من منصف الزاوية الثانية.

البرهان



شكل $5-6$

المثلث ABC فيه: $m\angle ABC > m\angle ACB$ ، BN, CK منصفا الزاويتين ABC, ACB على الترتيب ويتقاطعان في النقطة I ، نرسم $\overline{BD}$ بحيث $m\angle DBN = m\angle ACK$ ويقطع $\overline{CK}$ في النقطة E (انظر الشكل $5-6$).

$$\Rightarrow \Delta DBN \sim \Delta DCE \qquad \text{(AA)}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{BN}{CE} \qquad \text{(I)}$$

ومن جهة ثانية ، لدينا المعطى $m\angle ABC > m\angle ACB$ ؛ إذن :

$$\frac{1}{2} m\angle ABC > \frac{1}{2} m\angle ACB \quad or \quad m\angle NBC > m\angle BCK$$

ولكن $m\angle DBN = m\angle ACK$ ، وبالجمع نحصل على :

$$.m\angle DBC > m\angle DCB$$

في المثلث DBC ، لدينا $BD < CD$ ، ومن (I) أعلاه نجد $BN < CE$ الذي يقود إلى أن :

$$BN < CK$$

وهو المطلوب إثباته . ●

نظرية 5–3 قياس الزاوية المحصورة بين منصفين داخلين لزاويتين في مثلث يساوي مجموع قياس زاوية قائمة ونصف قياس الزاوية الثالثة .

البرهان

BN, CM منصفا زاويتين في المثلث ABC ، يتقاطعان في النقطة I (انظر الشكل 7 – 5). وفي ΔBIC : $m\angle BIC = 180° - m\angle IBC - m\angle ICB$

$$\Rightarrow m\angle BIC = 180° - \left[\frac{1}{2}\left(m\angle ABC\right) + \frac{1}{2}\left(m\angle ACB\right)\right]$$

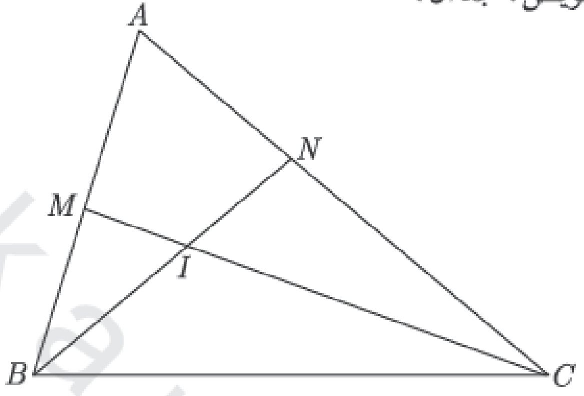
ولكن :

$$m\angle ABC + m\angle ACB = 180° - m\angle A$$

أي أن

$$\frac{1}{2}\left(m\angle ABC\right)+\frac{1}{2}\left(m\angle ACB\right)=90^\circ-\frac{1}{2}\left(m\angle A\right)$$

بالتعويض ، نجد أن :



شكل 7 − 5

$$m\angle BIC=180^\circ-\left[90^\circ-\frac{1}{2}\left(m\angle A\right)\right]=90^\circ+\frac{1}{2}\left(m\angle A\right)$$

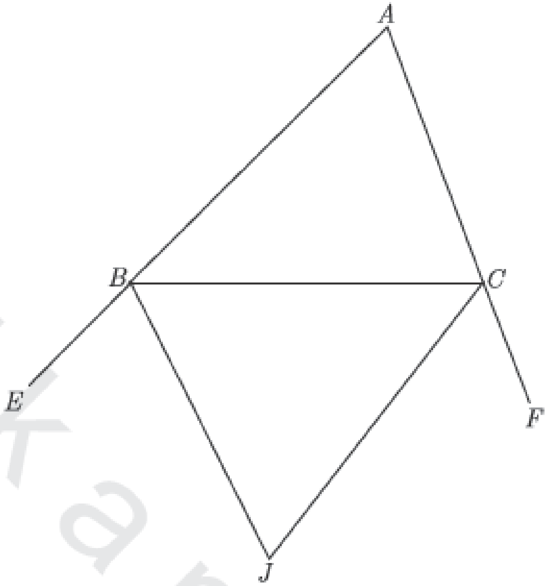
وهو المطلوب إثباته . ●

يعتبر التطوير المنطقي لنظرية 3 − 5 هو الحديث عن المنصفات الخارجية للزوايا وهو ما نقدمه في نظرية 4 − 5.

نظرية 5−4 قياس الزاوية المحصورة بين المنصفين الخارجيين لزاويتين في مثلث يساوي الفرق بين قياس زاوية قائمة ونصف قياس الزاوية الثالثة.

البرهان

اعتبر BJ,CJ المنصفين الخارجيين لزاويتين في المثلث ABC يتقاطعان في النقطة J ، (انظر الشكل 8 − 5).



شكل 8 − 5

$$m\angle BJC = 180^\circ - \frac{1}{2} m\angle EBC - \frac{1}{2} m\angle FCB$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}\left(180^\circ - m\angle ABC\right) - \frac{1}{2}\left(180^\circ - m\angle ACB\right)$$

$$= 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2} m\angle ABC - 90^\circ + \frac{1}{2} m\angle ACB$$

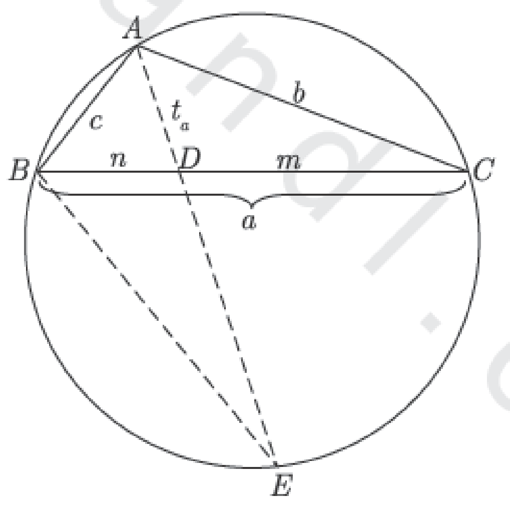
$$= \frac{1}{2}\left(m\angle ABC + m\angle ACB\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(180^\circ - m\angle A\right)$$

$$\bullet.\ m\angle BJC = 90^\circ - \frac{1}{2} m\angle A$$

لاستكمال دراستنا لمنصفات الزاوية، علينا أن نناقش موضوع طول منصف الزاوية في المثلث وعلى وجه التحديد، سنسعى لإيجاد علاقة بين طول منصف الزاوية وأضلاع المثلث (أو أجزاء من هذه الأضلاع) .وهذه العلاقة هي فحوى النظرية $5-5$.

نظرية 5–5 مربع طول المنصف الداخلي لأي زاوية في أي مثلث يساوي حاصل ضرب طولي ضلعي هذه الزاوية مطروحاً منه حاصل ضرب جزئي الضلع الثالث الذي يقسمه منصف الزاوية.



شكل $9-5$

البرهان

في الشكل $(9-5)$، $\overline{AD}$ (أو t_a) منصف للزاوية BAC ، نمد $\overline{AD}$ ليقطع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC في النقطة E ، نصل $\overline{BE}$. لأن

$m\angle BAD = m\angle CAD$ ، و $m\angle E = m\angle C$ (زاويتان محيطيتان مرسومتان على نفس القوس). إذن :

$$\Delta ABE \sim \Delta ADC \qquad or \qquad \frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB}$$

ومنه فإن :

$$(AC)(AB) = (AD)(AE) = (AD)(AD + DE) = (AD)^2 + (AD)(DE) \qquad (\mathrm{I})$$

ولكن

$$(AD)(DE) = (BD)(DC) \qquad (\mathrm{II})$$

بالتعويض من (II) في (I) :

$$(AC)(AB) = (AD)^2 + (BD)(DC)$$

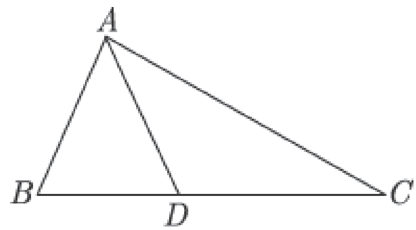
$$\Rightarrow (AD)^2 = (AC)(AB) - (BD)(DC) \Rightarrow {t_a}^2 = bc - mn. \bullet$$

والآن، نرى كيف يوضح التطبيق التالي استخدام النظرية السابقة.

التطبيق 1

إذا كان طولا الضلعين الأقصر والمتوسط في مثلث هما 9,18 ، وطول منصف الزاوية المرسوم إلى الضلع الأطول في المثلث يساوي 8. أوجد طول الضلع الأطول في المثلث.

الحل



شكل 10 – 5

ليكن $AB = 9, AC = 18$ ، ومنصف الزاوية $AD = 8$ (انظر الشكل $10 - 5$).

لأن $\frac{1}{2} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ ، يمكننا أن نفرض أن $BD = m = x \Rightarrow DC = n = 2x$

من النظرية $(5-5)$ ، لدينا :

$$t_a^{\,2} = bc - mn \quad or \quad (AD)^2 = (AC)(AB) - (BD)(DC)$$

$$\Rightarrow (8)^2 = (18)(9) - 2x^2 \Rightarrow x = 7 \quad \Rightarrow \quad BC = 3x = 21. \bullet$$

لنفرض أن $\overline{AD}$ في التطبيق السابق ليست منصفاً لزاوية في المثلث، وأنها مجرد قطعة مستقيمة تصل بين رأس من رؤوس المثلث والضلع المقابل لها وأننا نريد معرفة طولها، تُرى كيف لنا أن نحل هذه المشكلة ؟

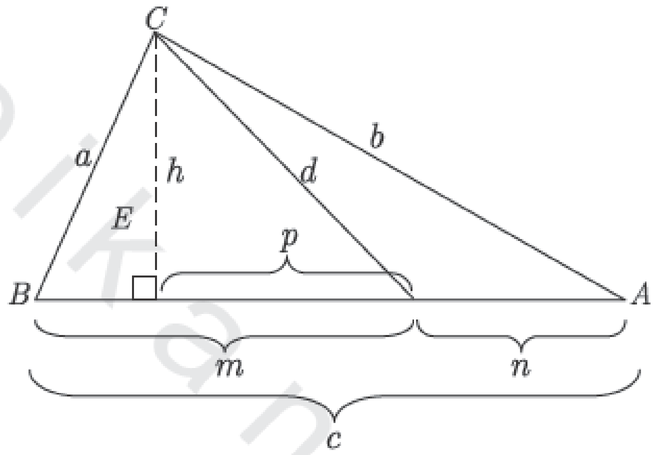
الحقيقة أننا نحتاج لحل هذه المسألة إلى معلومات إضافية. ولمعرفة هذه المعلومات الإضافية الضرورية، واصل القراءة.

نظرية ستيوارت Stewart's theorem

مشكلتنا الأساسية هنا هي إيجاد طول أي قطعة مستقيمة تصل بين رأس مثلث والضلع المقابل لهذه الرأس، أي أنه على سبيل المثال، في المثلث ABC (شكل $11 - 5$) نحن نعلم طول كل من $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AD}, \overline{BD}$ ونريد أن نعلم طول $\overline{CD}$.

كان أول من حل هذه المشكلة وقدمها في محاضراته هو الرياضي الأسكتلندي الشهير روبرت سيمسون Robert Simson ، وقد سمح لتلميذه ماثيو ستيوارت Matthew Stewart بنشرها في مطبوعته الشهيرة " General theorems of considerable use in the higher parts of mathematics" (أدنبره ١٧٤٦). وقد كان الدافع وراء سخاء سيمسون هذا هو رغبته في حصول ستيوارت على كرسي الأستاذية في جامعة أدنبره، وقد نجح

في ذلك. ومن المثير أن نلاحظ كيف تم إعطاء الفضل لسيميسون في نظرية لم يكتشفها (نظرية $7-3$) في حين أن النظرية التي اكتشفها هو لم تنسب إليه. وسوف نشير إلى نظرية $6-5$ باسم كاتبها (ستيوارت)في الكتاب الذي ظهرت به.



شكل $5-11$

وفي الحقيقة يستحق سيمسون تقديراً خاصاً لكتابه الهام "العناصر لإقليدس The Elements of Euclid- جلاسجو ١٧٥٦" والذي لأكثر من – ١٥٠ عاما – قام بنشره العديد من الناشرين، حيث يعد هو القاعدة الرئيسة لدراسة كتاب العناصر لإقليدس وكذلك هو أحد المراجع الرئيسية اليوم لمقرر الهندسة في المرحلة الثانوية في الولايات المتحدة الأمريكية.

وسنعرض أولاً نظرية ستيوارت وإثباتها ثم نقدم عليها بعض التطبيقات .

نظرية 5–6

(**نظرية ستيوارت**) باستخدام دلالات الرموز المحددة في الشكل $(5-11)$ تتحقق العلاقة التالية

$$a^2n + b^2m = c\left(d^2 + mn\right)$$

البرهان

في $\triangle ABC$ ، ليكن $BC = a, AC = b, AB = c, CD = d$ ، والنقطة D تقسم $\overline{AB}$ إلى $BD = m, DA = n$. نرسم الارتفاع $CE = h$ ، ونفرض أن $ED = p$.

من أجل المضي قدماً في برهان نظرية ستيوارت، علينا أن نستنتج صيغتين، نحصل على الأولى منهما بالعمل على $\triangle CBD$. باستخدام نظرية فيثاغورس على $\triangle CEB$ نحصل على

$$(CB)^2 = (CE)^2 + (BE)^2$$

وبوضع $BE = m - p$ نحصل على :

$$a^2 = h^2 + (m - p)^2 \qquad \text{(I)}$$

وباستخدام نظرية فيثاغورس على $\triangle CED$ نحصل على : $h^2 = d^2 - p^2$

بالتعويض عن قيمة h^2 في (I) :

$$\begin{aligned} a^2 &= d^2 - p^2 + (m - p)^2 \\ &= d^2 - p^2 + m^2 - 2mp + p^2 \\ &= d^2 + m^2 - 2mp \qquad \text{(II)} \end{aligned}$$

وللحصول على الصيغة الثانية سنعمل على $\triangle CDA$. بتطبيق نظرية فيثاغورس على $\triangle CEA$ ، نحصل على $(CA)^2 = (CE)^2 + (EA)^2$ وبوضع $EA = n + p$ نحصل على :

$$b^2 = h^2 + (n + p)^2 \qquad \text{(III)}$$

بالتعويض عن قيمة $h^2 = d^2 - p^2$ في (III) نجد أن :

$$b^2=d^2-p^2+\left(n+p\right)^2$$
$$=d^2-p^2+n^2-2np+p^2$$
$$=d^2+n^2-2np \qquad (\mathrm{IV})$$

عند ضرب المعادلة $\left(\mathrm{II}\right)$ في n والمعادلة $\left(\mathrm{IV}\right)$ في m نحصل على الصيغتين اللتين نبحث عنهما في بداية البرهان .

$$a^2n=d^2n+m^2n-2mnp \qquad (\mathrm{V})$$
$$b^2m=d^2m+n^2m+2mnp \qquad (\mathrm{VI})$$

بجمع $\left(\mathrm{V}\right),\left(\mathrm{VI}\right)$:

$$a^2n+b^2m=d^2n+d^2m+m^2n+n^2m+2mnp-2mnp$$
$$\Leftrightarrow a^2n+b^2m=d^2\left(n+m\right)+mn\left(m+n\right)$$

ولكن : $c=m+n$ ، إذن $a^2n+b^2m=d^2c+mnc$ الذي يكافئ

$$a^2n+b^2m=c\left(d^2+mn\right). \bullet$$

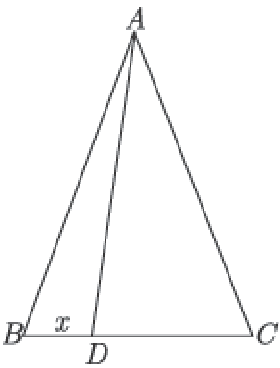
التطبيق 2

على الشكل $5-12$ ، المثلث ABC فيه $AB=AC=17$ ، والنقطة D تقع على $\overline{BC}$ بحيث طول DC يزيد عن طول DB بمقدار 8. فإذا كان $AD=16$ ، فأوجد طول كل من DC,DB.

الحل

ليكن $BD=x,DC=x+8$

باستخدام نظرية ستيوارت :



شكل $5-12$

$$(AB)^2(DC)+(AC)^2(BD)=BC\left[(AD)^2+(BD)(DC)\right]$$

إذن،
$$(17)^2(x+8)+(17)^2(x)=(2x+8)\left[(16)^2+x(x+8)\right]$$

$$\Rightarrow x=3\Rightarrow BD=3, DC=11$$.●

التطبيق 3

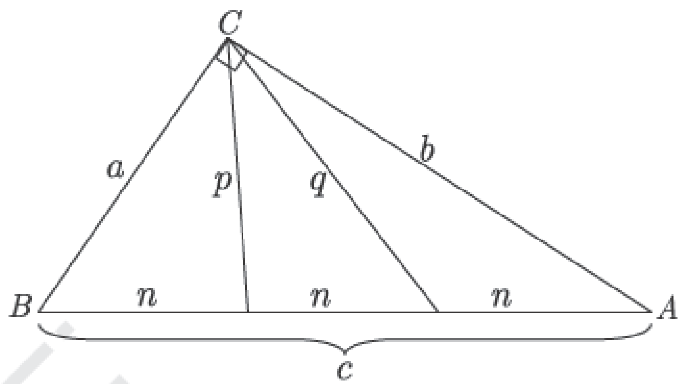
أثبت أن مجموع مربعي القطعتين المستقيمتين الخارجتين من رأس الزاوية القائمة في المثلث القائم إلى النقطتين اللتين تقسمان الوتر إلى ثلاثة أجزاء متطابقة يساوي خمسة أتساع مربع الوتر.

البرهان

بتطبيق نظرية ستيوارت على اعتبار أن p,q طولا القطعتين المستقيمتين الداخليتين في المثلث (انظر شكل $13-5$) نجد أن:

$$2a^2n+b^2n=c\left(p^2+2n^2\right) \qquad \text{(I)}$$

$$a^2n+2b^2n=c\left(q^2+2n^2\right) \qquad \text{(II)}$$



شكل $5-13$

بجمع $(\mathrm{I}),(\mathrm{II})$:

$$3a^2n+3b^2n=c\left(4n^2+p^2+q^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3n\left(a^2+b^2\right)=c\left(4n^2+p^2+q^2\right)$$

ولكن من نظرية فيثاغورس $c^2=a^2+b^2$ ؛ إذن :

$$3n\left(c^2\right)=c\left(4n^2+p^2+q^2\right)$$

وبما أن $c=3n$ ، فلدينا :

$$c^2=\left(2n\right)^2+p^2+q^2$$

ولكن $2n=\frac{2}{3}c$ ، ومنه نحصل على :

$c^2=\left(\frac{2}{3}c\right)^2+p^2+q^2$ أو $p^2+q^2=c^2-\left(\frac{2}{3}c\right)^2=\frac{5}{9}c^2$. ●

التطبيق 4

لتوضيح مدى أهمية وقوة نظرية ستيوارت دعونا نستخدمها في إثبات النظرية $1-5$ *، وهذه الطريقة المباشرة تأخذ تلك النظرية البسيطة وتضعها (مؤقتاً) في موضع أكثر تقدماً في تطوير الهندسة الإقليدية.

البرهان *

نعلم أن المطلوب هو إثبات أن $b = c$. ولذا ليكن كل من $\overline{BE}, \overline{CD}$ منصفين لزاويتين من زوايا ΔABC، بحيث $BE = CD = x$ (الشكل $5-14$)، ومنصف الزاوية يقسم الضلع المقابل لهذه الزاوية إلى جزأين يتناسبان مع الضلعين الآخرين وذلك كما يلي

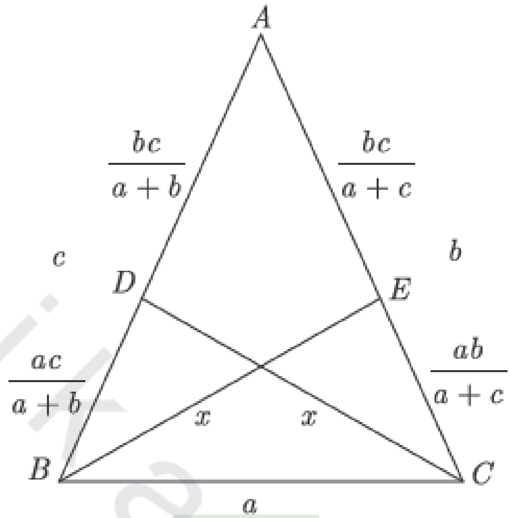
$$BD = \frac{ac}{a+b} \qquad \mathrm{AD} = \frac{bc}{a+b} \qquad AE = \frac{bc}{a+c} \qquad CE = \frac{ab}{a+c}$$

بتطبيق نظرية ستيوارت مرتين على ΔABC نحصل على المعادلتين

$$a^2 \frac{bc}{a+c} + c^2 \frac{ab}{a+c} = b\left(x^2 + \frac{bc}{a+c} \cdot \frac{ab}{a+c}\right)$$

$$a^2 \frac{bc}{a+b} + b^2 \frac{ac}{a+b} = c\left(x^2 + \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{ac}{a+b}\right)$$

* هذا البرهان تم تقديمه من قبل الرياضي جان سيوانوز Jan Siwanowicz.



شكل $5-14$

بحل المعادلتين بالنسبة للمتغير x^2 نحصل على :

$$x^2 = ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow c + \frac{bc^2}{(a+b)^2} = b + \frac{b^2c}{(a+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow c\left(1 + \frac{bc}{(a+b)^2}\right) = b\left(1 + \frac{bc}{(a+c)^2}\right) \qquad (I)$$

الآن، إذا كانت $b > c$ ، فلأن $a, b, c > 0$ ، فإن:

$$\left(1 + \frac{bc}{(a+b)^2}\right) < \left(1 + \frac{bc}{(a+c)^2}\right)$$

ومنه فإن (I) لا يمكن أن تتحقق. وكذلك، إذا كانت $b < c$ ، فإن :

$$\left(1+\frac{bc}{\left(a+b\right)^2}\right) > \left(1+\frac{bc}{\left(a+c\right)^2}\right)$$

ومرة أخرى، فإن (I) لا يمكن أن تتحقق. إذن، $b=c$. ●

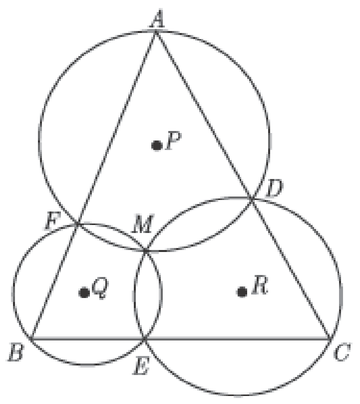
نظرية مايكل Miquel's theorem

ربما تريد أن تجري هذه التجربة، علماً بأنه من المهم تنفيذ ذلك باستخدام أدوات هندسية. ارسم أي مثلث، اختر نقطة على كل ضلع من أضلاعه، ثم ارسم ثلاث دوائر بحيث تمر كل دائرة بنقطتين من تلك النقاط كما تمر برأس المثلث المحصورة بين ضلعيه اللذين يحويان النقطتين. والآن ما العلاقة التي تلاحظها حول الدوائر الثلاث؟

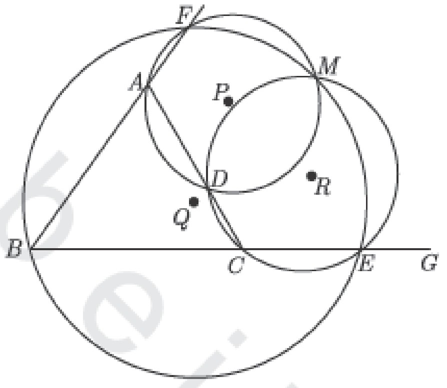
ستقودنا ملاحظتك تلك لنظرية قدمها مايكل A. Miquel في العام ١٨٣٨ والتي نصها وبرهانها كما يلي

نظرية 5–7 (**نظرية مايكل**) إذا اخترنا نقطة على كل ضلع من أضلاع مثلث، فإن كل دائرة من الدوائر الثلاث التي تعينها نقطتان من هذه النقاط والرأس المجاورة لهما من رؤوس المثلث تشترك جميعها في نقطة واحدة.

هذه النظرية يمكن أن يتم تطبيقها بطريقتين، أولاهما الشكل المتوقع كما يظهر في الشكل $15-5$ ، أما الشكل الآخر فتتحقق أيضاً عليه النظرية ونحصل عليه عند اختيار نقطتين من النقاط الثلاث على امتداد أضلاع المثلث والذي يظهر في الشكل $16-5$.



شكل 15 – 5



شكل 16 – 5

البرهان

الحالة الأولى (النقطة M تقع داخل ΔABC): كما يتضح في الشكل 17 – 5 ، فإن النقاط D, E, F تقع على الترتيب على الأضلاع $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$ في ΔABC ، والنقاط F, B, E تقع على الدائرة Q كما أن النقاط D, C, E تقع على الدائرة R ، وتتقاطع الدائرتان في النقطة M . نصل كلاً من $\overline{FM}, \overline{ME}, \overline{MD}$. في الرباعي الدائري

$$m\angle FME = 180^\circ - m\angle B \ : BFME$$

وفي الرباعي الدائري

$$m\angle DME = 180^\circ - m\angle C \ : CDME$$

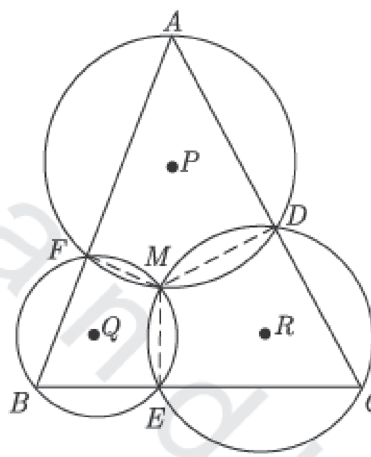
بالجمع :

$$m\angle FME + m\angle DME = 360^\circ - \left(m\angle B + m\angle C\right)$$

$$\Rightarrow m\angle FMD = m\angle B + m\angle C = 180^\circ - m\angle A$$

إذن الشكل $AFMD$ رباعي دائري، وهذا يثبت أن النقطة M هي نقطة تقاطع الدوائر الثلاث.

الحالة الثانية (النقطة M تقع خارج ΔABC) : على الشكل $18-5$ ، مرة أخرى، لتكن النقطة M هي نقطة تقاطع الدائرتين Q, R. في الرباعي الدائري $BMFE$:



شكل $5-17$

$$m\angle FME = 180° - m\angle B$$

وبالمثل في الرباعي الدائري

$$m\angle DME = 180° - m\angle C : CDME$$

بالطرح :

$$m\angle FMD = m\angle FME - m\angle DME = m\angle DCE - m\angle B \qquad (\mathrm{I})$$

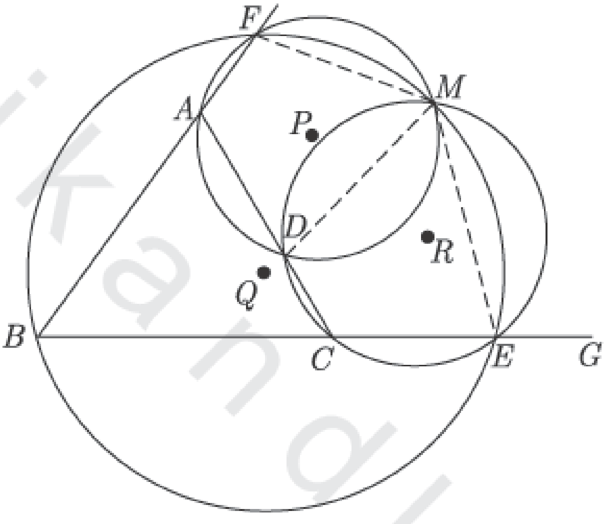
ولكن :

$$m\angle DCE = m\angle BAC + m\angle B \qquad (\mathrm{II})$$

من $(\mathrm{II}),(\mathrm{I})$:

$$m\angle FMD = m\angle BAC = 180^\circ - m\angle FAD$$

إذن الشكل $ADMF$ رباعي دائري، وهذا يثبت أن النقطة M هي نقطة تقاطع الدوائر الثلاث .●



شكل 18 – 5

تسمى النقطة M نقطة مايكل Miquel point للمثلث ABC والنقاط F, D, E تعين ما يسمى بمثلث مايكل Miquel triangle، كما تفتح هذه النظرية باباً جديداً للعديد من النظريات الإضافية والتي سنعرض بعضاً منها هنا.

نظرية 5–8 القطع المستقيمة الواصلة بين نقطة مايكل للمثلث ورؤوس مثلث مايكل تُشكل زوايا متطابقة بالنسبة لأضلاع المثلث الأصلي.

البرهان

لأن الشكل $AFMD$ رباعي دائري (انظر الشكلين $18-17,5-5$)، فإن $m\angle AFM$ تكمل $m\angle ADM$، ولكن : $m\angle CDM$ تكمل $m\angle ADM$ ؛

إذن :

$$\angle CDM \cong \angle AFM \text{ ومنه } \angle BFM \cong \angle ADM$$

ولاستكمال البرهان نطبق نفس الخطوات على الشكل الرباعي الدائري $CDNE$. ●

نقول عن مثلث إنه منشأ على مثلث آخر إذا كانت رؤوس المثلث الأول تقع على أضلاع المثلث الآخر، وعليه دعونا نقدم النظرية التالية

نظرية 5–9	المثلثان المنشآن على مثلث واحد ولهما نفس نقطة مايكل متشابهان .

البرهان

ليكن : $\Delta DFE, \Delta D'F'E'$ لهما نفس نقطة مايكل (انظر الشكل $19-5$).

من النظرية $8-5$ ، نجد أن :

$$\angle MFB \cong \angle MDA, \angle MF'A \cong \angle MD'C$$

إذن،

$$\Delta MF'F \sim \Delta MD'D$$

وبالمثل

$$\Delta MD'D \sim \Delta ME'E$$

إذن :

$$\angle FMF' \cong \angle DMD' \cong \angle EME'$$

بالجمع نحصل على :

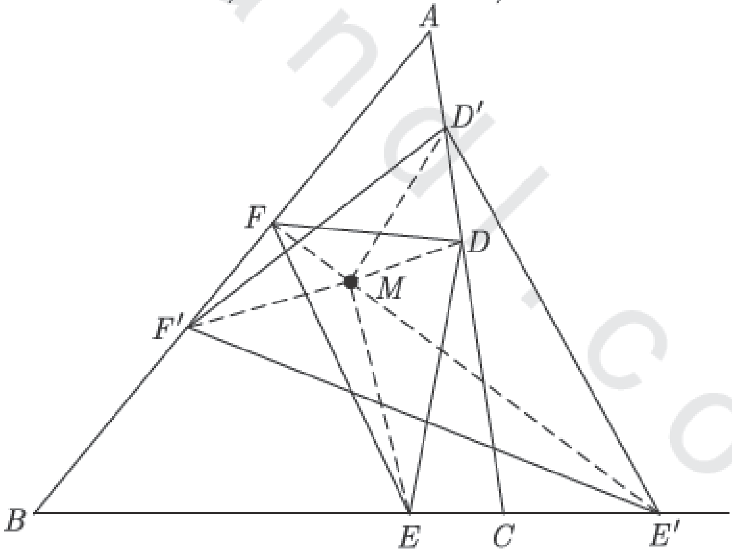
$$\angle F'MD' \cong \angle FMD, \angle F'ME' \cong \angle FME, \angle E'MD' \cong \angle EMD$$

وأيضاً من تشابه المثلثات السابق نحصل على :

$$\frac{MF}{MF'} = \frac{MD}{MD'} = \frac{ME}{ME'}$$

ولأن المثلثين يتشابهان إذا كان زوجان من الأضلاع المتناظرة في كل منهما يتناسبان بالإضافة لتطابق الزاويتين المحصورتين بين هذين الضلعين في كل مثلث ، فإن :

$\Delta F'MD' \sim \Delta FMD, \Delta F'ME' \sim \Delta FME, \Delta E'MD' \sim \Delta EMD$ ؛ إذن



شكل $19-5$

$$\frac{F'D'}{FD} = \frac{F'M}{FM}, \quad \frac{F'E'}{FE} = \frac{F'M}{FM} \Rightarrow \frac{F'D'}{FD} = \frac{F'E'}{FE}$$

وبالمثل

$$\frac{E'D'}{ED} = \frac{F'E'}{FE}$$

وهذا يثبت أن $\Delta DEF \sim \Delta D'E'F'$ لأن الأضلاع المتناظرة متناسبة .●

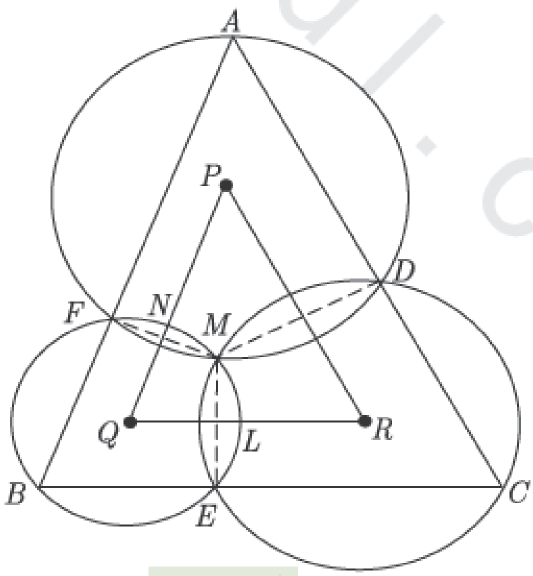
نظرية 5–10 مراكز دوائر مايكل للمثلث تعين مثلثاً آخر يشابه المثلث الأصلي.

البرهان

نرسم الأوتار المشتركة $\overline{FM}, \overline{EM}, \overline{DM}$. $\overline{PQ}$ يقطع الدائرة Q في النقطة N ، $\overline{RQ}$ يقطع الدائرة R في النقطة L (انظر الشكل 20 – 5). بما أن الخط الواصل بين مركزي دائرتين هو العمود المنصف للوتر المشترك لهاتين الدائرتين ، أي أن $\overline{PQ}$ العمود المنصف للوتر المشترك $\overline{FM}$ ومن ذلك نستنتج أن :

$m\overset{\frown}{FN} = m\overset{\frown}{NM}$ ، وبالمثل $m\overset{\frown}{ML} = m\overset{\frown}{LE}$

والآن :



شكل 20 – 5

$$m\angle NQL = \left(m\widehat{NM} + m\widehat{ML}\right) = \frac{1}{2}\left(m\widehat{FE}\right), \quad m\angle FBE = \frac{1}{2}\left(m\widehat{FE}\right)$$

$$\Rightarrow m\angle NQL = m\angle FBE$$

وبالمثل يمكن إثبات أن $m\angle QPR = m\angle BAC$ ، وهذا يثبت أن $\Delta PQR \sim \Delta ABC$. ●

من الشيق أن تطبق هذه الدراسة التمهيدية لنظرية مايكل على المثلث المتطابق الأضلاع، والمثلثات القائمة الزاوية، ثم ترى هل هناك أي استنتاجات جديدة يمكن استخلاصها ؟

المتوسطات Medians

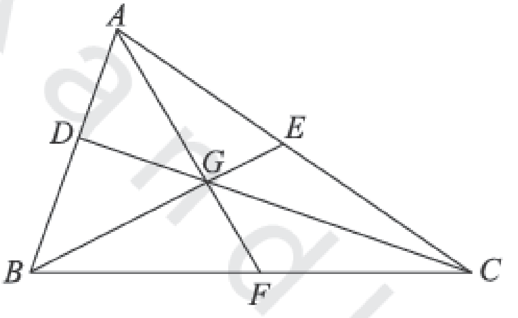
عندما نسأل طالباً متميزاً يدرس الهندسة في المرحلة الثانوية عن خصائص المتوسطات في المثلث، فإنه سيجيب سريعاً بأن نقطة تقاطع المتوسطات (مركز ثقل المثلث) تقسم المتوسط بنسبة $1:2$ من جهة الرأس. ومن المحتمل أيضاً أن يذكر أن متوسط المثلث يقسمه لمثلثين متساويين في المساحة ، وهذه الخاصية من السهل توسعتها للوصول إلى أن متوسطات المثلث الثلاثة تقسم المثلث إلى ستة مثلثات متساوية في المساحة وكنا في الفصل الثاني من كتابنا هذا قد أثبتنا باستخدام نظرية شيفا أن متوسطات المثلث تتقاطع في نقطة واحدة. وبالتأكيد أيضا يمكننا تطبيق نظرية ستيوارت على المتوسطات في المثلث، ولكن هناك عدد من الخصائص الجديرة بالاهتمام لا تعد نتائج مباشرة لهذه النظرية.

وستكون أول مهماتنا في هذا الجزء من الكتاب هي دراسة علاقة أطوال المتوسطات في المثلث مع أطوال أضلاع المثلث، فباستخدام الأدوات الهندسية سنرسم مثلثاً مختلف الأضلاع ونرسم متوسطاته الثلاثة، والآن هل لك أن تخمن أي هذه

المتوسطات الأكبر طولاً وأيها الأقصر؟ قم بقياس المتوسطات باستخدام الأدوات الهندسية. تُرى هل كان تخمينك صحيحاً؟ والآن إذا علمت أطوال أضلاع هذا المثلث، فهل تستطيع أن ترتب متوسطاته حسب أطوالها دون قياس أطوالها؟ هذا ما ستدلنا عليه النظرية التالية.

نظرية 5–11 في أي مثلث، أقصر المتوسطات يقابل أطول الأضلاع.

البرهان



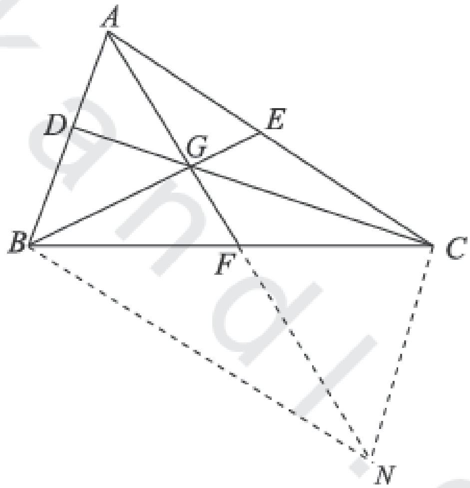
شكل $5-21$

نفرض أن $AC > AB$ وعليه سنحاول أن نثبت أن $BE < CD$. (انظر الشكل $5-21$). في $\Delta AFC, \Delta AFB$ ضلعان متساويان وضلع مشترك ($CF = BF$، AF ضلع مشترك). ولأن $AC > AB$، فإن $m\angle AFC > m\angle AFB$، وكذلك $\Delta GFC, \Delta GFB$ فيهما ضلعان متساويان وضلع مشترك ($CF = BF$، GF ضلع مشترك). ولأن $m\angle AFC > m\angle AFB$، فإن $GC > GB$. ولأن نقطة تقاطع المتوسطات تقسم المتوسط بنسبة $2:1$ من جهة الرأس: إذن، $DC > BE$. ●

نستطيع إيجاد طول المتوسط باستخدام نظرية ستيوارت، ونعلم من نظرية $11-5$ العلاقة بين أطوال المتوسطات وأطوال أضلاع المثلث. وفي النظريتين التاليتين نعرض بعض العلاقات الشيقة والتي تتحدث عن مجموع أطوال المتوسطات في المثلث.

نظرية 5–12 مجموع أطوال متوسطات أي مثلث أقل من طول محيطه.

البرهان



شكل $22-5$

عندما نرسم $N \in \overrightarrow{AF}$ بحيث $AF = FN$ فإننا نحصل على متوازي الأضلاع $ABNC$، وهذا يؤدي إلى $AC = BN$. في ΔABN، $AN < AB + BN$. إذن:

$$2(AF) < AB + AC \quad \text{أو} \quad 2m_a < c + b$$

بالمثل يمكن إثبات أن:

$$2m_c < a+b,\ 2m_b < a+c$$

وبالجمع نجد أن:

$$2m_a + 2m_b + 2m_c < 2c + 2b + 2a$$

$$\Rightarrow m_a + m_b + m_c < c + b + a. \bullet$$

نظرية 5–13 مجموع أطوال متوسطات أي مثلث أكبر من ثلاثة أرباع طول محيطه.

البرهان

مرة أخرى سنستخدم خاصية أن نقطة تقاطع المتوسطات تقسم المتوسط بنسبة 2 : 1 من جهة الرأس، في ΔABC (انظر الشكل 21 – 5).

$$BG + CG > BC$$
$$\frac{2}{3}(m_c) + \frac{2}{3}(m_b) > a$$

بالمثل:

$$\frac{2}{3}(m_b) + \frac{2}{3}(m_a) > c \ ، \ \frac{2}{3}(m_c) + \frac{2}{3}(m_a) > b$$

بالجمع:

$$\frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c) > a + b + c$$ أو

$$\bullet \ . m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}(a + b + c)$$

النظريتان السابقتان تفيدان أن $\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c < a+b+c$.

والآن لنناقش مربعات أطوال المتوسطات في المثلث.

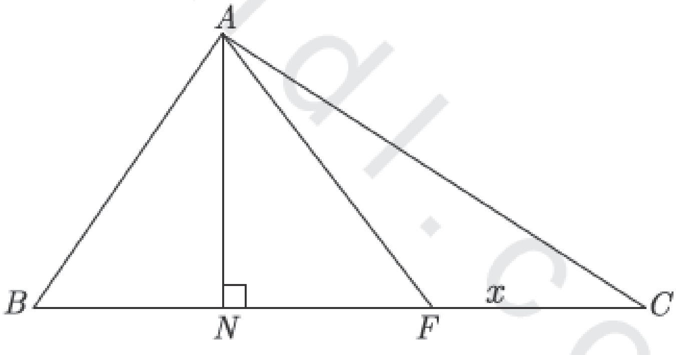
نظرية 5–14

ضعف مربع طول المتوسط في المثلث يساوي مجموع مربعي ضلعي المثلث المحيطين بنفس المتوسط مطروحاً منه نصف مربع طول الضلع الثالث من نفس المثلث.

البرهان

بتطبيق نظرية ستيوارت على ΔABC (انظر الشكل 23 – 5) نحصل على :

$$(AB)^2(FC)+(AC)^2(BF)=(BF+FC)\left[(AF)^2+(BF)(FC)\right]$$



شكل 23 – 5

نفرض أن $FC = BF = x$ ، إذن :

$$x(AB)^2 + x(AC)^2 = 2x\left[(AF)^2 + x^2\right]$$

$$\Leftrightarrow (AB)^2 + (AC)^2 = 2\left[(AF)^2 + x^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 2(AF)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2x^2$$

بوضع $x = \frac{1}{2}(BC)$ ، نحصل على :

$$2(AF)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - \frac{1}{2}(BC)^2 \quad \bullet$$

ربما لا نُقدِّر أهمية النظرية السابقة حتى نرى كيف تساعدنا في التعرف على بعض الخواص المفيدة المهمة والتي تعتبر نظرية $15-5$ واحدة منها.

نظرية 5–15 مجموع مربعات أطوال المتوسطات في أي مثلث يساوي ثلاثة أرباع مجموع مربعات أطوال أضلاع هذا المثلث .

البرهان

لإثبات هذه النظرية سنستخدم ما توصلنا إليه في نظرية $(14-5)$ وذلك كما يلي

$$2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2$$

$$2m_b^2 = a^2 + c^2 - \frac{1}{2}b^2$$

$$2m_c^2 = b^2 + a^2 - \frac{1}{2}c^2$$

بالجمع :

$$2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow 2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) . \bullet$$

نستطيع الاستعانة بالعلاقة السابقة للحصول على علاقة بين مربعات القطع المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع المتوسطات ورؤوس المثلث ومربعات أطوال أضلاع المثلث. وهذا ما تقدمه النظرية التالية.

نظرية 5–16 مجموع مربعات القطع المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع المتوسطات ورؤوس المثلث تساوي ثلث مجموع مربعات أطوال أضلاع هذا المثلث .

البرهان

نعلم أن طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة تقاطع المتوسطات والرأس تساوي ثلثي طول المتوسط ، ومن ذلك نحصل على :

$$\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = \frac{4}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)$$

ومن نظرية $(5-15)$ التي تنص على أن :

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

نجد أن :

$$\bullet . \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = \frac{4}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

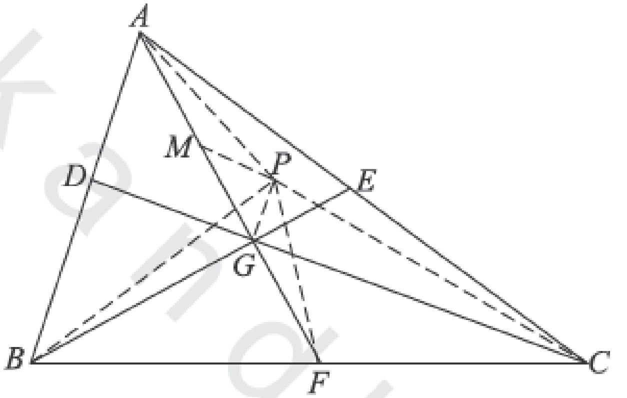
تعد النظرية التالية أكثر عمومية من سابقتها ، حيث إنها تتعلق بأي نقطة تقع في مستوى مثلث والقطع المستقيمة الخاصة بهذا المثلث (أضلاعه ومتوسطاته).

نظرية 5–17

إذا كانت النقطة P تقع في مستوى ΔABC الذي تتقاطع متوسطاته في النقطة G فإن

$$(AP)^2+(BP)^2+(CP)^2=$$
$$(AG)^2+(BG)^2+(CG)^2+3(PG)^2$$

(انظر الشكل 24 – 5).



شكل 24 – 5

البرهان

نأخذ النقطة M منتصف $\overline{AG}$ (انظر الشكل 24 – 5)، ثم نطبق نظرية 14 – 5 كالتالي

$$\Delta PBC: 2(PF)^2=(PB)^2+(CP)^2-\frac{1}{2}(BC)^2 \qquad (\mathrm{I})$$

$$\Delta PAG: 2(PM)^2=(AP)^2+(PG)^2-\frac{1}{2}(AG)^2 \qquad (\mathrm{II})$$

$$\Delta PMF : 2\left(PG\right)^2 = \left(PM\right)^2 + \left(PF\right)^2 - \frac{1}{2}\left(MF\right)^2 \qquad (\mathrm{III})$$

ولكن :

$$MF = \frac{2}{3}\left(AF\right) \quad , \quad AG = \frac{2}{3}\left(AF\right)$$

إذن :

$$.MF = AG$$

بالتعويض في (III) والضرب في 2 نحصل على :

$$4\left(PG\right)^2 = 2\left(PM\right)^2 + 2\left(PF\right)^2 - \left(AG\right)^2 \qquad (\mathrm{IV})$$

بجمع $(\mathrm{I}),(\mathrm{II}),(\mathrm{IV})$:

$$2\left(PF\right)^2 + 2\left(PM\right)^2 + 4\left(PG\right)^2 = \left(PB\right)^2 + \left(AP\right)^2 + 2\left(PM\right)^2$$
$$+\left(CP\right)^2 + \left(PG\right)^2 + 2\left(PF\right)^2 - \frac{1}{2}\left(BC\right)^2 - \frac{1}{2}\left(AG\right)^2 - \left(AG\right)^2$$

أو

$$\left(AP\right)^2 + \left(BP\right)^2 + \left(CP\right)^2 - 3\left(PG\right)^2 = \frac{3}{2}\left(AG\right)^2 + \frac{1}{2}\left(BC\right)^2 \qquad (\mathrm{V})$$

سنكرر بالمثل نفس الخطوات السابقة بالنسبة للمتوسط $\overline{BE}$ وعندها نحصل على

$$\left(AP\right)^2 + \left(BP\right)^2 + \left(CP\right)^2 - 3\left(PG\right)^2 = \frac{3}{2}\left(BG\right)^2 + \frac{1}{2}\left(AC\right)^2 \qquad (\mathrm{VI})$$

وبالنسبة للمتوسط $\overline{CD}$

$$\left(AP\right)^2 + \left(BP\right)^2 + \left(CP\right)^2 - 3\left(PG\right)^2 = \frac{3}{2}\left(CG\right)^2 + \frac{1}{2}\left(AB\right)^2 \qquad (\mathrm{VII})$$

بجمع $(\mathrm{IIV}),(\mathrm{IV}),(\mathrm{V})$ ، نجد أن :

$$3\left[(AP)^2+(BP)^2+(CP)^2-3(PG)^2\right]=\frac{3}{2}\left[(AG)^2+(BG)^2+(CG)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[(AB)^2+(BC)^2+(AC)^2\right] \qquad (\text{VIII})$$

والآن سنطبق نظرية $14-5$ على ΔABC :

$$(AG)^2+(BG)^2+(CG)^2=\frac{1}{3}\left[(BC)^2+(AC)^2+(AB)^2\right]$$
$$\Leftrightarrow 3\left[(AG)^2+(BG)^2+(CG)^2\right]=(AB)^2+(BC)^2+(AC)^2$$

بالتعويض في (VIII)

$$3\left[(AP)^2+(BP)^2+(CP)^2-3(PG)^2\right]=\frac{3}{2}\left[(AG)^2+(BG)^2+(CG)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[3\left[(AG)^2+(BG)^2+(CG)^2\right]\right]$$
$$\Rightarrow 3\left[(AP)^2+(BP)^2+(CP)^2-3(PG)^2\right]=3\left[(AG)^2+(BG)^2+(CG)^2\right] \bullet.$$
$$\Leftrightarrow (AP)^2+(BP)^2+(CP)^2=(AG)^2+(BG)^2+(CG)^2+3(PG)^2$$

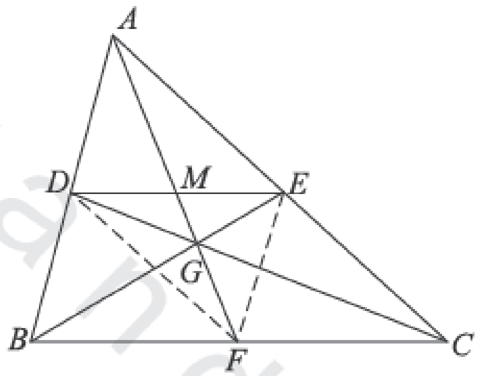
وهكذا يقدم لنا موضوع المتوسطات العديد من العلاقات الشيقة التي سنقدم المزيد منها الآن ونترك الباقي كتدريبات.

نظرية 5–18 في أي مثلث، متوسط المثلث و القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي الضلعين المحيطين بهذا المتوسط ، ينصف كل منهما الآخر.

البرهان

سنحاول إثبات المطلوب عن طريق رسم $\overline{DF}, \overline{EF}$ ، القطعتين الواصلتين بين منتصفات الأضلاع في المثلث ABC (انظر الشكل $25-5$). عندها نحصل على

متوازي الأضلاع $ADFE$ (كل ضلعين فيه متقابلين متوازيان) ، والذي قطراه $\overline{AF}, \overline{DE}$ ينصف كل منهما الآخر. من المعروف أن نقطة تقاطع المتوسطات في المثلث هي نوعاً ما بمثابة نقطة توازن في المثلث، دعونا نختبر هذه الخاصية في النظرية التالية

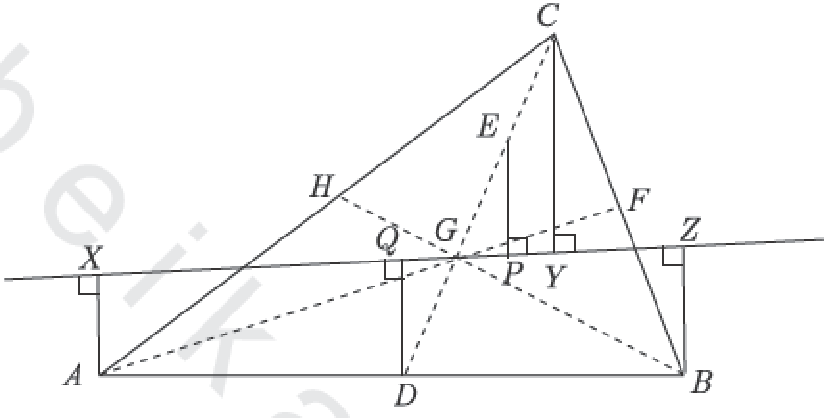


شكل 25 − 5

نظرية 5–19

في أي مثلث ABC. اعتبر خطاً مستقيماً $\overleftrightarrow{XYZ}$ ماراً بنقطة تلاقي المتوسطات G. ارسم من رؤوس المثلث أعمدة على هذا المستقيم تقطعه في X, Y, Z كما في الشكل 26 − 5. إن $CY = AX + BZ$

البرهان



شكل $5-26$

نرسم متوسطات المثلث $\overline{AF}, \overline{BH}, \overline{CD}$ ، (انظر الشكل $5-26$)، ونرسم $EP \perp XZ$ حيث E منتصف $\overline{CG}$ ؛ ومن ذلك نستنتج أن $CE = EG = GD$.

وأخيراً نرسم $XZ \perp DQ$ ، ولأن $\overline{AX} \parallel \overline{BZ} \parallel \overline{QD}$ (أعمدة على مستقيم واحد)، فإن $\overline{DQ}$ قاعدة متوسطة لشبه المنحرف $ZBAX$. إذن:

$$QD = \frac{1}{2}\left(AX + BZ\right) \text{. ولكن } EP = \frac{1}{2}CY$$

(خواص القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث). ومن كون

$$\Delta QGD \cong \Delta PGE$$

نحصل على :

$$QD = EP$$

إذن :

$$\bullet\ \frac{1}{2}\left(AX+BZ\right)=\frac{1}{2}CY \text{ الذي يكافئ } CY=AX+BZ.$$

من الشيق أن تلاحظ أنه يوجد عدد غير منته من المثلثات التي تحيط بها دائرة واحدة ولها نقطة تقاطع متوسطات واحدة تقع داخل هذه الدائرة ، وسوف تكون هذه الخاصية هي نظريتنا التالية، نظرية $20-5$.

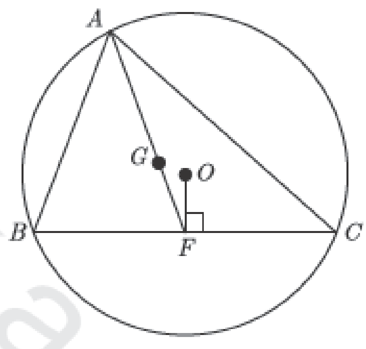
نظرية 5–20	يوجد عدد غير منته من المثلثات التي تحيط بها دائرة واحدة ولها نقطة تقاطع متوسطات واحدة تقع داخل هذه الدائرة.

البرهان

ستكون طريقة برهان هذه النظرية مختلفة نوعاً ما عن الطرق التي كنا نستخدمها في برهان النظريات السابقة ، فلعرض برهان وجود عدد غير منته من المثلثات بالشروط اللازمة والموضحة في نص النظرية ، فإننا سنعمل على إثبات وجود مثلث يتم اختياره عشوائياً، وهذا سيعني وجود عدد غير منته من المثلثات التي يمكن إنشاؤها بصورة مشابهة.

لتكن O دائرة داخلها نقطة G تمثل نقطة تلاقي المتوسطات لجميع المثلثات التي نريد إنشاءها. وسنبدأ باختيار أي نقطة تقع على الدائرة O ولتكن A والتي ستكون أحد رؤوس ΔABC (انظر الشكل $27-5$)، نصل النقطة A بنقطة تقاطع المتوسطات G ، ونمد $\overline{AG}$ حتى النقطة F بحيث $GF=\frac{1}{2}\left(AG\right)$. نرسم الآن $\overline{OF}$ ، ومن النقطة F ننشئ عموداً على $\overline{OF}$ يقطع الدائرة في B,C. وهذا يبرهن ببساطة أنه يوجد مثلث يحقق الشروط اللازمة في النظرية، ولكن لأن النقطة A

اختيارية ، والخطوات التالية لاختيارها لا تعتمد على موقعها ، فهناك عدد غير منته من المثلثات يمكن إنشاؤها بنفس الطريقة وتحت نفس الشروط ، وبهذا يكون برهاننا قد اكتمل . ●



شكل 27 – 5

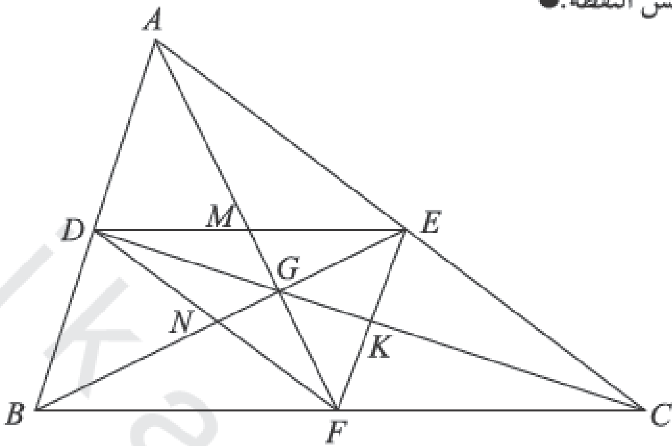
سوف تتضمن دراستنا لموضوع المتوسطات في المثلث نظرة سريعة على ما يسمى بالمثلث المتوسط mediam triangle ، والذي ينتج من القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع أي مثلث.

نظرية 5–21 المثلث والمثلث المتوسط له لهما نفس نقطة تقاطع المتوسطات.

البرهان

في ΔABC ، المتوسط $\overline{AF}$ ينصف $\overline{DE}$ في النقطة M (نظرية 18 – 5). إذن $\overline{FM}$ متوسط في ΔDEF (انظر الشكل 28 – 5). بالمثل $\overline{DK}, \overline{EN}$ أيضاً متوسطان في ΔDEF ، وكذلك هذه المتوسطات هي أيضا متوسطات ΔABC .

ولأن متوسطات ΔABC تتقاطع في النقطة G ، فإن متوسطات ΔDEF تتقاطع في نفس النقطة.●



شكل $28 - 5$

بنظرة سريعة على هذا الفصل ، تجد أننا قد بدأنا بدراسة منصفات زوايا المثلث ، ثم انتقلنا للقطعة المستقيمة الخارجة من رأس المثلث إلى ضلع المثلث المقابل لهذه الرأس وأهمية ذلك في نظرية ستيوارت ، ثم أخيراً درسنا خصائص المتوسطات في المثلث ، وهذا بالتأكيد أثرى معلوماتك كثيراً حول المثلثات.

تدريبات

1. برهن أن مجموع مقلوبات أطوال منصفات الزوايا الداخلية للمثلث أكبر من مجموع مقلوبات أطوال أضلاع هذا المثلث.
2. برهن أن مساقط الأعمدة الأربعة المرسومة من زاوية رأس مثلث للمنصفين الداخليين والخارجيين للزاويتين الباقيتين من المثلث تقع جميعها على استقامة واحدة.

3.برهن أن الفرق بين قياسي الزاويتين الناتجتين من تقاطع منصف زاوية في مثلث والضلع المقابل لها يساوي الفرق بين قياسي زاويتي المثلث الباقيتين.

4.برهن أن قياس الزاوية المحصورة بين المنصف الخارجي لزاوية في مثلث والضلع المقابل لها يساوي نصف الفرق بين قياسي زاويتي المثلث الباقيتين.

5.في مثلث ثلاثيني ستيني طول وتره 4 ، أوجد البعد بين رأس الزاوية القائمة ونقطة تقاطع منصفات الزوايا للمثلث .

6.منصف الزاوية القائمة في مثلث قائم الزاوية يقسم الوتر لقطعتين مستقيمين طولهما $3,4$ أوجد طول منصف الزاوية الحادة الكبرى في المثلث القائم.

7.استخدم نظرية ستيوارت للحصول على طول متوسطات مثلث بدلالة أطوال أضلاعه.

8.برهن أن أي مثلثين يتقاطع كل ضلعين من أضلاعهما عند نقطة تقاطع كل دائرتين من دوائر مايكل الثلاث متشابهان .

9.برهن أن المثلثين المتشابهين المنشأين على نفس المثلث لهما نفس نقطة مايكل.

10.باستخدام الشكل $17-5$ أثبت أن : $m\angle BMC = m\angle BAC + m\angle FED$.

11.أثبت أنه إذا تقاطعت ثلاث دوائر في نقطة واحدة M ، فإنه يوجد على الأقل ثلاثة مثلثات متشابهة تكون النقطة M هي نقطة مايكل لها.

12.أثبت أنه إذا أنشئ مثلث بحيث كانت أطوال أضلاعه هي أطوال متوسطات مثلث آخر ، فإن طول كل متوسط من متوسطات المثلث المنشأ يساوي ثلاثة أرباع طول كل ضلع من أضلاع المثلث الآخر.

13.أثبت أن مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه هي أطوال متوسطات مثلث آخر تساوي ثلاثة أرباع مساحة المثلث الآخر.

14. أثبت أنه إذا كان هناك نقطتان على أبعاد متساوية من نقطة تقاطع المتوسطات في مثلث ، فإن مجموع مربعات أبعادهما عن رؤوس المثلث متساوية.

15. أثبت أن الخط المستقيم المار بمنتصف متوسط مثلث وبأحد رأسي المثلث الآخرين (اللتين لا يخرج منهما المتوسط) يقسم ضلع المثلث المقابل لهذه الرأس إلى جزأين طول أحدهما نصف طول الآخر.

16. أثبت أن متوسطات المثلث تقسمه إلى ستة مثلثات متساوية في المساحة.

17. أثبت أن الخطوط المستقيمة المارة برؤوس مثلث والتي كل منها يوازي ضلع المثلث المقابل له ، هي أضلاع مثلث آخر ، يكون المثلث الأصلي مثلثاً متوسطاً له.

18. أثبت أنه في أي مثلث قائم الزاوية في C : $\frac{1}{h_c^2}=\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}$. ثم أثبت العكس.

19. أثبت أنه في أي مثلث قائم الزاوية في C : $5m_c^2 = m_a^2 + m_b^2$. ثم أثبت العكس.