

نقاط على استقامة واحدة

الثنوية Duality

في الهندسة الإقليدية ، هناك أوضاع كثيرة تظهر فيها علاقات بين النقاط والمستقيمات ، وفي الحالة التي تتعلق بشأن النقاط والمستقيمات في المستوى ، عندما نضع كلمة نقطة محل كلمة مستقيم وكلمة مستقيم محل كلمة نقطة في العبارات التي نستخدم فيها هاتين الكلمتين ، فإن العبارة الجديدة يقال عنها إنها ثنوية العبارة الأصلية. وفي بعض الأحيان قد تحتاج العبارة إلى بعض التعديلات لتحافظ على بنيتها الرياضية السليمة.

وقد اكتشف تشارلز جوليان براينشون (١٧٨٥ - ١٨٦٤) Charles Julien Brianchon مبدأ الثنوية أو المقابلة أثناء استخدام هذه العلاقة على نظرية باسكال ، وسوف نتطرق إلى هذه النظريات لاحقاً في هذا الفصل. وعند انتقالنا من الفصل الثاني إلى الفصل الثالث سنأخذ في اعتبارنا مبدأ الثنوية أو المقابلة ؛ وذلك لأن التقاطع في نقطة بالنسبة للمستقيمات يقابل وضع نقاط على استقامة واحدة بالنسبة للنقاط. إن المقصد الأول من هذا الفصل هو وقوع نقاط على استقامة واحدة. دعونا أولاً نقدم مثلاً على مبدأ الثنوية أو المقابلة.

العبارة المقابلة

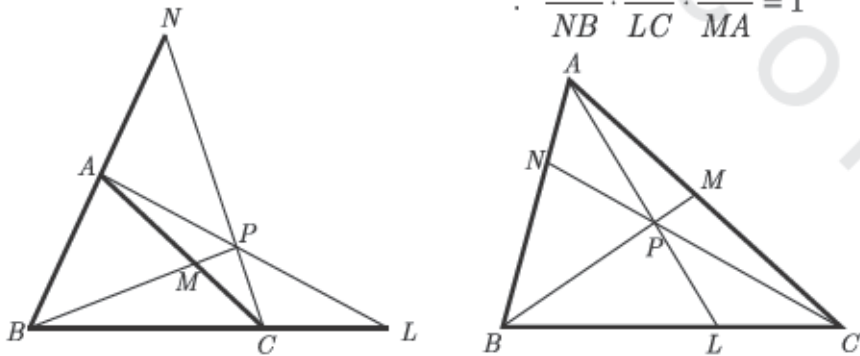
العبارة

- ١- أي مستقيمين مختلفين (غير متوازيين ولا متطابقين) يعينان نقطة وحيدة .
- ٢- أي مستقيم يحوي عدداً غير منتهٍ من النقاط .
- ٣- بثلاثة مستقيمات غير ملتقية في نقطة واحدة نحصل على ثلاثي أضلاع وحيد.
- ١- أي نقطتين مختلفتين (غير متطابقتين) تعينان مستقيماً وحيداً .
- ٢- أي نقطة تحوي عدداً غير منتهٍ من المستقيمات .
- ٣- بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة نحصل على مثلث وحيد.

المثال الأخير يوضح أننا يجب أن نعدل قليلاً عند صياغة العبارة المقابلة ؛ ولذا، وعلى وجه التحديد نجد أن "التقاطع في نقطة واحدة concurrent" يقابل "نقاط على استقامة واحدة collinear" كما في لفظ "مثلث triangle"، والمقابل لها لفظ "ثلاثي أضلاع trilateral".

والآن دعونا نستدعي نظرية شيفا مرة أخرى (انظر الشكل 1-3) والتي تنص على أنه " إذا كان لدينا ثلاثة مستقيمات تحوي الرؤوس A, B, C من المثلث ABC ، وتقطع الأضلاع المقابلة في النقاط L, M, N على الترتيب ، فإنها تتقاطع في نقطة واحدة إذا فقط إذا كان

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$



شكل 1-3

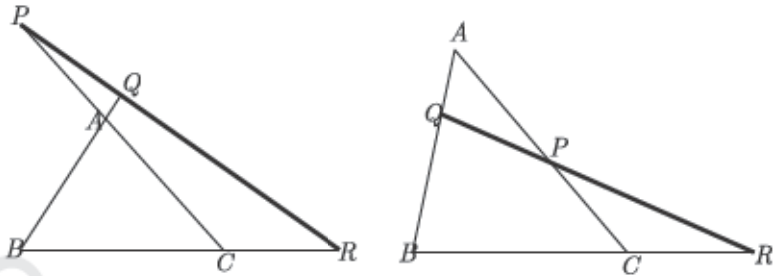
وقبل ذلك ، نستطيع أن نقول إنه في معظم الأحيان فإن ثنوية (مقابل) المسلمة هو أيضاً مسلمة ، وأن ثنوية (مقابل) التعريف هو أيضاً تعريف ، وبالتالي في معظم الأحيان أيضاً ، فإنه إذا كانت العبارة نظرية ، فإن ثنويتها (مقابلها) بالمثل هو نظرية* .
و على أي حال ، فنحن في النهاية نود أن نمتلك عبارة تكون مؤهلة لتصبح نظرية. على وجه التحديد ، ماذا نريد أن نبحث هنا؟ مع معرفتنا بمبدأ الثنوية ، سنحاول صياغة العبارة المقابلة لنظرية شيفا ، والتي هي في الواقع إعادة اكتشاف للنظرية المهمة للرياضي الإسكندري المعروف منيلوس Menelaus** والتي سوف نناقشها في الجزء القادم ، وهي التي قادت جيوفاني شيفا لاستنتاج نظريته التي ظهرت في كتابه الأول (ميلانو ١٦٧٨) بواسطة مبدأ الثنوية - لاحظ نظرية منيلوس التالية وعلاقة التقابل بين النظريتين .

النقاط الثلاث P, Q, R والتي تقع على الترتيب على الأضلاع $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}$ في المثلث ABC (انظر الشكل 2-3) تكون على استقامة واحدة إذا فقط إذا كان : *** $\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1$

نظرية منيلوس Menelaus's Theorem

قدم منيلوس الإسكندري (١٠٠ بعد الميلاد) في عمله الذي يحمل عنوان "الكروية" نظريته المعروفة والتي تقدمها هنا ، مطبقاً ذلك في المستوى أولاً ، بغرض تطوير أطروحته الأصلية على الأشكال

* يتفرد النظام الهندسي بأنه يستند إلى مسلمات وتعريف ، وتكون ثنوية تلك العبارات كلها صحيحة ، وثنوية كل نظرية هي أيضاً صحيحة ، ويبرر ذلك الادعاء أن برهان ثنوية النظرية يتم استنتاجه بسهولة باستبدال كل عبارة في هذا البرهان بالعبارة الثنوية لها (المقابلة لها) في النظرية الأصلية.
** في العصور المظلمة ، كثير من الرياضيات اليونانية التقليدية فقدت ونسيت.
*** سيتم توضيح سبب وجود الإشارة السالبة عند شرح إثبات النظرية.



شكل 2 - 3

الكروية*، وكما ذكرنا فإن هذه النظرية التي تحمل اسم منيلوس لم تدخل حيز الشهرة قبل إعادة إحيائها بواسطة جيوفاني شيفا كجزء من عمله في عام ١٦٧٨ م.

نظرية 3-1 (نظرية منيلوس) النقاط الثلاث P, Q, R والتي تقع على الترتيب على الأضلاع $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}$ في المثلث ABC (انظر لشكل 3-2) تكون على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1$$

كما في نظرية شيفا، فإننا نحتاج أن نتحرك في اتجاهين عند الإثبات، فلدينا عبارتان وسنستخدم واحدة للوصول إلى الأخرى ثم العكس، وسنبداً أولاً بإثبات أنه

* الصورة الكروية للمناظرة لنظرية 3-1 في المثلث الكروي ABC : $\frac{\sin \widehat{AQ}}{\sin \widehat{QB}} \cdot \frac{\sin \widehat{BR}}{\sin \widehat{RC}} \cdot \frac{\sin \widehat{CP}}{\sin \widehat{PA}} = -1$

إذا كانت النقاط P, Q, R تقع على الترتيب على الأضلاع $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}$ في

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1$$

المثلث ABC تكون على استقامة فإن

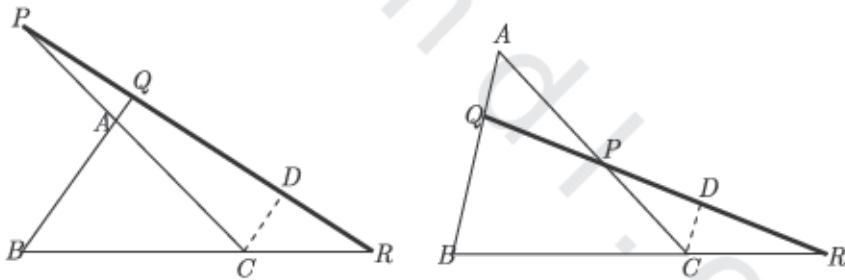
البرهان I

نرسم من النقطة C المستقيم \overline{CD} يوازي \overline{AB} ويقطعه في D (انظر الشكل

3-3).

$$\Delta DCR \sim \Delta QBR \Rightarrow \frac{DC}{QB} = \frac{RC}{BR} \quad \text{or} \quad DC = \frac{(QB)(RC)}{BR} \quad (\text{I})$$

$$\Delta PDC \sim \Delta PQA \Rightarrow \frac{DC}{AQ} = \frac{CP}{PA} \quad \text{or} \quad DC = \frac{(AQ)(CP)}{PA} \quad (\text{II})$$



شكل 3-3

من (I), (II) نحصل على :

$$\frac{(QB)(RC)}{BR} = \frac{(AQ)(CP)}{PA} \quad \text{or} \quad (QB)(RC)(PA) = (AQ)(CP)(BR)$$

وهذا يعني أن :

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

باتخاذ الاتجاه في الاعتبار في الرسم الأيسر من الشكل 3-3 سنرى أن النسب

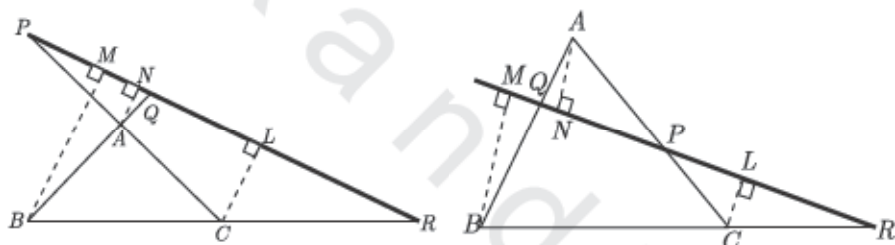
$$\frac{BR}{RC} \cdot \frac{AQ}{QB} \cdot \frac{CP}{PA}$$

كلها سالبة بينما على الرسم الأيمن سنجد أن النسبة $\frac{BR}{RC}$ هي

النسبة الوحيدة السالبة ؛ ولذا ففي الحالتين عدد فردي من النسب السالبة أي أن

$$\bullet \frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1$$

البوهان II



شكل 3-4

مرة ثانية، سنبدأ بفرض أن النقاط P, Q, R تقع على استقامة واحدة، ثم نرسم $\overline{BM} \perp \overline{PR}, \overline{AN} \perp \overline{PR}$. وكذلك نرسم $\overline{CL} \perp \overline{PR}$ (انظر الشكل 3-4).

$$\Delta BMQ \sim \Delta ANQ \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AN}{BM} \quad (I)$$

$$\Delta LCP \sim \Delta NAP \Rightarrow \frac{CP}{PA} = \frac{LC}{AN} \quad (II)$$

$$\Delta MRB \sim \Delta LRC \Rightarrow \frac{BR}{RC} = \frac{BM}{LC} \quad (III)$$

من (I), (II), (III) نحصل على :

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{BR}{RC} = \frac{AN}{BM} \cdot \frac{LC}{AN} \cdot \frac{BM}{LC} = 1$$

في الرسم الأيسر من الشكل 3-4 سنرى أن $\frac{AQ}{QB}$ نسبة سالبة وكذلك $\frac{CP}{PA}, \frac{BR}{RC}$ نسبتان سالبتان، إذن :

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1$$

وفي الرسم الأيمن من الشكل 3-4 سنرى أن $\frac{AQ}{QB}, \frac{CP}{PA}$ نسبتان موجبتان بينما $\frac{AQ}{QB}$ نسبة سالبة، إذن :

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1 \bullet$$

لإكمال برهان نظرية منيلوس علينا أن نثبت عكس ما أثبتناه سابقاً، أي سنثبت الآن أنه إذا كانت النقاط الثلاث P, Q, R تقع على المستقيمت $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}$ على الترتيب بحيث $\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1$ فإن P, Q, R تقع على استقامة واحدة.

البرهان

في الشكل 3-2 نفرض أن المستقيم الذي تقع عليه النقطتان R, Q يقطع \overline{AC} في النقطة P' ، ويمكننا استخدام الجزء الذي أثبتناه في النظرية آنفاً. نعلم أن :

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP'}{P'A} = -1$$

ولكن لدينا الفرضية (المعطى) التي تقول :

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1$$

إذن $\frac{CP'}{P'A} = \frac{CP}{PA}$ ، أي أن النقطة P' تنطبق على النقطة P ، وهذا يثبت وقوع

النقاط الثلاث على استقامة واحدة. ●

ستوفر لنا نظرية منيلوس طريقاً مفيداً لإثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة.

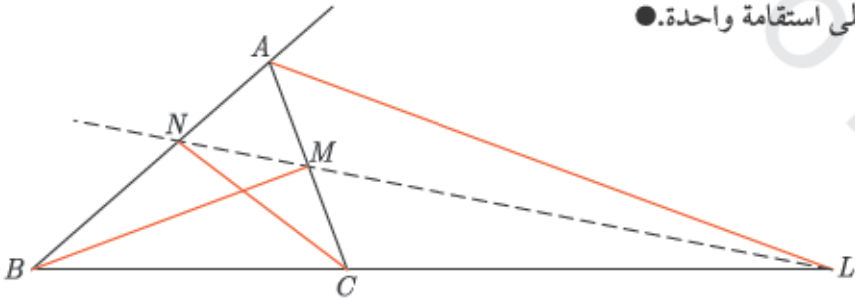
تطبيقات على نظرية منيلوس

قبل بحث النظريات المشهورة التي نستخدم نظرية منيلوس في إثباتها، سنقوم بدراسة بعض تطبيقات هذه النظرية، حيث كل من هذه التطبيقات التي لا تحمل أسماء ستقدم لنا بعض النتائج القليلة الشيقة، والتي يمكن بسهولة إثباتها بواسطة نظرية منيلوس .

تطبيق 1

أثبت أن المنصفين الداخليين لزاويتين في مثلث مختلف الأضلاع، والمنصف الخارجي للزاوية الثالثة من نفس المثلث تلاقي الأضلاع المقابلة في ثلاث نقاط تقع

على استقامة واحدة. ●



شكل 5 - 3

البرهان

في المثلث ABC ، \overline{BM} ، \overline{CN} منصفان داخليان للزاويتين $\angle ABC$ ، $\angle ACB$ ، \overline{AL} منصف خارجي للزاوية الثالثة عند النقطة A (انظر الشكل 3-5). ولأن منصف الزاوية (الداخلي أو الخارجي) يجزئ الضلع المقابل

إلى جزأين يتناسبان مع ضلعي المثلث الآخرين. من ذلك نحصل على

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC}, \frac{BN}{NA} = \frac{BC}{AC}, \frac{CL}{BL} = \frac{AC}{AB}$$

بالضرب نحصل على:

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

وبما أن $\frac{CL}{BL} = \frac{-CL}{LB}$ ، فإن:

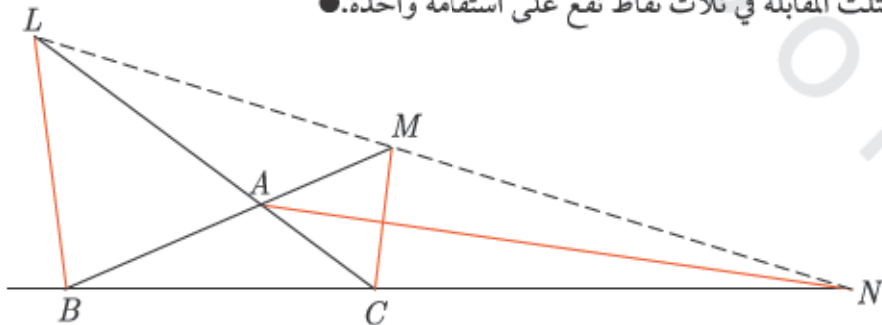
$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{CL}{BL} = -1$$

إذن من نظرية منيلوس، النقاط P, Q, R تقع على استقامة واحدة.

تطبيق 2

أثبت أن المنصفات الخارجية لزاويا مثلث مختلف الأضلاع تلاقي أضلاع نفس

المثلث المقابلة في ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة. ●



شكل 3-6

البرهان

في المثلث ABC ، المنصفات الخارجية للزوايا عند الرؤوس A, B, C تلاقى أضلاع المثلث أو امتداداتها في N, L, M على الترتيب (انظر الشكل 6-3). ولأن منصف الزاوية (الداخلي أو الخارجي) يجزئ الضلع المقابل إلى جزأين يتناسبان مع ضلعي المثلث الآخرين؛ إذن:

$$\frac{CL}{AL} = \frac{BC}{AB}, \frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BC}, \frac{BN}{CN} = \frac{AB}{AC}$$

أي أن:

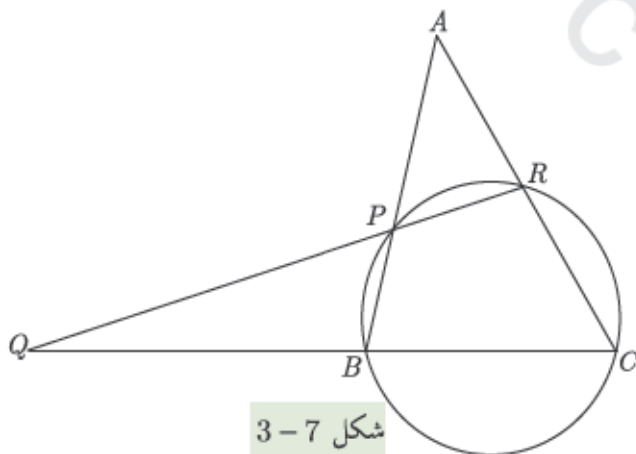
$$\frac{CL}{AL} \frac{AM}{BM} \frac{BN}{CN} = \frac{BC}{AB} \frac{AC}{BC} \frac{AB}{AC} = 1$$

وعليه؛ فمن نظرية منيلوس، النقاط P, Q, R تقع على استقامة واحدة.

تطبيق 3

إذا كان لدينا دائرة تمر بالرأسين B, C في المثلث ABC ، وتقطع كلاً من AB, AC في P, R على الترتيب، و PR يلاقي BC في النقطة Q ، فأثبت أن

$$\bullet \frac{QC}{QB} = \frac{(RC)(AC)}{(PB)(AB)}$$



شكل 7-3

البرهان

في المثلث ABC ، حيث \overline{QPR} قاطع لأضلاعه (انظر الشكل 7-3)، وباستخدام نظرية منيلوس $\frac{RC}{AR} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{QB}{CQ} = -1$ ، وبأخذ القيمة المطلقة نحصل على

$$\frac{QC}{QB} = \frac{RC}{AR} \frac{AP}{PB} \quad (I)$$

ولكن $(AP)(AB) = (AR)(AC)$. (إذا تقاطع قاطعان لدائرة في نقطة خارجها، فإن حاصل ضرب القاطع الأول في جزئه الخارج عن الدائرة يساوي القاطع الثاني في جزئه الخارج عن الدائرة). إذن،

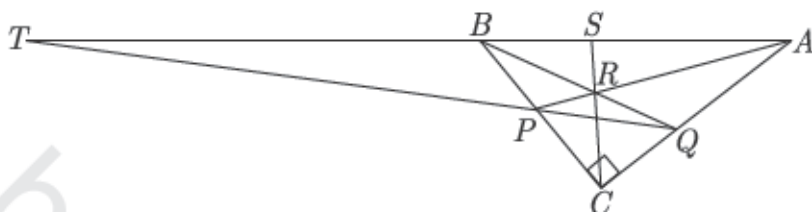
$$\frac{(AP)}{(AR)} = \frac{(AC)}{(AB)} \quad (II)$$

$$\bullet \frac{QC}{QB} = \frac{(RC)(AC)}{(PB)(AB)} \text{ نحصل على (I) في (II)}$$

غالباً ما نحتاج نظرية منيلوس ومقابلها نظرية شيفا لحل المشكلات أو إثبات النظريات. التطبيق التالي يؤكد ذلك.

تطبيق 4

في المثلث القائم ABC ، النقطتان P, Q تقع على $\overline{AC}, \overline{BC}$ على الترتيب، بحيث $CP = CQ = 2$ ، تتقاطع القطعتان $\overline{AP}, \overline{BQ}$ في النقطة R ، رسمنا \overline{CR} يمر بالرأس C وبالنقطة R ويقطع \overline{AB} في S ، ورسمنا \overline{QP} يقطع \overline{AB} في T ، فإذا كان طول الوتر $AB = 10$ ، $AC = 8$. أوجد TS . (الشكل 8-3).



شكل 3 - 8

البرهان

في المثلث القائم ABC ، طول الوتر $AB = 10$ ، $AC = 8$ ، إذن بتطبيق نظرية فيثاغورس $BC = 6$ ، وكذلك في نفس المثلث ، بتطبيق نظرية شيفا حيث $\overline{AP}, \overline{BQ}, \overline{CS}$ تتقاطع في نقطة . إذن :

$$\frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BS}{SA} = 1$$

بالتعويض نحصل على :

$$\frac{6}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{BS}{10 - BS} = 1 \Rightarrow BS = 4$$

والآن ، بما أن \overline{QPT} قاطع للمثلث ABC ، وبتطبيق نظرية منيلوس :

$$\frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BT}{TA} = -1$$

ولأننا لا نتعامل مع قطع مستقيمة موجهه ، نستطيع صياغة العلاقة السابقة كالتالي :

$$(AQ) \cdot (CP) \cdot (BT) = (QC) \cdot (PB) \cdot (TA)$$

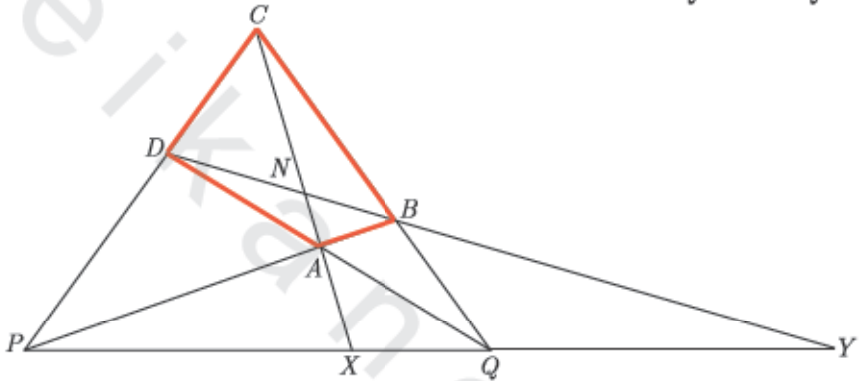
بالتعويض نجد أن :

$$(6) \cdot (2) \cdot (BT) = (2) \cdot (4) \cdot (BT + 10)$$

●. $BT = 20 \Rightarrow TS = 24$ ، إذن ،

تطبيق 5

في الشكل الرباعي $ABCD$ ، يتقاطع كل من $\overline{AB}, \overline{CD}$ في P بينما يتقاطع $\overline{AD}, \overline{BC}$ في Q ، القطران $\overline{AC}, \overline{BD}$ يقطعان \overline{PQ} في X, Y على الترتيب. أثبت أن

$$\bullet \cdot \frac{PX}{XQ} = -\frac{PY}{YQ} \quad (\text{انظر الشكل 3-9}).$$


شكل 3-9

البرهان

بتطبيق نظرية شيفا في المثلث PQC حيث $\overline{PB}, \overline{QD}, \overline{CX}$ تتقاطع في نقطة، إذن :

$$\frac{PX}{XQ} \cdot \frac{QB}{BC} \cdot \frac{CD}{DP} = 1 \quad (\text{I})$$

والآن بما أن \overline{DBY} قاطع للمثلث PQC وتطبيق نظرية منيلوس :

$$\frac{PY}{YQ} \cdot \frac{QB}{BC} \cdot \frac{CD}{DP} = -1 \quad (\text{II})$$

من (I), (II) نحصل على :

$$\bullet \cdot \frac{PX}{XQ} = -\frac{PY}{YQ}$$

والآن دعونا ندرس بعض النظريات الشهيرة والتي نستطيع إثباتها باستخدام نظرية منيلوس.

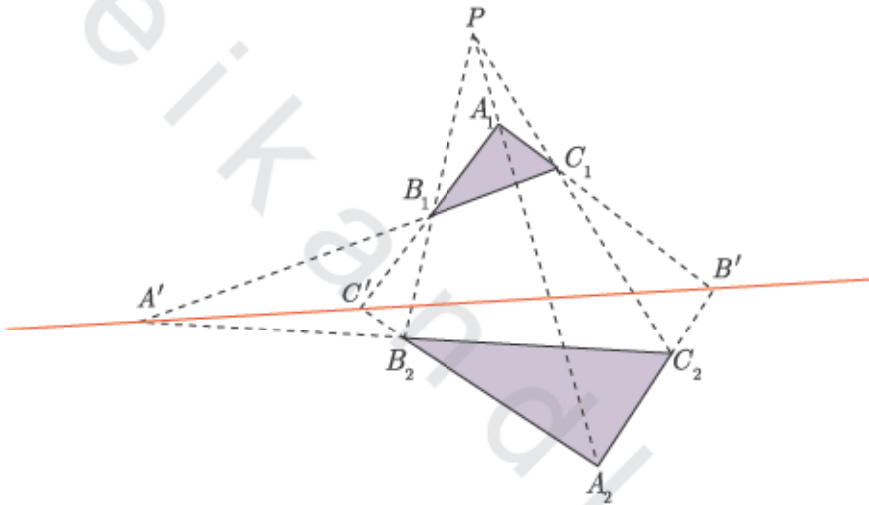
نظرية ديزارغ Desargues's Theorem

لم يحظ جيرارد ديزارغ (١٥٩١-١٦٦١) Gerard Desargues طوال حياته بالاهتمام مثلما حظي به آخر حياته. وكانت قلة شعبيته تلك ترجع في جزء منها لتطوير الهندسة التحليلية على يد رينيه ديكارت (١٥٩٦ - ١٦٥٠) Rene Descartes، وبالإضافة إلى ذلك، كان في أطروحات ديزارغ الكثير من المصطلحات الجديدة غير المألوفة إلى حد كبير. (وبالمناسبة نحن نبذل قصارى جهدنا لتلافي أي مصطلحات أو مسميات جديدة في هذا الكتاب. إننا نريد أن نتعلم مما حصل للعالم ديزارغ).

وفي العام ١٦٤٨ م، طبع تلميذه في درجة الماجستير أبراهام بوس Abraham Boss كتاباً بعنوان "طريقة ديزارغ العالمية للتدريب على التنظير" Maniere universelle de M.Desargues, pour pratiquer la perspective والذي لم ينتشر إلا بعد قرنين. وقد احتوى هذا الكتاب على نظرية أصبحت واحدة من المقترحات الأساسية للهندسة الإسقاطية في القرن التاسع عشر. وهذه النظرية هي التي تهمننا هنا والتي تنطوي على وضع أي مثلثين في وضع يتيح لثلاثة مستقيمت تمر بالرؤوس المتناظرة في المثلثين أن تتقاطع في نقطة واحدة بحيث يتحقق أن كل ضلعين متناظرين في المثلثين يتقاطعان في ثلاث نقاط على استقامة واحدة. وسوف نثبت نظرية ديزارغ بواسطة نظرية منيلوس .

نظرية 2-3

إذا تم وضع $\Delta A_1B_1C_1, \Delta A_2B_2C_2$ بحيث كانت المستقيمات $\overleftrightarrow{A_1A_2}, \overleftrightarrow{B_1B_2}, \overleftrightarrow{C_1C_2}$ والتي تمر برؤوسهما المتناظرة تتقاطع في نقطة واحدة، فإن أزواج الأضلاع المتناظرة فيهما تتقاطع في ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.



شكل 3-10

البرهان

في الشكل 3-10 تلتقي المستقيمات $\overleftrightarrow{C_1C_2}, \overleftrightarrow{B_1B_2}, \overleftrightarrow{A_1A_2}$ في نقطة واحدة ولتكن P ، وبفرض $\overleftrightarrow{C_1B_1}, \overleftrightarrow{C_2B_2}$ تلتقي في نقطة A' ، $\overleftrightarrow{C_1A_1}, \overleftrightarrow{C_2A_2}$ تلتقي في نقطة B' ، $\overleftrightarrow{B_1A_1}, \overleftrightarrow{B_2A_2}$ تلتقي في نقطة C' . وباستخدام نظرية منيلوس حيث $\overleftrightarrow{A'B_1C_1}$ قاطع لأضلاع المثلث PB_2C_2 نحصل على :

$$\frac{PB_1}{B_1B_2} \cdot \frac{B_2A'}{A'C_2} \cdot \frac{C_2C_1}{C_1P} = -1 \quad (\text{I})$$

بالمثل $\overline{C'B_1A_1}$ قاطع للأضلاع المثلث PB_2A_2 ، إذن

$$\frac{PA_1}{A_1A_2} \cdot \frac{A_2C'}{C'B_2} \cdot \frac{B_1B_2}{B_1P} = -1 \quad (\text{II})$$

وكذلك $\overline{B'A_1C_1}$ قاطع للمثلث PA_2C_2 ، إذن

$$\frac{PC_1}{C_1C_2} \cdot \frac{C_2B'}{B'A_2} \cdot \frac{A_1A_2}{A_1P} = -1 \quad (\text{III})$$

بضرب (I)، (II)، (III) نحصل على:

$$\frac{B_2A'}{A'C_2} \cdot \frac{A_2C'}{C'B_2} \cdot \frac{C_2B'}{B'A_2} = -1$$

وهذا يحقق نظرية منيلوس على المثلث $C_2B_2A_2$ ، ويجعل النقاط C', B', A' على

استقامة واحدة. ●

جدير بالملاحظة أن عكس نظرية ديزارغ هو أيضاً صحيح، فهو المفهوم الثنوي

لنظرية الأصلية، ولكننا سنترك إثبات ذلك تمريناً.

ولتقدير قيمة نظرية ديزارغ، سنقدم أمثلة لبعض التطبيقات التي بالطبع يمكن

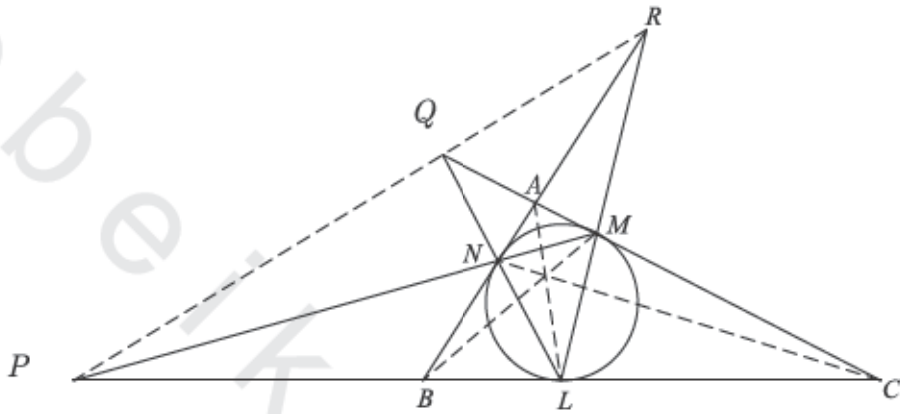
حلها بطرق أخرى، ولكننا سنطبق نظرية ديزارغ في إثباتها.

تطبيق 6

أنشئت دائرة تمس أضلاع المثلث ABC من الداخل في النقاط L, M, N على

الترتيب، يتقاطع كل من $\overline{MN}, \overline{BC}$ في P ، $\overline{NL}, \overline{AC}$ في Q ، $\overline{ML}, \overline{AB}$ في

R . أثبت أن النقاط P, Q, R تقع على استقامة واحدة. (انظر الشكل (11 - 3)) ●



شكل 11 - 3

البرهان

لأن القطعتين المماسيتين للدائرة من نقطة خارجها متطابقتان ، إذن

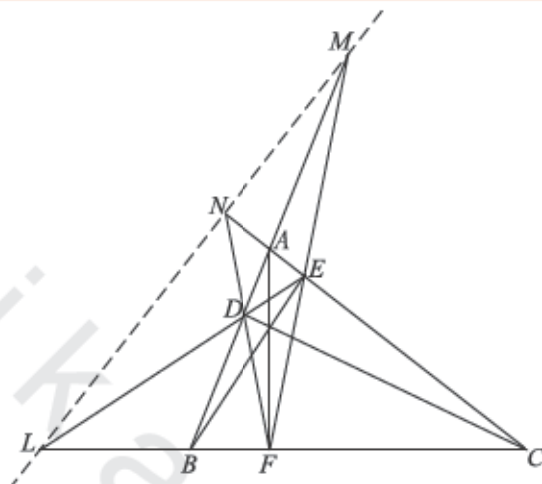
$$AN = AM , NB = BL , MC = LC$$

ومن ذلك :

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{MC}{AM} = 1$$

وبتطبيق نظرية شيفا نستنتج أن $\overline{AL}, \overline{BM}, \overline{CN}$ تتقاطع في نقطة واحدة ، ولأن هذه المستقيمات تمر بالرؤوس المتناظرة للمثلثين $\Delta ABC, \Delta LMN$ ، وبتطبيق نظرية ديزارغ نستنتج أن الأزواج المتناظرة من أضلاع المثلثين تتقاطع في ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة ، أي أن P, Q, R تقع على استقامة واحدة. ●

تطبيق 7



شكل 12 - 3

لتكن النقاط F, E, D نقاط تقاطع ارتفاعات المثلث مع أضلعه من الرؤوس A, B, C على الترتيب، وأضلاع مثلث المساقط FED^* ، $\overline{EF}, \overline{DF}, \overline{DE}$ تقطع أضلاع المثلث ABC ، $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ في M, N, L على الترتيب. أثبت أن النقاط L, M, N تقع على استقامة واحدة. (انظر الشكل 12 - 3)

البرهان

لتكن F, E, D, A, B, C هي الرؤوس المتناظرة لكل من $\triangle ABC, \triangle FED$ ، ولأن $\overline{AF}, \overline{CD}, \overline{BE}$ تتقاطع في نقطة واحدة (ارتفاعات المثلث ABC)، إذن

* مثلث المساقط (مثلث معطى) هو المثلث الذي رؤوسه هي نقاط تقاطع الأعمدة الساقطة على أضلاع المثلث من أي نقطة اختيارية.

بتطبيق نظرية ديزارغ نستنتج أن نقاط تقاطع الأضلاع المتناظرة $\overline{DE}, \overline{BC}$ ، $\overline{FE}, \overline{BA}$ ، $\overline{FD}, \overline{CA}$ الثلاث تقع على استقامة واحدة ●.

نظرية باسكال Pascal's Theorem

يعتبر بليز باسكال (١٦٢٣-١٦٦٢) Blaise Pascal الذي كان أحد معاصري ديزارغ واحداً من أكثر الرياضيين عبقرية في تاريخ الرياضيات. وعلى الرغم من أن غرابة أطواره قد قللت الكثير من ظهور إمكاناته الحقيقية، إلا أنه يعد واحداً ممن أرسوا مبادئ علم الاحتمالات (ثمرة مراسلاته مع فيرما Fermat)، كما قدم مساهمات مهمة عديدة في فروع أخرى من الرياضيات، وسوف نهتم هنا بواحدة من إسهاماته في الهندسة.

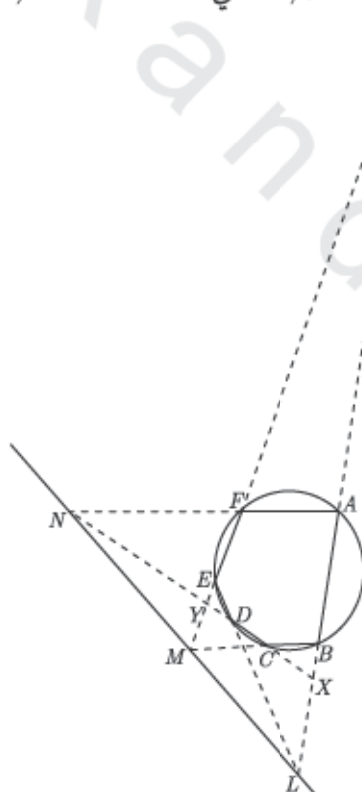
ففي عام ١٦٤٠م، عندما بلغ السادسة عشرة من عمره، قدم مقالاً عن القطوع المخروطية من ورقة واحدة بعنوان "مقال في هندسة المخروطيات Essay pour les coniques" واحتوى هذا المقال على النظرية التي أشار إليها باسكال بعنوان "السداسي العجيب mysterium hexagrammicum" والتي أثارت إعجاب ديكارت Descartes للغاية وكأنه لم يصدق أنها من صنع فتى في السادسة عشرة من عمره، وتنص هذه النظرية على أن أضلاع الشكل السداسي المرسوم داخل قطع مخروطي تتقاطع في نقاط تقع على استقامة واحدة، وسوف ندرس فقط الحالة التي يكون فيها القطع المخروطي دائرة ولا يوجد ضلعان متوازيان متقابلان في ذلك السداسي، وهذا ما رأينا أنه يخدم غرضنا في هذا الفصل.

نظرية باسكال 3-3

إذا رسم سداسي غير منتظم داخل دائرة بحيث كانت أضلاعه المتقابلة غير متوازية، فإن نقاط تقاطع هذه الأضلاع المتقابلة تقع على استقامة واحدة.

البرهان

السداسي $ABCDEF$ مرسوم داخل دائرة (انظر الشكل 3-13) ويلتقي أضلاعه $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{DE}$ في النقطة L ، $\overleftrightarrow{CB}, \overleftrightarrow{EF}$ في النقطة M ، $\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AF}$ في النقطة N ، وكذلك $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CN}$ في النقطة X ، $\overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{CN}$ في النقطة Y ، $\overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{AB}$ في النقطة Z .



شكل 3-13

باستخدام نظرية منيلوس حيث \overleftrightarrow{BC} قاطع لأضلاع المثلث $\triangle XYZ$ نحصل على :

$$\frac{ZB}{BX} \cdot \frac{XC}{CY} \cdot \frac{YM}{MZ} = -1 \quad (\text{I})$$

وباعتبار \overleftrightarrow{AF} قاطعاً لأضلاع المثلث $\triangle XYZ$ ، وباستخدام نظرية منيلوس مرة ثانية نجد أن :

$$\frac{ZA}{AX} \cdot \frac{YF}{FZ} \cdot \frac{XN}{NY} = -1 \quad (\text{II})$$

وأيضاً باعتبار \overleftrightarrow{DE} قاطعاً لأضلاع المثلث $\triangle XYZ$ ، وباستخدام نظرية منيلوس نجد أن :

$$\frac{XD}{DY} \cdot \frac{YE}{EZ} \cdot \frac{ZL}{LX} = -1 \quad (\text{III})$$

بضرب (I), (II), (III) نحصل على :

$$\frac{YM}{MZ} \cdot \frac{XN}{NY} \cdot \frac{ZL}{LX} \cdot \frac{(ZB)(ZA)}{(EZ)(FZ)} \cdot \frac{(XD)(XC)}{(AX)(BX)} \cdot \frac{(YE)(YF)}{(DY)(CY)} = -1 \quad (\text{IV})$$

عند رسم قاطعين لدائرة من نقطة خارجة ، فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول و الجزء الخارجي منه يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني و الجزء الخارجي منه ،

إذن

$$\frac{(ZB)(ZA)}{(EZ)(FZ)} = 1 \quad (\text{V})$$

$$\frac{(XD)(XC)}{(AX)(BX)} = 1 \quad (\text{VI})$$

$$\frac{(YE)(YF)}{(DY)(CY)} = 1 \quad (\text{VII})$$

إذن باستخدام نظرية منيلوس ، P, Q, R تقع على استقامة واحدة. ●

ومن المثير للاهتمام ملاحظة أن نظرية باسكال من الممكن أن تتوسع حسب

النسق التالي

إذا وقعت رؤوس سداسي غير منتظم على دائرة (بأي ترتيب) فإن نقاط تقاطع الأضلاع المتقابلة (إذا وجدت) تقع على استقامة واحدة.

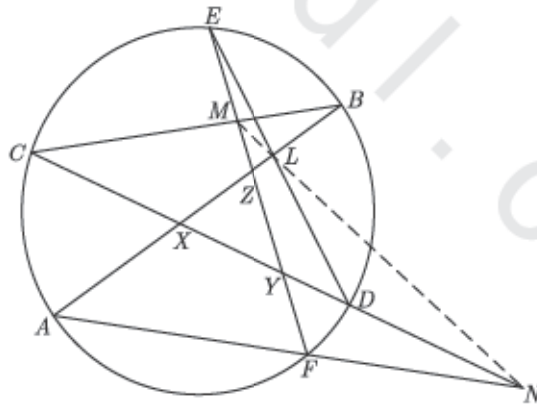
نظرية 3-4

(تطوير نظرية

باسكال)

وكمثال على هذا التطوير ، ندعوك لبرهنة نظرية 3-4 على الشكل

3-14 ، حيث هناك تعديل بسيط واحد فقط يجب أن يتم ليكون السبب في الوصول من المعادلة (V) إلى المعادلة (VII). لاحظ أن نفس الأزواج من الأضلاع المتقابلة ستستخدم هنا كما استخدمناها سابقا.



شكل 3-14

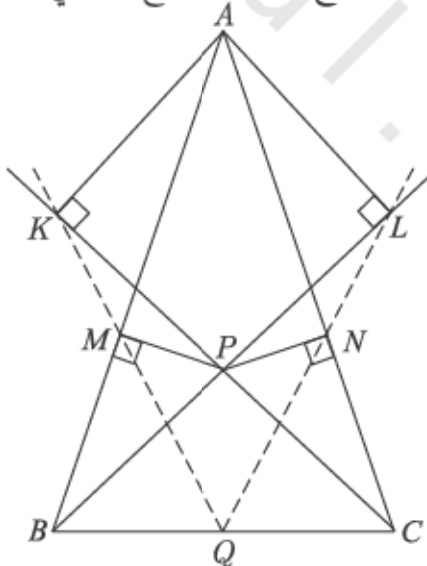
لنظرية باسكال العديد من التطبيقات وسندرس الآن بعض هذه التطبيقات .

تطبيق 8

إذا كانت النقطة P تقع داخل المثلث ABC ، وكانت M, N نقطتي تقاطع العمودين من P على الضلعين $\overline{AB}, \overline{AC}$ على الترتيب، $\overline{AK} \perp \overline{CP}$ في النقطة K ، $\overline{AL} \perp \overline{BP}$ في النقطة L ، (انظر الشكل 3-15). أثبت أن $\overline{KM}, \overline{LN}, \overline{BC}$ تتقاطع في نقطة واحدة. ●

البرهان

يمكننا بسهولة إثبات أن النقاط A, K, M, P, N, L تقع على دائرة واحدة نصف قطرها \overline{AP} ، ويمكننا توضيح ذلك بأن الزاويتين القائميتين $\angle AKP, \angle AMP$ مرسومتان على نفس نصف الدائرة، وكذلك نفس الحالة بالنسبة للزاويتين القائميتين $\angle ALP, \angle ANP$ ، وباستخدام تطوير نظرية باسكال (نظرية 4-3)، نلاحظ أن السداسي $AKMPNL$ أزواج أضلاعه تتقاطع كما يلي



شكل 3-15

$$\overline{AM} \cap \overline{LP} = B$$

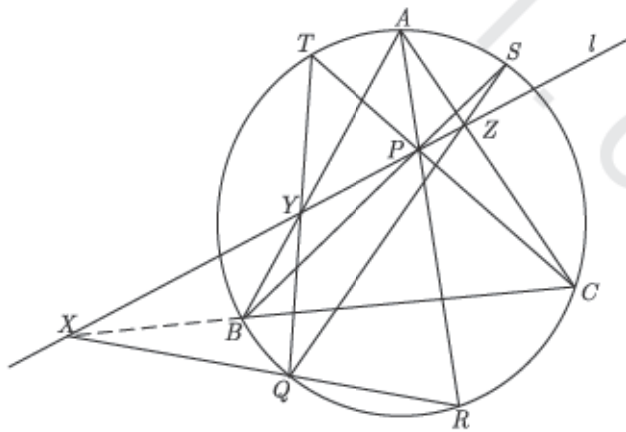
$$\overline{AN} \cap \overline{KP} = C$$

$$\overline{KM} \cap \overline{LN} = Q$$

باستخدام نظرية باسكال ، نصل إلى أن النقاط B, C, Q تقع على استقامة واحدة ، وهذا ما يجعلنا نستطيع القول بأن $\overline{KM}, \overline{LN}, \overline{BC}$ تتقاطع في نقطة واحدة. ●

تطبيق 9

سنختار أي نقطة P تقع داخل ΔABC ، ونسحب إلى خط المستقيم l الذي يقطع أضلاع المثلث $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}$ في النقاط Z, Y, X على الترتيب. وإذا كانت $\overline{AP}, \overline{BP}, \overline{CP}$ تقطع الدائرة المحيطة بالمثلث ΔABC في النقاط R, S, T على الترتيب (انظر الشكل 16 - 3). أثبت أن $\overline{RX}, \overline{SZ}, \overline{TY}$ تتقاطع في نقطة واحدة. ●



شكل 16 - 3

البرهان

ليكن \overline{RX} يقطع الدائرة المحيطة في النقطة Q ، ولنطبق نظرية باسكال على السداسي $ACRQBT$ حيث $\overline{AR} \cap \overline{AB}$ هو النقطة P ، $\overline{RQ} \cap \overline{CB}$ هو النقطة X ، $\overline{TQ} \cap \overline{AB}$ هو نقطة تقع على المستقيم l والتي يجب أن تكون النقطة Y (لأن $\overline{AB} \cap l$ هو النقطة Y).
والآن لندرس السداسي $ASCRQB$ الذي فيه $\overline{AR} \cap \overline{AB}$ هو النقطة P ، $\overline{RQ} \cap \overline{CB}$ هو النقطة X ، $\overline{SQ} \cap \overline{AC}$ هو نقطة تقع على الخط المستقيم l والتي يجب أن تكون النقطة Z . إذن $\overline{RX}, \overline{SZ}, \overline{TY}$ تتقاطع في نقطة واحدة. ●

نظرية براينشون Brianchon's Theorem

في عام ١٨٠٦ م عندما كان طالباً بمدرسة البوليتكنيك في سن الواحدة والعشرين ، قدم تشارلز جوليان براينشون (١٧٨٥-١٨٦٤) Charles Julian Brianchon مقالاً في مجلة المدرسة *Journal de L'Ecole Polytechnique* ، أصبح بعد ذلك من الإسهامات الأساسية في دراسة القطوع المخروطية في الهندسة الإسقاطية. وقد أدت هذه الإسهامات لإعادة صياغة ما تم نسيانه بعض الشيء من نظرية باسكال وامتدادها. وبعد ذلك نشر براينشون نظريته الجديدة التي تحمل اسم نظرية براينشون *Brianchon's Theorem* والتي تنص على أن " الأقطار الثلاثة لأي سداسي محيط بقطع مخروطي ، تتقاطع في نقطة واحدة " * .

الغريب أن ذلك يحمل تشابهاً مع نظرية باسكال ، ولكن في الحقيقة كل منهما ثنوية للأخرى ويتضح ذلك بسهولة عند مقارنة نصيهما كما يلي

نظرية باسكال

نقاط تقاطع الأضلاع المتقابلة في السداسي
المرسوم داخل قطع مخروطي تقع على
استقامة واحدة .

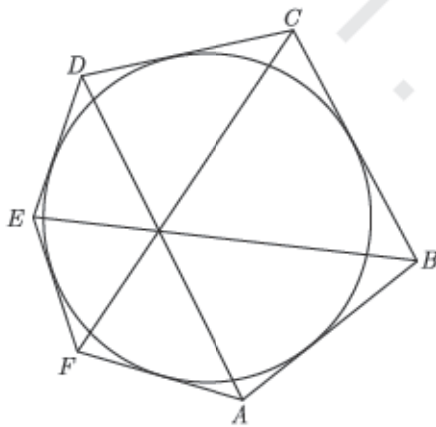
نظرية براينشون

المستقيمت المارة بالرؤوس المتقابلة
لسداسي يحيط بقطع مخروطي تتقاطع
في نقطة واحدة.

نلاحظ أن النصين السابقين هما على حد سواء ما عدا الكلمات التي تحتها خط،
والتي كل منها تعد ثنوية للأخرى، وكما فعلنا في نظرية باسكال سنعمل فقط على
حالة أن القطع المخروطي دائرة.

(نظرية براينشون) إذا أنشأ سداسي يحيط بدائرة فإن المستقيمت
المارة برؤوس السداسي المتقابلة تتقاطع في نقطة واحدة (انظر
الشكل 17 - 3).

نظرية 3-5



شكل 17 - 3

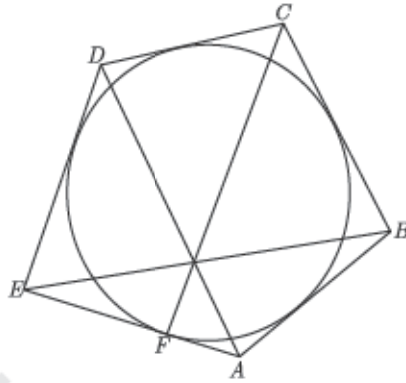
أبسط البراهين لهذه النظرية تتطلب معرفة بعض مفاهيم الهندسة الإسقاطية. وعلى الرغم من أننا عند هذه المرحلة نستطيع تقديم برهان لهذه النظرية باستخدام طرق الهندسة الإقليدية، إلا أن برهاننا سيكون أكثر إيجازاً إذا انتظرنا قليلاً حتى ندرس المحاور الأساسية في هذا الفصل. اقترح براينشون التطبيقات التالية بعد نشر نظريته الجديدة مباشرة.

تطبيق 10

إذا رُسم الخماسي $ABCDE$ محيطاً بدائرة ويمسها في النقاط F, M, N, R, S ، وتقاطع قطراه AD, BE في النقطة P . فأثبت أن النقاط C, P, F تقع على استقامة واحدة (انظر الشكل 18-3).

البرهان

لنعتبر أن الشكل السداسي الذي يحيط بدائرة في الشكل 17-3 فيه الضلعان $\overline{AF}, \overline{EF}$ اندججا معاً في قطعة مستقيمة واحدة. إذن، \overline{AFE} هو الآن ضلع من أضلاع الخماسي الذي يحيط بالدائرة، والنقطة F هي نقطة تماس (انظر الشكل 18-3). وهكذا نستطيع أن نرى الخماسي في الشكل 18-3 والذي تولد من السداسي. والآن، ببساطة يمكننا تطبيق نظرية براينشون على الشكل الجديد للحصول على المطلوب النهائي الذي هو أن $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ تتقاطع في نقطة واحدة هي P ، أو نقول إن النقاط C, P, F تقع على استقامة واحدة.

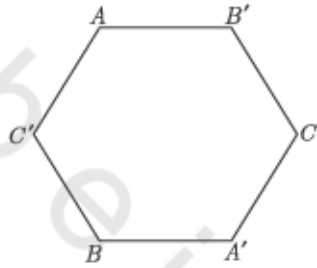


شكل 18 - 3

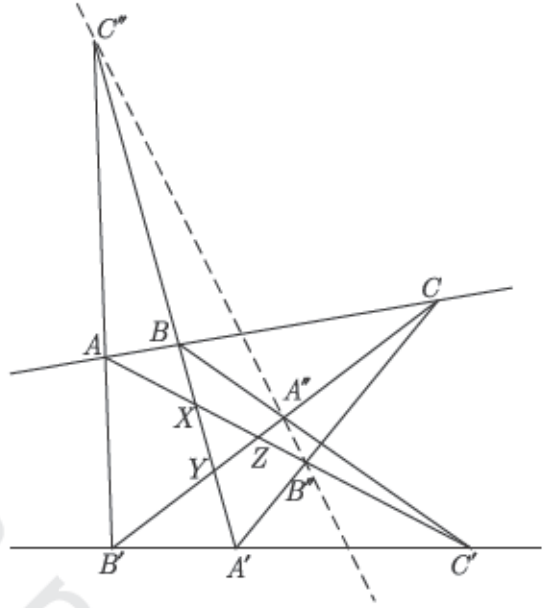
نظرية بابوس Pappus's Theorem

إذا نظرنا لرؤوس السداسي $AB'CA'BC'$ (الشكل 19-3) ووضعناها بالتبادل على خطين مستقيمين (انظر الشكل 20-3). ثم رسمنا الخطوط المستقيمة التي كانت تصل بين رؤوس الشكل الأول على الشكل الثاني، والتي ستتقاطع في ثلاث نقاط (تنتج من تقاطع كل ضلعين متقابلين في الشكل الأول) سنجد أن هذه النقاط تقع على استقامة واحدة. هذا الاستنتاج قدمه بابوس الإسكندري Pappus of Alexandria في مجموعته الرياضية Mathematical Collection في حوالي عام ٣٠٠ بعد الميلاد.

لكي نقدم الدليل على صحة هذه النظرية، دعونا نكررها وسرعان ما نلاحظ أننا سنستخدم في إثباتها نظرية منيلوس عدة مرات.



شكل 19 - 3



شكل 20 - 3

(نظرية بابوس) النقاط A, B, C تقع على خط مستقيم واحد، والنقاط A', B', C' تقع على مستقيم آخر وبأي ترتيب. فإذا تقاطع $\overline{AB'}, \overline{A'B}$ في C'' ، وتقاطع $\overline{AC'}, \overline{A'C}$ في B'' ، وتقاطع $\overline{BC'}, \overline{B'C}$ في A'' . فإن النقاط A'', B'', C'' تقع على استقامة واحدة.

نظرية 3-6

البرهان

على الشكل 3-20، يلتقي $\overline{B'C}, \overline{A'B}$ في النقطة Y ، ويلتقي $\overline{AC'}, \overline{A'B}$ في النقطة X ، ويلتقي $\overline{B'C}, \overline{AC'}$ في النقطة Z ، وتطبيق نظرية منيولوس حيث $\overline{C''AB'}$ قاطع لـ ΔXYZ نحصل على :

$$\frac{ZB'}{YB'} \cdot \frac{XA}{ZA} \cdot \frac{YC''}{XC''} = -1 \quad (\text{I})$$

وباعتبار $\overline{A'B''C'}$ قاطعاً لأضلاع ΔXYZ ، وباستخدام نظرية منيلوس نحصل على

$$\frac{YA'}{XA'} \cdot \frac{XB''}{ZB''} \cdot \frac{ZC}{YC} = -1 \quad (\text{II})$$

وأيضاً باعتبار $\overline{BA''C'}$ قاطعاً لأضلاع المثلث ΔXYZ ، وباستخدام نظرية منيلوس نحصل على :

$$\frac{YB}{XB} \cdot \frac{ZA''}{YA''} \cdot \frac{XC'}{ZC'} = -1 \quad (\text{III})$$

بضرب (I), (II), (III) نحصل على :

$$\frac{YC''}{XC''} \cdot \frac{XB''}{ZB''} \cdot \frac{ZA''}{YA''} \cdot \frac{ZB'}{YB'} \cdot \frac{YA'}{XA'} \cdot \frac{XC'}{ZC'} \cdot \frac{XA}{ZA} \cdot \frac{ZC}{YC} \cdot \frac{YB}{XB} = -1 \quad (\text{IV})$$

ولأن النقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة ، وكذلك النقاط A', B', C' أيضاً تقع على استقامة واحدة ، فإننا نستطيع أن نستنتج بواسطة نظرية منيلوس العلاقتين التاليتين (عندما نعتبر أن كلا المستقيمين قاطعان للمثلث ABC).

$$\frac{ZB'}{YB'} \cdot \frac{YA'}{XA'} \cdot \frac{XC'}{ZC'} = -1 \quad (\text{V})$$

$$\frac{XA}{ZA} \cdot \frac{ZC}{YC} \cdot \frac{YB}{XB} = -1 \quad (\text{VI})$$

بالتعويض من (V), (VI) في (IV) نحصل على :

$$\frac{YC''}{XC''} \cdot \frac{XB''}{ZB''} \cdot \frac{ZA''}{YA''} = -1$$

● ومن نظرية منيلوس نجد أن A'', B'', C'' تقع على استقامة واحدة.

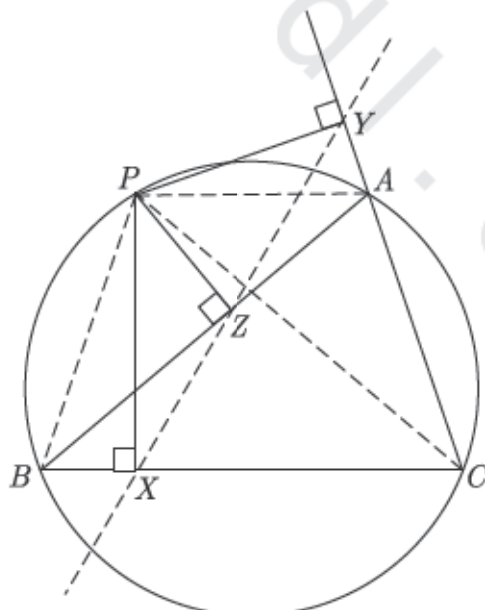
خط سيمسون The Simson Line

في واحدة من أكثر حالات الظلم في تاريخ الرياضيات، نشر وليام والاس (١٧٦٨-١٨٤٣) William Wallace نظرية أصيلة وجديدة في دار نشر Thomas Leybourne's Mathematical Repository في العام (١٧٩٩)، لكن بسبب الإهمال، نسبت إلى الرياضي الإنجليزي المشهور روبرت سيمسون (١٦٨٧-١٧٦٨) Robert Simson الذي قام بترجمة كتاب العناصر لإقليدس Euclid's Elements من اللاتينية إلى الإنجليزية (انظر الصفحات ٩٦-٩٧ لمعرفة المزيد عن سيمسون).

وسوف نستقي معلوماتنا في هذا الكتاب من المرجع المشهور Simsons 's theorm.

(نظرية سيمسون) الأعمدة المرسومة من أي نقطة على دائرة محيطية بمثلث، على أضلاع هذا المثلث، تتقاطع في نقاط تقع على استقامة واحدة .

نظرية 3-7



شكل 21 - 3

في الشكل 21-3، النقطة P تقع على الدائرة المحيطة بـ $\triangle ABC$ ،
 $\overrightarrow{PY} \perp \overrightarrow{AC}$ في النقطة Y ، $\overrightarrow{PZ} \perp \overrightarrow{AB}$ في النقطة Z ، $\overrightarrow{PX} \perp \overrightarrow{BC}$ في النقطة X ،
 X, Y, Z تقع على مستقيم واحد عادة ما يطلق عليه خط سيمسون (أي نظرية والاس)، النقاط X, Y, Z تقع على مستقيم
 مستقيم المساقط (Pedal line).

ليس من الضروري أن يكون برهاننا الأول لنظرية سيمسون هو الأبسط ولكننا
 من أجل الاتساق سوف نستخدم نظرية منيلوس لإثبات هذه النظرية، ثم نقدم طريقة
 ثانية كشرح مستقل لبرهان النظرية.

البرهان I

(انظر الشكل 21-3). لنرسم $\overline{PA}, \overline{PC}, \overline{PB}$. لدينا

$$m\angle PBA = \frac{1}{2} m \widehat{AP}$$

$$m\angle PCA = \frac{1}{2} m \widehat{AP}$$

لذلك: $\angle PBA = \angle PCA = a$.

وعليه فإن

$$\frac{BZ}{PZ} = \cot a = \frac{CY}{PY}$$

في المثلثين PZB, PYC ، ولذا فإن

$$\frac{BZ}{CY} = \frac{PZ}{PY} \quad (I)$$

بالمثل: $m\angle PBA = m\angle PCB = b$ (كلاهما يساوي $\frac{1}{2}m \widehat{PB}$)؛ لذلك

$$\frac{AZ}{PZ} = \cot b = \frac{CX}{PX}$$

في المثلثين PAZ, PCX ، وهذا يقود إلى:

$$\frac{CX}{AZ} = \frac{PX}{PZ} \quad (\text{II})$$

ولأن $\angle PBC, \angle PAC$ زاويتان متقابلتان في شكل رباعي دائري، إذن هما زاويتان متكاملتان.

ولكن $\angle PAY, \angle PAC$ هما أيضاً متكاملتان، إذن $\angle PBC = \angle PAY = c$ ؛

وبالتالي

$$\frac{BX}{PX} = \cot c = \frac{AY}{PY} \quad \text{في المثلثين } PBX, PAY, \text{ وهذا يقود إلى:}$$

$$\frac{AY}{BX} = \frac{PY}{PX} \quad (\text{III})$$

بضرب (I), (II), (III) نحصل على:

$$\frac{BZ}{CY} \cdot \frac{CX}{AZ} \cdot \frac{AY}{BX} = \frac{PZ}{PY} \cdot \frac{PX}{PZ} \cdot \frac{PY}{PX} = 1 \quad (\text{أو } (-1) \text{ حسب دراسة الاتجاه})$$

إذن باستخدام نظرية منيلوس X, Y, Z تقع على استقامة واحدة، وتعين هذه النقاط

الثلث خط سيمسون للمثلث ABC بالنسبة للنقطة P .

البرهان II

(انظر الشكل 21-3). لأن $\angle PYA, \angle PZA$ متقابلتان متكاملتان، إذن

الشكل الرباعي $PZAY$ دائري. نرسم $\overline{PA}, \overline{PC}, \overline{PB}$. إذن:

$$\angle PYZ = \angle PAZ \quad (\text{I})$$

بالمثل $\angle PYC, \angle PXC$ متقابلتان متكاملتان، إذن الشكل الرباعي $PXCY$ دائري.

وعليه نجد:

$$\angle PYX = \angle PCB \quad (\text{II})$$

ولكن الرباعي $PACB$ أيضاً دائري؛ لأنه أربع نقاط على دائرة، إذن:

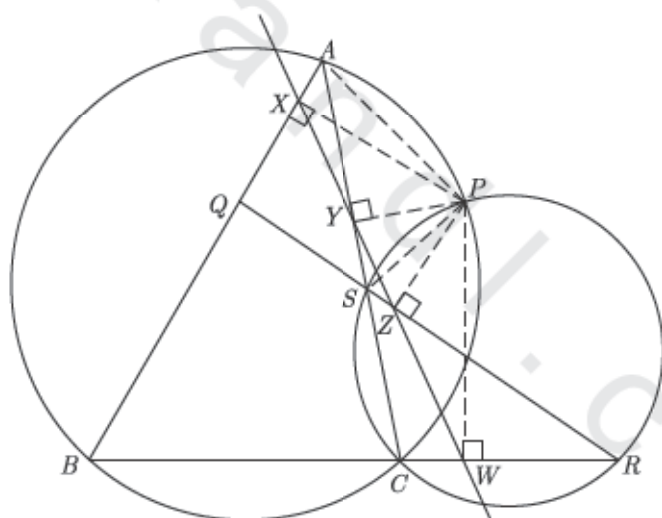
$$m\angle PAZ (m\angle PAB) = m\angle PCB \quad (\text{III})$$

من (I), (II), (III) نحصل على $m\angle PYZ = m\angle PYX$ ، وهذا يعني أن النقاط X, Y, Z تقع على استقامة واحدة. ●

تطبيق 11

ليكن ABC مثلثاً، ولنفرض أن \overline{QSR} يقطع $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ في النقاط Q, R, S على الترتيب. الدائرتان المحيطتان بكل من $\triangle ABC, \triangle SCR$ تتقاطعان في النقطة P . أثبت أن الشكل الرباعي $APSQ$ دائري (انظر الشكل 22-3). ●

البرهان



شكل 22-3

لنرسم الأعمدة $\overline{PX}, \overline{PY}, \overline{PZ}, \overline{PW}$ على $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{QR}, \overline{BC}$ على الترتيب كما في الشكل 22-3. لأن النقطة P تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، إذن النقاط X, Y, W تقع على استقامة واحدة (خط سيمسون). بالمثل ؛ لأن النقطة P تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث SCR ، إذن النقاط Y, Z, W

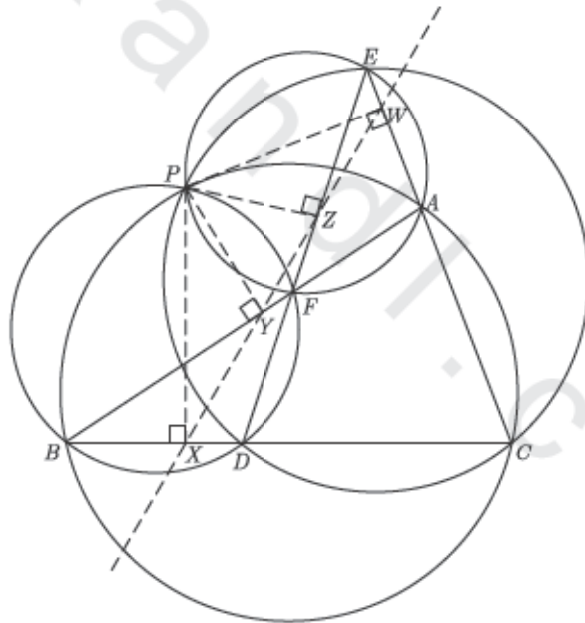
تقع على استقامة واحدة. إذن النقطة P يجب أن تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث AQS (عكس نظرية سيمسون والذي نترك إثباته كتدريب). إذن الشكل الرباعي $APSQ$ دائري (انظر الشكل 22 - 3).

تطبيق 12

القطع المستقيمة $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{EC}, \overline{ED}$ تشكل المثلثات ABC, FBD, EFA, EDC

حسب الشكل 23 - 3. أثبت أن الدوائر المحيطة بهذه المثلثات تشترك في نقطة واحدة.

البرهان



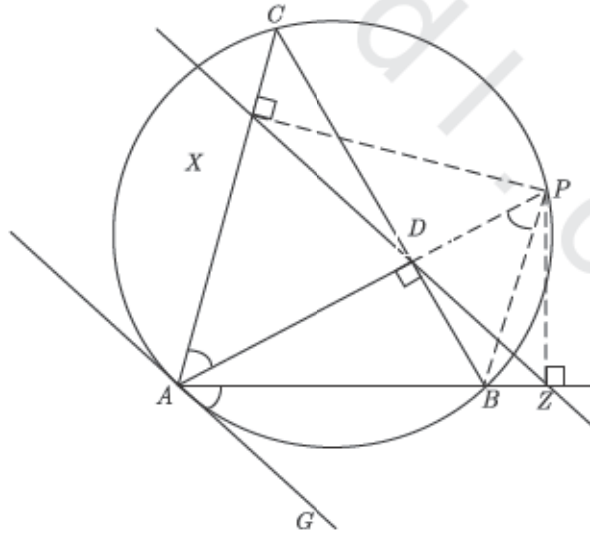
شكل 23 - 3

لنفرض أن P هي إحدى نقطتي تقاطع الدائرتين المحيبتين بالمثلثين ABC, FBD اللتين تتقاطعين أيضاً في B . من النقطة P نرسم الأعمدة PX, PY, PZ, PW على

الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، إذن النقاط X, Y, W تقع على استقامة واحدة؛ إذن النقاط X, Y, Z, W تقع على استقامة واحدة لأن النقاط Y, Z, W تقع على استقامة واحدة. إذن النقطة P يجب أن تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث EFA (عكس نظرية سيمسون والذي نترك إثباته كتدريب). ولنفس السبب، لأن النقاط X, Z, W تقع على استقامة واحدة، إذن النقطة P يجب أن تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث EDC . إذن الدوائر الأربع تمر بالنقطة P .

لخط سيمسون العديد من الخصائص، نقدم الآن القليل منها.

نظرية 3-8 (الخاصية الأولى لخط سيمسون) إذا كان العمود AD في ΔABC يلاقي الدائرة المحيطة به في النقطة P ، فإن خط سيمسون لنقطة P بالنسبة للمثلث ABC يوازي المستقيم المماس للدائرة عن النقطة A .



شكل 24 - 3

البرهان

لأن $\overline{PX}, \overline{PZ}$ عمودان على $\overline{AC}, \overline{AB}$ على الترتيب في المثلث ABC ،
فالنقاط X, D, Z تعين خط سيمسون للنقطة P بالنسبة للمثلث ABC . نرسم \overline{PB}
(انظر الشكل (24 - 3)). في الشكل الرباعي $PDBZ$ ، $m\angle PDB = m\angle PZB = 90^\circ$ ،
وهذا يعني أن الشكل $PDBZ$ رباعي دائري (زاويتان متقابلتان متكاملتان)، ومن ذلك
نستنتج أن :

$$m\angle DZB = m\angle DPB \quad (I)$$

وفي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC :

$$\boxed{m\angle GAB = \frac{1}{2}(m\widehat{AB})}, \boxed{m\angle DPB(m\angle APB) = \frac{1}{2}(m\widehat{AB})}$$

إذن :

$$m\angle GAB = m\angle DBP \quad (II)$$

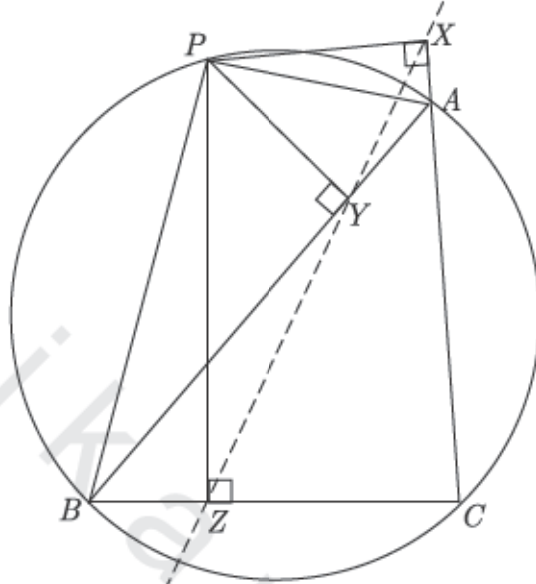
من (I), (II) لدينا $m\angle DZB = m\angle GAB$ ، وهذا يعني أن خط سيمسون

• \overline{XDZ} يوازي \overline{GA} .

(الخاصية الثانية لخط سيمسون) من النقطة P التي تقع على الدائرة
المحيطة بالمثلث ABC ، ارسم الأعمدة $\overline{PX}, \overline{PY}, \overline{PZ}$ على الأضلاع
 $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}$ على الترتيب. إن $(PA)(PZ) = (PB)(PX)$. (انظر

نظرية 3-9

الشكل (25 - 3)



شكل 25 - 3

البرهان

لأن $m\angle PYB = m\angle PZB = 90^\circ$ إذن الشكل $PYZB$ رباعي دائري؛

ومن ذلك

$$m\angle PBY = m\angle PZY \quad (I)$$

وبطريقة مماثلة:

$$m\angle PXY = m\angle PAY \quad (II)$$

لأن $m\angle PXA = m\angle PYA = 90^\circ$ ؛ إذن الشكل $PXAY$ رباعي دائري، ومن

ذلك ولكن النقاط X, Y, Z على استقامة واحدة (خط سيمسون) إذن من

$$(I), (II)$$

* الشكل الرباعي يكون دائرياً (أي رؤوسه الأربعة على دائرة) إذا كان فيه زاويتان متطابقتان مرسومتان على أحد أضلاعه ورأساهما في جهة واحدة منه.

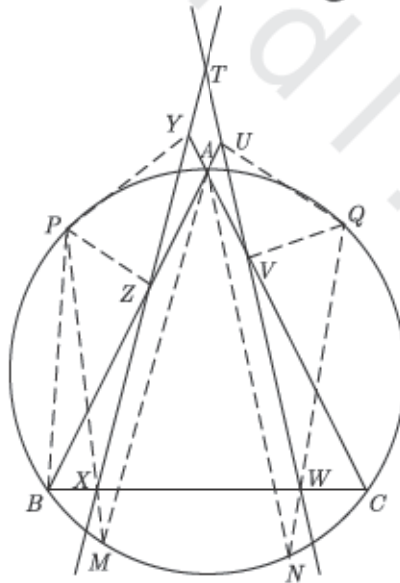
$$\Delta PAB \sim \Delta PXZ \Rightarrow \frac{PA}{PX} = \frac{PB}{PZ} \Rightarrow (PA)(PZ) = (PB)(PX) \bullet$$

(الخاصية الثالثة لخط سيمسون) قياس الزاوية المحصورة بين خطي سيمسون لنقطتين تقعان على دائرة محيطه بمثلث تساوي نصف قياس القوس المحصور بين هاتين النقطتين .

نظرية 3-10

البرهان

في الشكل (3-26) ، \overline{XYZ} هو خط سيمسون للنقطة P ، \overline{UVW} هو خط سيمسون للنقطة Q ، $\overline{PX}, \overline{QW}$ ليقطعا الدائرة في M, N على الترتيب ، ثم نرسم $\overline{AM}, \overline{AN}$ ، ولأن $m\angle PZB = m\angle PXB = 90^\circ$ ، فإن الشكل $PZXB$ رباعي دائري ، ومن هذا نستنتج أن



شكل 3-26

$$m\angle ZXP = m\angle ZBP \quad (\text{I})$$

$$m\angle ABP = m\angle AMP \quad \text{or} \quad m\angle ZBP = m\angle AMP \quad (\text{II})$$

إذن، من (I)، (II)؛ وعليه فإن:

$$\overrightarrow{XYZ} \parallel \overrightarrow{AM}$$

وبنفس الطريقة نستطيع إثبات أن $\overrightarrow{UVW} \parallel \overrightarrow{AN}$.

وبالتالي؛ إذا كانت النقطة T هي نقطة تقاطع خطي سيمسون، فإن $m\angle XTW = m\angle MAN$ وذلك لأن ضلعيهما المتناظرين متوازيان. والآن $m\angle MAN = \frac{1}{2}(m\widehat{MN})$ ولكن لأن $\overline{PM} \parallel \overline{QN}$ ، فإن $m\widehat{PQ} = m\widehat{MN}$

وبالتالي $m\angle MAN = \frac{1}{2}(m\widehat{MN})$ ، إذن، $m\angle XTW = \frac{1}{2}(m\widehat{PQ})$

يوجد هنا تطبيق شيق لنظرية سيمسون، حيث قابلتنا مشكلة سابقة عندما أثبتنا في الفصل الأول المغالطة التي تزعم أن كل المثلثات المختلفة الأضلاع هي مثلثات متطابقة الضلعين. وقد رسمنا أعمدة من النقطة G إلى $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$ لتلاقي المستقيمات في النقاط D, F, E على الترتيب. ولأن النقطة G على الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، فإن نظرية سيمسون تثبت لنا أن النقاط D, F, E تقع على استقامة واحدة.

المسلمة المشهورة لموريتز باش (1843-1930) Moritz Pasch التي تنص على أن الخط المستقيم الذي يقطع ضلعاً واحداً من أضلاع مثلث (من الداخل) لا بد أن يقطع أيضاً واحداً فقط من ضلعي المثلث الآخرين (من الداخل)، إلا إذا مر هذا المستقيم بأحد رؤوس المثلث.

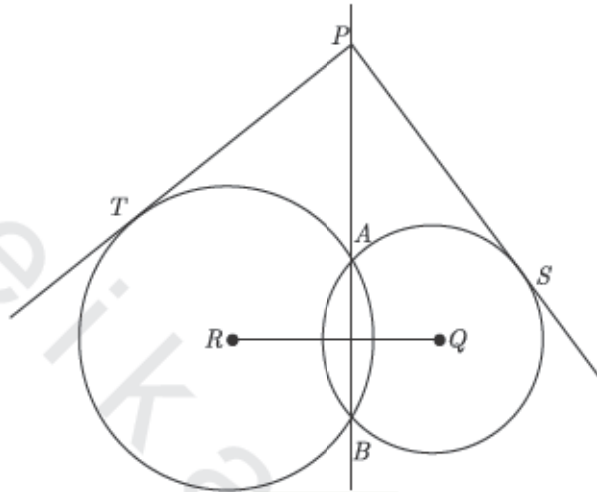
وكان إقليدس قد افترض هذه الفكرة تقريباً في مسلماته، ومع ذلك؛ فإن توظيف هذه المسلمة يجعلنا نجزم بأنه حينما نسقط عمودين من نقطة تلاقي منتصف

زاوية في المثلث مع العمود المنصف للضلع المقابل لتلك الزاوية على ضلعي الزاوية، فإن واحداً منهما بالضبط يقطع أحد الضلعين من الداخل والآخر يقطع امتداد الضلع الآخر، وهذا ما يمكننا من تجنب المغالطة التي عرضناها سابقاً.

المحاور الأساسية Radical Axes

عرضنا سابقاً في هذا الفصل نظرية براينشون Brianchon,s Theorem كنظرية مقابلة لنظرية باسكال Pascal,s Theorem، وكنا قد قمنا بتأجيل برهان هذه النظرية لأننا كنا نحتاج مزيداً من المعرفة حول المحاور الأساسية Radical Axes. وسوف نعرض الآن بعض خواص المحور الأساسي المهمة والتي سنستخدمها في إثبات نظرية براينشون.

لندرس معاً الدائرتين R, Q (انظر الشكل 27-3) واللتين تتقاطعان في A, B ، فإذا كانت النقطة P هي أي نقطة تقع على \overline{AB} بحيث لا تقع بين A, B ، ورسمنا المماسين $\overline{PT}, \overline{PS}$ للدائرتين R, Q على الترتيب، فمن خلال دراستنا لمبادئ الهندسة نعلم أن PT وسط متناسب بين PB, PA ، أي $(PT)^2 = (PB)(PA)$ ، وبالمثل بالنسبة للدائرة Q ، لدينا $(PS)^2 = (PB)(PA)$. إذن، $PT = PS$. ولأننا اخترنا النقطة P في أي موقع على \overline{AB} (بحيث لا تقع بين A, B)، فإننا نستطيع أن نقول إن القطعتين المماسيتين للدائرتين R, Q متطابقتان. ولكن قبل أن نقرر أن هذا الاستنتاج موضع نظرية، علينا أن نثبت أن النقطة P والتي يخرج منها مماسان لدائرتين يجب أن تقع على \overline{AB} . والإثبات كالتالي:



شكل 27 - 3

لنفرض أن النقطة P أي نقطة حيث المماسان PT, PS متطابقان، وليكن \overline{PA} يقطع الدائرة R في B ويقطع الدائرة Q في B' ، وكما سبق نستطيع كتابة العلاقاتين

$$(PT)^2 = (PB)(PA)$$

$$(PS)^2 = (PB')(PA)$$

ولأن: $PT = PS$ ، إذن $PB = PB'$ ، وهذا معناه انطباق النقطتين B, B' ، وأن النقطة P تقع على القاطع المشترك للدائرتين \overline{AB} . نطلق على الخط المستقيم الذي يحتوي النهايات المشتركة لكل المماسات المتطابقة لدائرتين، المحور الأساسي Radical Axis لتلك الدائرتين، ويمكننا أن نصوغ الآن هذه النتيجة.

نظرية 3-11 المحور الأساسي لدائرتين متقاطعتين هو قاطع مشترك لهما.

ويترتب على ذلك مباشرة أن المحور الأساسي لدائرتين متماستين هو المماس المشترك لهما، وقبل أن نتدارس وضع المحور الأساسي لدائرتين غير متقاطعتين (متباعديتين) نحتاج لدراسة النظرية التالية .

نظرية 3-12 المحل الهندسي لنقطة الفرق بين مربعي البعد بينها وبين نقطتين ثابتين يكون ثابتاً

هو مستقيم عمودي على القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين الثابتتين.

البرهان

لتكن R, Q نقطتين ثابتتين ، P نقطة على المحل الهندسي (انظر الشكل 28 - 3). لنرسم $\overline{PR}, \overline{PQ}$ ، وننشئ $\overline{PN} \perp \overline{RQ}$ ، وباستخدام نظرية فيثاغورس نحصل على

$$(PR)^2 - (RN)^2 = (PN)^2 , (PQ)^2 - (QN)^2 = (PN)^2$$

إذن ،

$$\text{أو } (PR)^2 - (RN)^2 = (PQ)^2 - (QN)^2$$

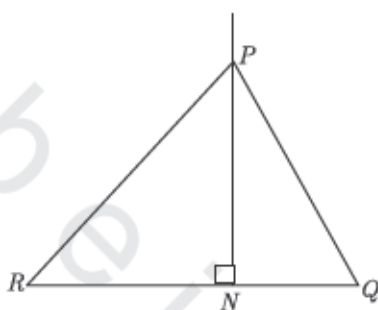
$$(PR)^2 - (PQ)^2 = (RN)^2 - (QN)^2 = k$$

نفرض أن $RQ = d$ ، وتحليل المتطابقة الأخيرة نحصل على :

$$(RN + QN)(RN - QN) = k$$

أو $d(RN - QN) = k$ ، ومنه نجد أن :

$$RN - QN = \frac{k}{d} \quad (I)$$



شكل 3 - 28

تذكر أن

$$RN + QN = d \quad (II)$$

بحل المعادلتين (I), (II) نحصل على :

$$RN = \frac{d^2 + k}{2d}, \quad QN = \frac{d^2 - k}{2d}$$

وهذا يحدد موضع النقطة N ، ولأن k, d ثابتان في جميع الحالات ، فالنقطة P يجب أن تقع على المستقيم العمودي على \overline{RQ} عند النقطة N ، والتي تقسم \overline{QR} حسب النسبة :

$$\frac{RN}{QN} = \frac{d^2 + k}{d^2 - k}$$

نستطيع استنتاج برهان أن هذا هو المحل الهندسي بتوضيح أن أي نقطة تقع على \overline{PN}

تحقق الشرط المعطى ، وستترك ذلك للقارئ . ●

نظرية 12 - 3 تساعدنا على استكمال دراسة المحاور الأساسية Radical Axes ،
والآن علينا أن نعين المحور الأساسي لدائرتين غير متقاطعتين ، وحدسنا يشير إلى تحقيق
ذلك في النظرية التالية .

المحور الأساسي لدائرتين غير متقاطعتين ، هو خط مستقيم
عمودي على خط مركزيهما.

نظرية 3 - 13

البرهان

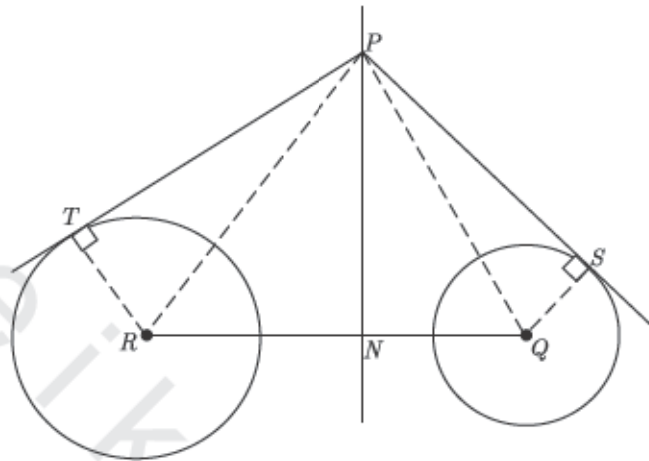
سنبدأ بفرض أن نصفي قطري الدائرتين R, Q هما r, q على الترتيب. وكذلك
نفرض أن النقطة P على المحل الهندسي المطلوب ، وحيث إن القطعتين المماسيتين
 $\overline{PT}, \overline{PS}$ متطابقتان (انظر الشكل 29 - 3). فبتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلثين
 PTR, PSQ نحصل على :

$$(PR)^2 - r^2 = (PT)^2 \quad , \quad (PQ)^2 - q^2 = (PS)^2$$

ولكن $PT = PS$ ؛ إذن :

$$(PR)^2 - r^2 = (PQ)^2 - q^2 \quad or \quad (PR)^2 - (PQ)^2 = r^2 - q^2$$

لأن الطرف الأيمن من المتطابقة ثابت ، فإننا نستنتج (باستخدام نظرية 12 - 3) أن
المحل الهندسي للنقطة P هو الخط المستقيم الذي يحتوي نفس النقطة P والذي هو
عمودي على \overline{RQ} . ●



شكل 29 - 3

بطريقة مماثلة لتلك المستخدمة في البرهان السابق يمكننا تعيين موضع النقطة N بدلالة نصفي القطرين والمسافة بين مركزي الدائرتين. وكتيجة مباشرة لنظرية 13 - 3 ، لدينا النظرية التالية.

المحاور الأساسية لثلاث دوائر مراكزها ليست على استقامة واحدة تلتقي في نقطة واحدة.

نظرية 3-14

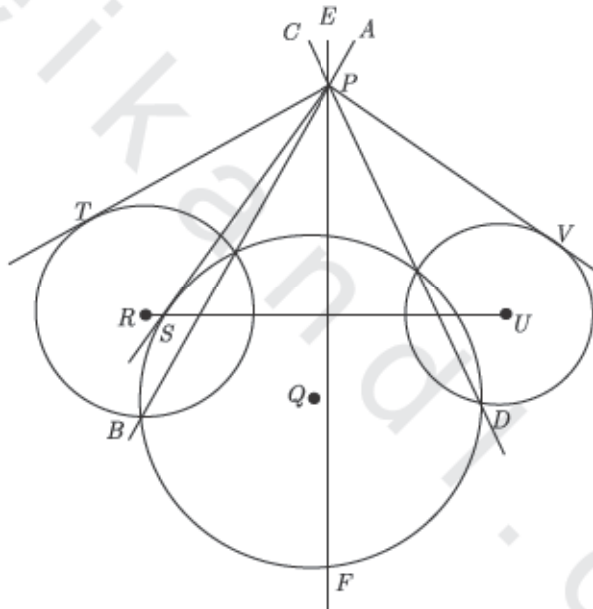
البرهان

دعنا نعتبر أن الدوائر الثلاث هي R, Q, U ، وأن محاورها الأساسية هي $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$ (انظر الشكل 30 - 3). نفرض أن P نقطة تقاطع $\overline{AB}, \overline{CD}$. باستخدام المحور الأساسي \overline{AB} للدائرتين R, Q نحصل على $\overline{PT} = \overline{PS}$. وباستخدام المحور الأساسي \overline{CD} للدائرتين Q, U نحصل على $\overline{PV} = \overline{PS}$ (لاحظ أن $\overline{PT}, \overline{PS}, \overline{PV}$ مماسات للدوائر المعطاة)، إذن $\overline{PT} = \overline{PV}$ ، وهذا يدل على أن

النقطة P يجب أن تقع على المحور الأساسي \overline{EF} للدائرتين R, U ، وهذا يثبت أن المحاور الأساسية تتقاطع في نقطة واحدة P .

على $\overline{PV} = \overline{PS}$ (لاحظ أن $\overline{PT}, \overline{PS}, \overline{PV}$ مماسات للدوائر المعطاة)، إذن $\overline{PT} = \overline{PV}$ ، وهذا يدل على أن النقطة P يجب أن تقع على المحور الأساسي \overline{EF}

للدائرتين R, U ، وهذا يثبت أن المحاور الأساسية تتقاطع في نقطة واحدة P .



شكل 30 - 3

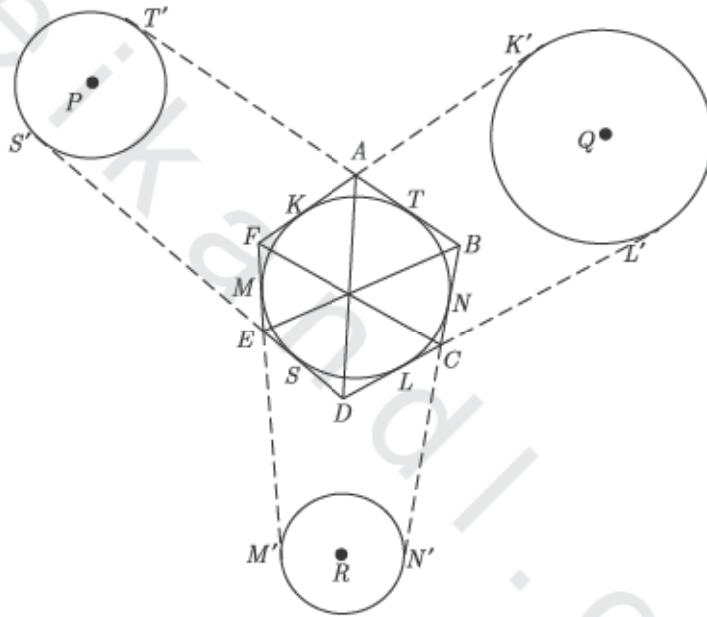
بعد أن عرضنا موضوع المحور الأساسي، نحن جاهزون الآن لبرهنة نظرية براينشون Brianchon's Theorem، والتي كنا قد ناقشناها في وقت سابق في هذا الفصل. وقد قدم هذا البرهان سموجرفيسكي Smogorzhevski في كتابه "المسطرة في الإنشاءات الهندسية"

"The Ruler in Geometrical Constructions, New York: Blaisdell Publishing Company, 1961, pp.33-35"

(نظرية براينشون) إذا أنشئ سداسي يحيط بدائرة، فإن المستقيمات المارة برؤوس السداسي المتقابلة تتقاطع في نقطة واحدة.

نظرية
15-3

البرهان



شكل 31 - 3

كما يبدو في الشكل 31 - 3 ، أضلاع الشكل السداسي $ABCDEF$ تماس الدائرة في النقاط T, N, L, S, M, K ، أما النقاط K', L', N', M', S', T' فقد تم اختيارها على $\overline{FA}, \overline{DC}, \overline{BC}$ على الترتيب ، بحيث :
 $KK' = LL' = NN' = MM' = SS' = TT'$

لننشئ الآن الدائرة P التي تماس كلاً من \overline{BA} , \overline{DE} في النقاط T', S' على الترتيب (بسهولة يمكن تبرير وجود هذه الدائرة). بالمثل ننشئ الدائرة Q التي تماس كلاً من \overline{FA} , \overline{DC} في النقاط K', L' على الترتيب، وأخيراً ننشئ الدائرة R التي تماس كلاً من \overline{FE} , \overline{BC} في النقاط M', N' على الترتيب أيضاً.

لأن القطعتين المماسيتين المرسومتين من نقطة خارج دائرة لهما نفس الطول، إذن $FM = FK$ ، ولكننا بالفرض نعلم أن $MM' = KK'$ ، إذن بالجمع نحصل على:

$$FM' = FK'$$

وبالمثل:

$$CL = CN, LL' = NN'$$

بالطرح نجد أن:

$$CL' = CN'$$

الآن، وبقليل من الملاحظة، نرى أن النقطتين F, C كل منهما نقطتا النهاية للقطعتين المماسيتين المتطابقتين للدائرتين R, Q . إذن، هاتان النقطتان تحددان المحور الأساسي \overline{CF} للدائرتين R, Q .

وباستخدام نفس الأسلوب، سنجد بسهولة أن \overline{AD} هو المحور الأساسي للدائرتين P, Q ، و \overline{BE} هو المحور الأساسي للدائرتين P, R .

قد أثبتنا سابقاً (نظرية 14 - 3) أن المحاور الأساسية لثلاث دوائر مراكزها ليست على استقامة واحدة (مثنى مثنى) تتقاطع في نقطة واحدة، ولهذا $\overline{CF}, \overline{AD}, \overline{BE}$ تتقاطع في نقطة واحدة.

لاحظ أن الطريقة الوحيدة التي تجعل مراكز الدوائر الثلاث على استقامة واحدة هي أن تنطبق الأقطار وهذا مستحيل.

تدريبات

1. الأضلاع $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ تمثل أضلاع الشكل الرباعي $ABCD$ والذي يقطعها خط مستقيم في النقاط K, L, M, N على الترتيب. أثبت أن

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{AK}{KB} \cdot \frac{DN}{NA} \cdot \frac{CM}{MD} = 1$$

2. في المربع $ABCD$ مددنا الضلع \overline{AB} إلى النقطة P بحيث $BP = 2(AB)$ ، إذا كانت النقطة M منتصف \overline{BC} ، و $\overline{BM}, \overline{AC}$ يتقاطعان في Q ، وكذلك $\overline{PQ}, \overline{BC}$ يتقاطعان في R . استخدم نظرية منيلوس لتحصل على قيمة النسبة $\frac{CR}{RB}$.

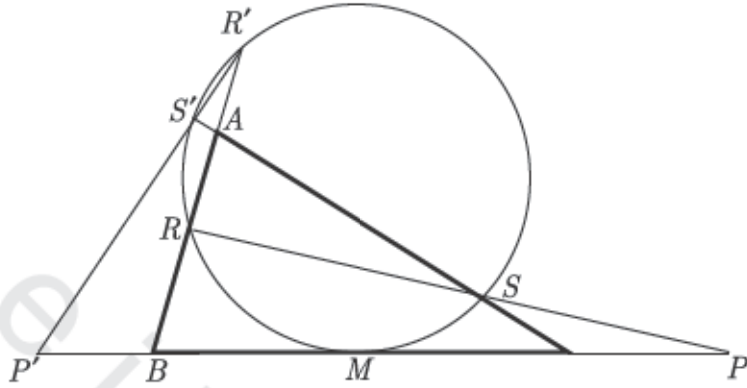
3. في المثلث ABC ، النقطتان P, R تقعان على $\overline{AB}, \overline{AC}$ على الترتيب بحيث $\overline{AP} \cong \overline{AR}$. أثبت أن المتوسط \overline{AM} يقسم \overline{PR} إلى قطعتين مستقيمتين متناسبتين مع $\overline{AB}, \overline{AC}$.

4. أثبت أن مماسات الدائرة المحيطة بالمثلث ABC عند رؤوسه تقطع الضلع المقابل في المثلث في ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

5. أثبت أنه إذا كان الخط المستقيم المار بنقطة تقاطع المتوسطات G في المثلث ABC ويقطع كلاً من $\overline{AB}, \overline{AC}$ في النقطتين M, N على الترتيب فإن

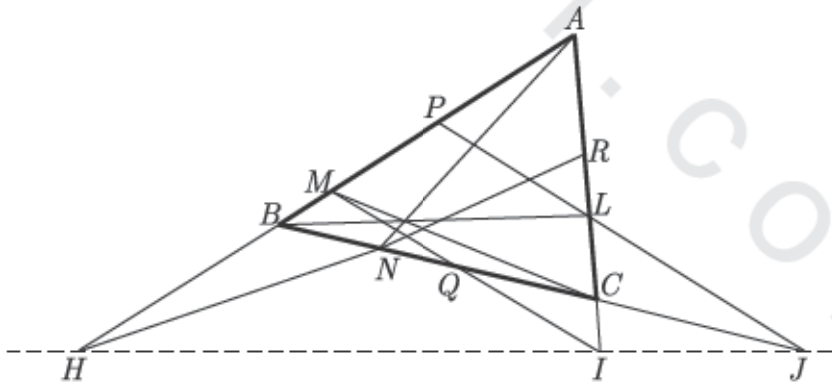
$$(\overline{AM})(\overline{NC}) + (\overline{AN})(\overline{MB}) = (\overline{AM})(\overline{AN})$$

6. الدائرة التي تمس الضلع \overline{BC} عند نقطة منتصفه M في المثلث ABC ، تقطع أيضاً $\overline{AB}, \overline{AC}$ في S, S', R, R' على الترتيب. إذا مددنا $\overline{RS}, \overline{R'S'}$ ليقطعا \overline{BC} في P, P' على الترتيب (انظر الشكل 32 - 3). فأثبت أن $(\overline{BP})(\overline{BP'}) = (\overline{CP})(\overline{CP'})$.



شكل 3 - 32

7. في المثلث ABC ، النقاط P, Q, R هي منتصفات الأضلاع AB, BC, AC على الترتيب ، $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{CM}$ تتقاطع في نقطة واحدة وتقطع الأضلاع المقابلة في N, L, M على الترتيب. إذا كان \overrightarrow{PL} يقطع BC في النقطة J ، \overrightarrow{MQ} يقطع AC في النقطة I ، \overrightarrow{RN} يقطع AB في النقطة H ، فأثبت أن النقاط H, I, J تقع على استقامة واحدة (انظر الشكل 3 - 33) .



شكل 3 - 33

8. إذا التقى المماسان المشتركان الخارجيان للدائرتين O, Q في النقطة M ، والتقوى المماسان المشتركان الخارجيان للدائرتين O, S في النقطة N ، والتقوى المماسان

المشتركان الخارجيان للدائرتين Q, S في النقطة L ، فأثبت أن M, N, L تقع على استقامة واحدة إذا علمت أن الدوائر الثلاث لا يوجد منها اثنتان متطابقتان ولا يوجد منها اثنتان لهما المركز نفسه.

9. أثبت أن نقاط تقاطع المنصفات العمودية للمنصفات الداخلية لزوايا أي مثلث مع أضلاع المثلث المقابلة لتلك الزوايا تقع على استقامة واحدة.

10. مستخدماً نظرية منيلوس ، قدم برهاناً للتطبيق رقم ٦.

11. وضح كيف تستخدم نظرية براينشون في إثبات وجود نقطة جيرجون في المثلث ؟

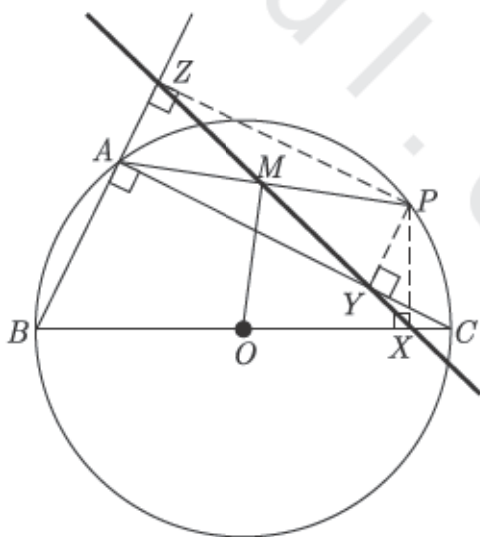
12. قارن بين نظريتي بابوس ، وباسكال.

13. اكتب ثم برهن عكس نظرية ديزارغ.

14. اكتب ثم برهن عكس نظرية سيمسون.

15. على الشكل 34 - 3 ، $\triangle ABC$ قائم في A ومرسوم داخل دائرة O . خط

سيمسون للنقطة P بالنسبة للمثلث ABC يلاقي PA في النقطة M . أثبت أن MO عمودي على PA عند النقطة M .



شكل 34 - 3

16. من النقطة P على محيط الدائرة O ، رسمنا ثلاثة أوتار لاقطت الدائرة في النقاط A, B, C . أثبت أن الدوائر الثلاث التي أقطارها $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$ تتقاطع في ثلاث نقاط تقع على مستقيم واحد.
17. إذا أنشأنا مثلثين داخل دائرة واحدة ، ومن نقطة واحدة على الدائرة رسمنا خطي سيمسون لكل من المثلثين. أثبت أن الزاوية المحصورة بين خطي سيمسون هي مقدار ثابت وذلك بغض النظر عن وضع هذه النقطة.
18. أثبت أن القطع المماسية لدائرتين (إذا وجدت) ، فإن المحور الأساسي لهاتين الدائرتين ينصفها.
19. أثبت أن المحور الأساسي لدائرتين قطراهما هما قطرا شبه منحرف ، يمر بنقطة تقاطع ضلعي شبه المنحرف غير المتوازيين .
20. أثبت أن النقاط الأربع الناتجة من تقاطع مستقيمين قاطعين لدائرتين واللذين هما مرسومان من نقطة تقع على المحور الأساسي لهاتين الدائرتين ، تقع على دائرة ثالثة (أي تشكل رؤوس رباعي دائري).