الفصل الأول

مراجعة أساسيات الهندسة الإقليدية

لنسترجع بعض أساسيات ومفاهيم الهندسة الإقليدية

يحتوي مقرر الهندسة الإقليدية للمرحلة الثانوية على الكثير من النظريات التي ليس من السهولة تذكرها، لذلك كان علينا أن نلقي نظرة وجيزة على هذه النظريات – مع العلم أنه إذا كانت هذه النظريات تقابلك للمرة الأولى ، فإن ذلك سيكون أكثر صعوبة – وقد قسمنا هذه النظريات وفقاً للموضوعات التي ليس من الضروري أن تكون ضمن سلسلة الموضوعات المقدمة أصلاً، ولكننا نقدمها نظراً لأهميتها في شكل واضح ووجيز.

I– الأشكال الرباعية ***Quadrilaterals***

A : طرق إثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع

لإثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع عليك أن تسلك إحدى هذه الطرق :

1. إثبات أن كل ضلعين متقابلين متوازيان .
2. إثبات أن كل ضلعين متقابلين متطابقان .

3. إثبات أن ضلعين متقابلين متطابقان ومتوازيان .

4. إثبات أن كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .

5. إثبات أن زاويتين متقابلتين متطابقتان وضلعين متقابلين متوازيان.

6. إثبات أن القطرين ينصف كل منهما الآخر .

B : طرق إثبات أن الشكل الرباعي مستطيل

لإثبات أن الشكل الرباعي مستطيل ، عليك أن تسلك إحدى هذه الطرق :

1. إثبات أن كل زاوية من زواياه الأربع قائمة .

2. إثبات أن الشكل متوازي أضلاع ، وأنه يحوي زاوية واحدة قائمة .

3. إثبات أن الشكل متوازي أضلاع ، وأن قطريه متطابقان .

C : طرق إثبات أن الشكل الرباعي معين

لتثبت أن الشكل الرباعي معين ، عليك أن تسلك إحدى هذه الطرق :

1. إثبات أن أضلاعه الأربعة متطابقة .

2. إثبات أن الشكل متوازي أضلاع به ضلعان متتاليان متطابقان .

3. إثبات أن الشكل متوازي أضلاع وأن قطريه ينصفان زوايا رؤوسه .

4. إثبات أن الشكل متوازي أضلاع وأن قطريه متعامدان .

D : طرق إثبات أن الشكل الرباعي مربع

لتثبت أن الشكل الرباعي مربع ، عليك أن تسلك إحدى هذه الطرق :

1. إثبات أن الشكل مستطيل به ضلعان متتاليان متطابقان .

2. إثبات أن الشكل مستطيل وأن قطريه ينصفان زوايا رؤوسه .

3. إثبات أن الشكل مستطيل وأن قطريه متعامدان .

4. إثبات أن الشكل معين يحوي زاوية واحدة قائمة.

5. إثبات أن الشكل معين وأن قطريه متطابقان .

E : طرق إثبات أن شبه المنحرف متطابق الساقين .

ولتثبت أن شبه المنحرف متطابق الساقين ، عليك أن تسلك إحدى هذه الطرق :

1. إثبات أن الضلعين غير المتوازيين متطابقان.
2. إثبات أن زاويتي القاعدة متطابقتان .
3. إثبات أن كل زاويتين متقابلتين متكاملتان .
4. إثبات أن قطري شبه المنحرف متطابقان .

ملاحظة : نستطيع تعريف شبه المنحرف على أنه شكل رباعي له بالضبط ضلعان متقابلان متوازيان.

$II-$ خط منصف للمثلث *Midline of a Triangle*

A. القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث هو خط منصف للمثلث.

B. كل خط منصف للمثلث مار بضلعين يوازي الضلع الثالث.

C. طول أي خط منصف للمثلث مار بضلعين يساوي نصف طول الضلع الثالث.

D. الخط المرسوم من منتصف أحد أضلاع مثلث موازياً ضلعاً آخر ينصف الضلع الثالث للمثلث.

$III-$ التشابه *Similarity*

A : إذا كان لدينا خط يوازي أحد أضلاع مثلث

1. إذا كان هناك مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين ، فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة .

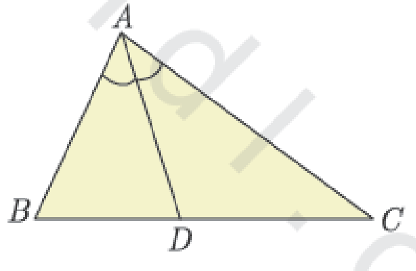
2. إذا قطع مستقيم ضلعي مثلث وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة ، فإن هذا القاطع يوازي الضلع الثالث في المثلث .

B : تناسب يتضمن منصف الزاوية

1. منصف الزاوية الداخلية لأي مثلث يقسم الضلع المقابل لهذه الزاوية إلى جزأين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي ضلعي الزاوية .

على (الشكل $1-1$) $\overline{AD}$ ينصف الزاوية A في ΔABC.

$$\frac{CD}{DB}=\frac{CA}{AB}$$

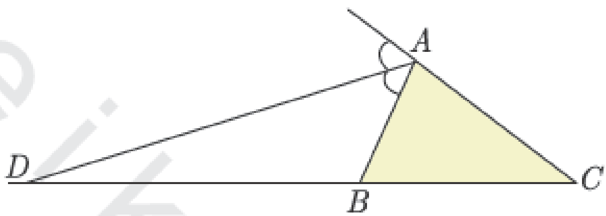


شكل $1-1$

2. عندما يلاقي منصف الزاوية الخارجية امتداد الضلع المقابل لتلك الزاوية في نقطة، فإن بعد تلك النقطة عن كل من الرأسين الآخرين

للمثلث تتناسبان مع طولي ضلعي الزاوية. في الشكل ($2-1$)، $\overline{AD}$ ينصف الزاوية A من الخارج في ΔABC.

$$\frac{CD}{DB}=\frac{CA}{AB}$$



شكل $2-1$

C : طرق إثبات أن المثلثين متشابهان

1. إذا شابه مثلثان مثلثاً ثالثاً، فإن المثلثات الثلاثة تتشابه .
2. يتشابه المثلثان إذا طابقت زاويتان من أحدهما نظيرتيهما من المثلث الآخر.
3. يتشابه المثلثان إذا تناسب طولا ضلعين من أحدهما نظيريهما من المثلث الآخر، وتطابقت الزاويتان المحصورتان بين هذين الضلعين في كل من المثلثين .
4. يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة.

D : المتوسط المتناسب في المثلث القائم

1. الارتفاع على الوتر من الزاوية القائمة في المثلث القائم الزاوية والذي يقسم الوتر إلى جزأين يجعل طول أحد ضلعي القائمة متوسطاً متناسباً بين طول الوتر وطول الجزء المجاور من الوتر لضلع القائمة المذكور.

2. الارتفاع على الوتر في المثلث القائم الزاوية يكون متوسطاً متناسباً بين طولي قطعتي الوتر المستقيمتين الناتجتين من تقاطع الارتفاع والوتر .

IV – نظرية فيثاغورس ***Pythagorean Theorem***

A : مجموع مربعي طولي ضلعي القائمة في مثلث قائم يساوي مربع طول الوتر.

B : (عكس نظرية فيثاغورس) إذا كان مجموع مربعي طولي ضلعين في مثلث يساوي مربع طول الضلع الثالث ، فإن الزاوية المقابلة لهذا الضلع تكون قائمة.

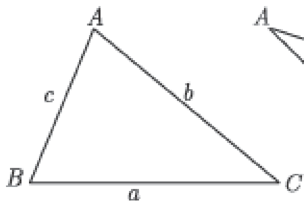
C : في المثلث المتطابق الضلعين والقائم الزاوية.

1. طول الوتر يساوي $\sqrt{2}$ طول ضلع القائمة.
2. طول ضلع القائمة يساوي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ طول الوتر.

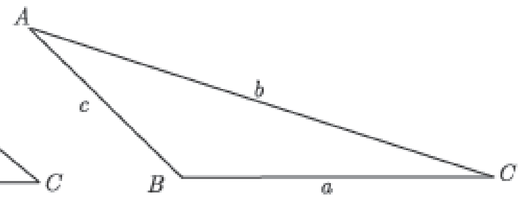
D : في المثلث الثلاثيني الستيني (قياسات زواياه $90° - 60° - 30°$) .

1. طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها $30°$ يساوي نصف طول الوتر.
2. طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها $60°$ يساوي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول الوتر .
3. طول الوتر يساوي $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها $60°$.
4. طول ضلع القائمة الأكبر يساوي $\sqrt{3}$ طول ضلع القائمة الأصغر

E : متباينات فيثاغورس



شكل $3-1$



شكل $4-1$

1. في أي مثلث حاد الزوايا (شكل $3-1$) مربع طول أي ضلع في المثلث أقل من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين .

$$a^2 + b^2 > c^2$$

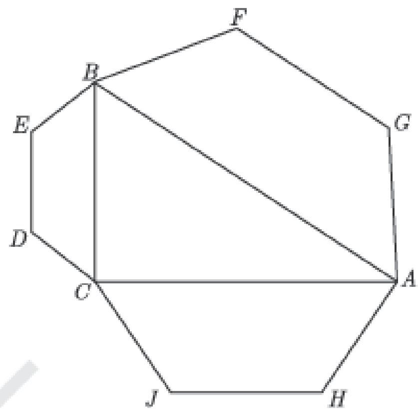
2. في أي مثلث منفرج الزاوية (شكل $4-1$) مربع طول الضلع الأطول أكبر من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين .

$$a^2 + b^2 < c^2$$

F : توسعة نظرية فيثاغورس

إذا أنشئت مضلعات متشابهة على أضلاع مثلث قائم الزاوية (على أن يكون من ضمن الأضلاع المتناظرة للمضلعات أضلاع المثلث القائم الزاوية) فإن مساحة المضلع المنشأ على الوتر تساوي مجموع مساحتي المضلعين المنشأين على الضلعين الآخرين للمثلث . ففي الشكل ($5-1$) :

مساحة $ABFG$ = مساحة $BCDE$ + مساحة $ACJH$



شكل $1-5$

G : ثلاثيات فيثاغورس .

عندما : $a^2+b^2=c^2$ ، ضع $a=m^2-n^2, b=2mn, c=m^2+n^2$ ،

حيث $m>n$ لتحصل على ثلاثيات تعرف باسم ثلاثيات فيثاغورس.

بعض ثلاثيات فيثاغورس الأولية فيما بينها

$(8,15,17)$ ، $(7,24,25)$ ، $(5,12,13)$ ، $(3,4,5)$

$(20,21,29)$ ، $(12,35,37)$ ، $(11,60,61)$ ، $(9,40,41)$

لاحظ أنه من الممكن الحصول على عدد غير منته من ثلاثيات فيثاغورس وذلك بضرب الأعداد الثلاثة في عدد طبيعي واحد .

$V-$ علاقات الدائرة *Circle Relations*

A . قياس الزاوية في حالاتها مع الدائرة

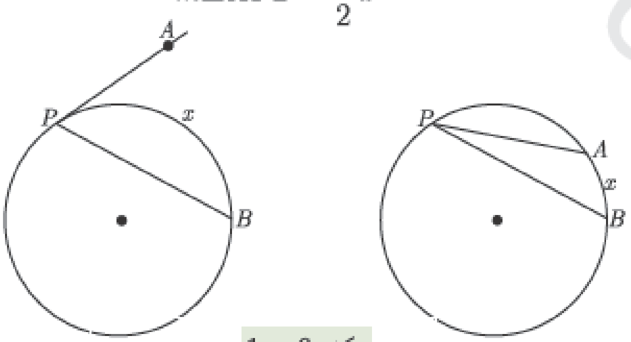
1. قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها .

2. قياس الزاوية المحصورة بين مماس ووتر في الدائرة يساوي نصف قياس القوس المقابل للوتر من جهة الزاوية .
3. قياس الزاوية الناتجة من تقاطع وترين داخل دائرة يساوي نصف مجموع قياسي القوسين الذين أحدهما مقابل للزاوية والآخر مقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس.
4. قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطعين للدائرة في نقطة خارجها يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المقابلين لهذه الزاوية .
5. قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطع ومماس لدائرة في نقطة خارجها يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المقابلين لهذه الزاوية .
6. قياس الزاوية الناتجة من تقاطع مماسين للدائرة يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المقابلين لهذه الزاوية .
7. مجموع قياس الزاوية الناتجة من تقاطع مماسين والقوس الأصغر المقابل لها يساوي $180°$.

وبطريقة بديلة نستطيع عرض النقاط السبع السابقة كما يلي :

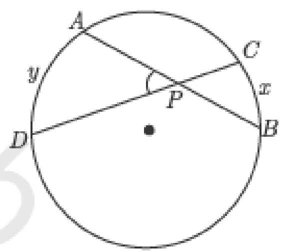
1. إذا وقع رأس زاوية على محيط دائرة فإن قياس هذه الزاوية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها (شكل $6-1$).

$$m\angle APB = \frac{1}{2}x$$



شكل $6-1$

2. إذا وقع رأس زاوية داخل دائرة (شكل $1-7$) فإن قياس هذه الزاوية يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المقابلين لها.

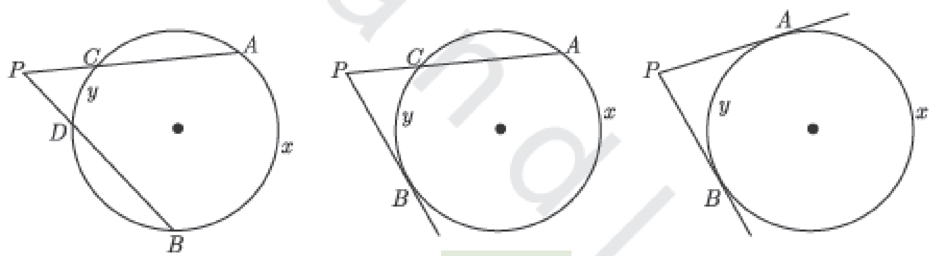


شكل $1-7$

$$m\angle APD = \frac{1}{2}\left(x+y\right)$$

3. إذا وقع رأس زاوية خارج دائرة فإن قياس هذه الزاوية يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المقابلين لها (شكل $1-8$).

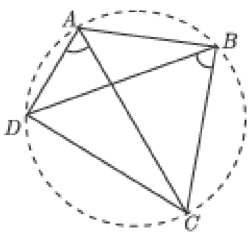
$$m\angle APB = \frac{1}{2}\left(x-y\right)$$



شكل $1-8$

B . طرق إثبات أن أربع نقاط تقع على محيط دائرة واحدة (الرباعي الدائري هو شكل رباعي تقع رؤوسه الأربعة على دائرة واحدة) .

1. إذا قابل أحد أضلاع الرباعي زاويتين متطابقتين عند الرأسين الآخرين من الرباعي ، فإن الشكل الرباعي يكون دائريًا في شكل $(1-9)$، $ABCD$ دائري لأن

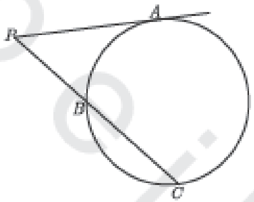


شكل $1-9$

$$\angle DAC \cong \angle CBD$$

2. في أي شكل رباعي، إذا وجد زاويتان متقابلتان متكاملتان (مجموع قياسيهما = 180°)، فإن الرباعي يكون دائرياً.

C . المماس ، القاطع ، الأوتار في الدائرة .

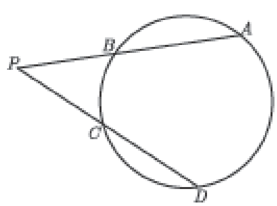


شكل $10-1$

1. القطعتان المماستان لدائرة المرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

2. إذا رسمنا من نقطة خارج دائرة قطعة مماسة وقاطع لها فإن مربع طول القطعة المماسة للدائرة يساوي حاصل ضرب طول القاطع، وطول الجزء الخارجي من القاطع (شكل $10-1$).

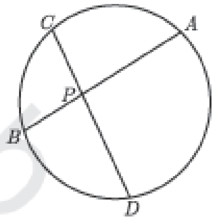
$$(AP)^2 = (PC)(PB)$$



شكل $11-1$

3. إذا تقاطع قاطعان لدائرة واحدة في نقطة خارجها، فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول بطول الجزء الخارجي منه يساوي ضرب طول القاطع الآخر بطول الجزء الخارجي منه. (شكل $11-1$). أي أن $(AP)(BP) = (DP)(CP)$.

4. إذا تقاطع وتران في نقطة داخل دائرة، وقسمت نقطة التقاطع كل وتر إلى جزأين، فإن حاصل ضرب طولي جزئي الوتر الأول يساوي حاصل ضرب طولي جزئي الوتر الآخر (شكل 12 – 1).



شكل 12 – 1

$$(AP)(BP) = (DP)(CP)$$

VI– التقاطع في نقطة Concurrency

A : الأعمدة المنصفة لأضلاع مثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة هي مركز الدائرة الخارجية لهذا المثلث .

B : ارتفاعات المثلث Altitudes الثلاثة تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة تسمى نقطة تقاطع الارتفاعات في المثلث The Orothocenter.

C : متوسطات المثلث Medians الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة تقسم كل متوسط بنسبة $2:1$ من جهة القاعدة ، وتسمى هذه النقطة مركز الثقل The Centroid.

D : منصفات زوايا المثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة هي مركز الدائرة الداخلية لهذا المثلث .

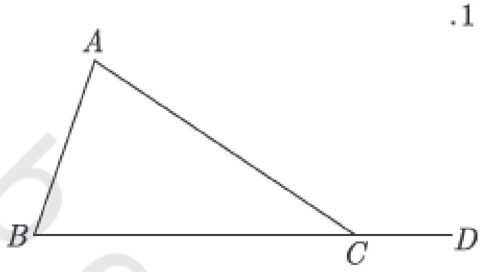
VII– المتباينات Inequalities

A : قياس الزاوية الخارجية للمثلث أكبر من قياس أي زاوية فيه عدا المجاورة

لها، في ΔABC الشكل $1-13$.

$m\angle ACD > m\angle A$ ،

$m\angle ACD > m\angle B$

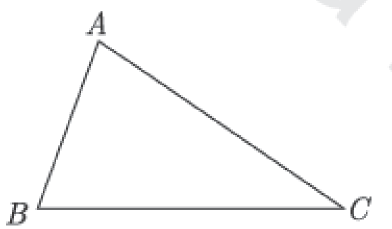


شكل $1-13$

B : إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث، فأكبرهما في الطول تقابله زاوية أكبر في القياس.

في ΔABC (الشكل $1-14$):

$$AC > AB \Rightarrow m\angle B > m\angle C$$

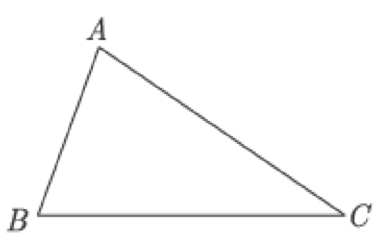


شكل $1-14$

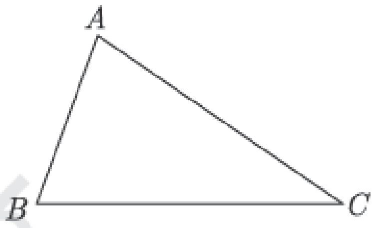
C : إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث، فإن الزاوية الكبرى في القياس يقابلها ضلع أكبر في الطول.

في ΔABC (الشكل $1-15$):

$$m\angle A > m\angle C \Rightarrow BC > AB$$



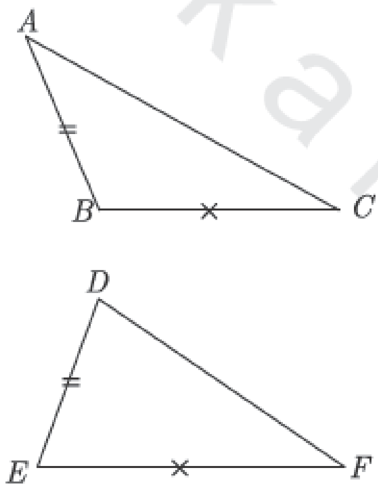
شكل $1-15$



شكل 16 – 1

D : مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث. في ΔABC (الشكل 16 – 1)

$$AB + AC > BC$$
$$AB + BC > AC$$
$$AC + BC > AB$$



شكل 17 – 1

E : إذا ساوى طولا ضلعين في مثلث طولي ضلعين في مثلث آخر على الترتيب، وكان قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الآخر، فإن طول الضلع المقابل لهذه الزاوية في المثلث الأول يكون أكبر من طول الضلع المقابل للزاوية التي في المثلث الآخر.

في $\Delta ABC, \Delta DEF$ (الشكل 17 – 1):

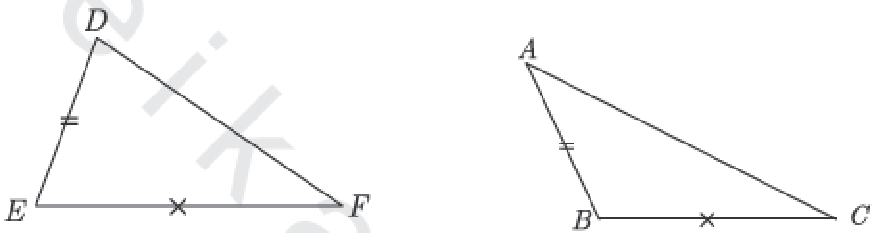
$$AB = DE, BC = EF, m\angle B > m\angle E$$
$$\Rightarrow AC > DF$$

F : إذا ساوى طولا ضلعين في مثلث طولي ضلعين في مثلث آخر على الترتيب، وكان طول الضلع الثالث المقابل للزاوية المحصورة بين هذين الضلعين في المثلث الأول

أكبر من طول الضلع الثالث في المثلث الآخر ، فإن قياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع في المثلث الأول يكون أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الثالث في المثلث الآخر.

في $\Delta ABC, \Delta DEF$ (الشكل $18-1$):

$$AB = DE, BC = EF, AC > DF \quad \Rightarrow m\angle B > m\angle E$$



شكل $18-1$

G : في المثلث الحاد الزوايا ، مربع طول أي ضلع من أضلاعه أقل من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين .

H : في المثلث المنفرج الزاوية ، مربع طول أطول الأضلاع أكبر من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين.

$VIII$ – المساحة *Area*

A : مساحة المربع تساوي مربع طول ضلعه.

مساحة المربع = s^2 حيث s طول الضلع.

B : مساحة المربع تساوي نصف مربع أحد قطريه .

مساحة المربع = $\frac{1}{2}d^2$ حيث d طول القطر.

C : مساحة المثلث القائم الزاوية تساوي نصف حاصل ضرب ضلعي القائمة .

مساحة المثلث القائم الزاوية = $\frac{1}{2}\left(l_1 \cdot l_2\right)$ حيث l_1, l_2 طولا ضلعي القائمة.

D : إذا تطابقت قاعدتا مثلثين فإن النسبة بين مساحتيهما تساوي النسبة بين طولي ارتفاعيهما.

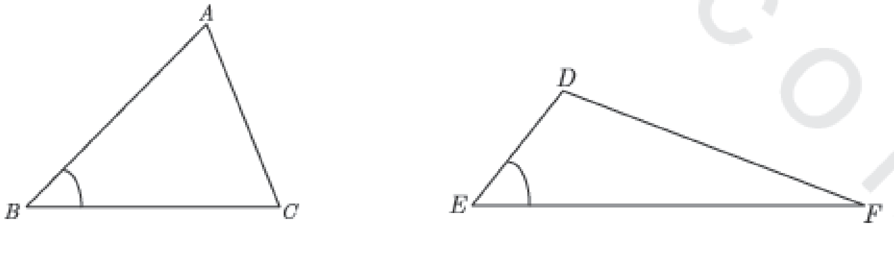
E : إذا تطابق ارتفاعا مثلثين فإن النسبة بين مساحتيهما تساوي النسبة بين طولي قاعدتيهما .

F : مساحة أي مثلث تساوي نصف حاصل ضرب طولي أي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2}\left(ab\right) \cdot sin\angle C$$

G : النسبة بين مساحتي مثلثين تتطابق فيهما زاويتان متناظرتان تساوي النسبة بين حاصل ضرب طولي ضلعي هاتين الزاويتين في كل مثلث. ففي $\Delta ABC, \Delta DEF$ (الشكل $1-19$)، وإذا رمزنا لمساحة المثلث ABC بالرمز $\left[ABC\right]$ ، فإن

$$\angle B \cong \angle E \Rightarrow \frac{\left[\Delta ABC\right]}{\left[\Delta DEF\right]} = \frac{\left(AB\right)\left(BC\right)}{\left(DE\right)\left(EF\right)}$$



شكل $1-19$

H : مساحة المثلث المتطابق الأضلاع تساوي $\frac{\sqrt{3}}{4}$ مربع طول ضلع المثلث .

أي أن مساحة المثلث المتطابق الأضلاع = $\frac{s^2\sqrt{3}}{4}$ حيث s طول ضلع المثلث.

I : مساحة المثلث المتطابق الأضلاع تساوي $\frac{\sqrt{3}}{3}$ مربع طول ارتفاع المثلث .

أي أن مساحة المثلث المتطابق الأضلاع = $\frac{h^2\sqrt{3}}{3}$ حيث h ارتفاع المثلث.

J : مساحة أي مثلث أطوال أضلاعه a, b, c تساوي $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

حيث $s = \frac{a+b+c}{2}$ (نصف طول محيط المثلث).

K : مساحة متوازي الأضلاع تساوي حاصل ضرب طول قاعدته في طول الارتفاع المقام عليها.

أي أن مساحة متوازي الأضلاع = $b \cdot h$

L : مساحة المعين تساوي نصف حاصل ضرب طولي قطريه ، أي أن مساحة المعين = $\frac{1}{2}\left(d_1 \cdot d_2\right)$.

M : مساحة شبه المنحرف تساوي حاصل ضرب نصف مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين في طول الارتفاع.

أي أن مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}h\left(b_1 + b_2\right)$ = القاعدة المتوسطة $\cdot h$

N : مساحة المضلع المنتظم تساوي حاصل ضرب نصف طول العامد (العمود المقام من مركز المضلع المنتظم إلى منتصف أحد أضلاع المضلع) في محيط المضلع المنتظم . مساحة المضلع المنتظم = $\frac{1}{2}a \cdot p$

O : مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطره r وقياس زاويته المركزية n = $\frac{n}{360} \cdot \pi r^2$.

P : النسبة بين مساحتي المثلثين المتشابهين تساوي مربع نسبة التشابه بينهما .

Q : نسبة التشابه بين أي زوج من المثلثات المتشابهة تساوي الجذر التربيعي للنسبة بين مساحتيهما .

R : النسبة بين مساحتي المضلعين المتشابهين تساوي مربع نسبة التشابه بينهما .

S : نسبة التشابه بين أي زوج من المضلعات المتشابهة تساوي الجذر التربيعي للنسبة بين مساحتيهما .

ملاحظة : نستطيع الحصول على نسبة التشابه عن طريق إيجاد النسبة بين أي زوج من الأضلاع المتناظرة، الارتفاعات، المتوسطات، منصفات الزوايا أو أي من القطع المستقيمة المتناظرة.

لنتعلم من المغالطات الهندسية

يقول جورج بوليا وهو يعد واحداً من أعظم الرياضيين المعاصرين : " الهندسة هي الاستنتاج الصحيح من الأشكال غير الصحيحة ". وسوف نوضح في هذا القسم أن تكوين نتائج مبنية على رسومات غير صحيحة يمكن أن يؤدي بنا إلى نتائج مستحيلة ، بل إن العبارات التي تحوي مغالطات تبدو غريبة. ومع ذلك عليك أن تتتبع البرهان وتتعرف على الأخطاء.

والمغالطة الأولى هي واحدة من أشهر المغالطات في الهندسة وتستند على غياب مفهوم معين في كتاب العناصر لإقليدس .

المغالطة الأولى : أي مثلث مختلف الأضلاع هو مثلث متطابق الضلعين

الإثبات

لإثبات أن المثلث المختلف الأضلاع ABC هو مثلث متطابق الضلعين، نرسم منصفاً للزاوية C ، وكذلك نرسم منصفاً عمودياً للضلع $\overline{AB}$ ليتقاطعا في G ، والتي يخرج منها عمودان يقطعان $\overleftrightarrow{AC},\overleftrightarrow{CB}$ في D,F على الترتيب. لتكن E منتصف الضلع $\overline{AB}$.

عليك أن تلاحظ أن هناك أربع إمكانيات للوضع السابق يمثل الأنواع الممكنة من المثلثات المختلفة الأضلاع.

الشكل $20-1$: عندما $\overline{CG},\overline{EG}$ يتقاطعان داخل المثلث.

الشكل $21-1$: عندما $\overline{CG},\overline{EG}$ يتقاطعان على $\overline{AB}$.

الشكل $22-1$: عندما $\overline{CG},\overline{EG}$ يتقاطعان خارج المثلث، ولكن العمودين $\overline{GD},\overline{GF}$ يقعان على $\overline{AC},\overline{CB}$.

الشكل $23-1$: عندما $\overline{CG},\overline{EG}$ يتقاطعان خارج المثلث، ولكن العمودين $\overline{GD},\overline{GF}$ يقعان على $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$ خارج المثلث.

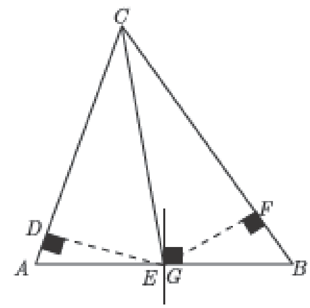
برهان هذه المغالطة يتحقق لأي شكل من الأشكال الأربعة ؛ ولذا اتبع البرهان على شكل واحد والباقي بالمثل.

المعطيات : ABC مثلث مختلف الأضلاع

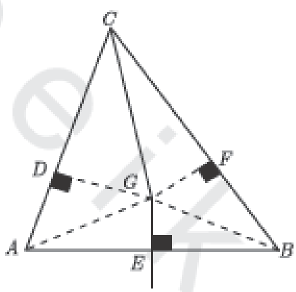
المطلوب : أثبت أن $AC = BC$ (أو ΔABC متطابق الضلعين)

البرهان : لأن $\angle BCG \cong \angle ACG$ ، والزاويتين $\angle CDG$, $\angle CFG$ قائمتان، فإن هذا يؤدي تطابق المثلثين $\Delta CDG,\Delta CFG$ (باستخدام زاويتين وضلع SAA) ومنه نستنتج أن $DG = FG, CD = CF$. الآن لدينا $AG = BG$ (لأن النقطة على المنصف العمودي للقطعة المستقيمة تبعد البعد نفسه عن طرفيها) ولدينا $\angle ADG, \angle BFG$

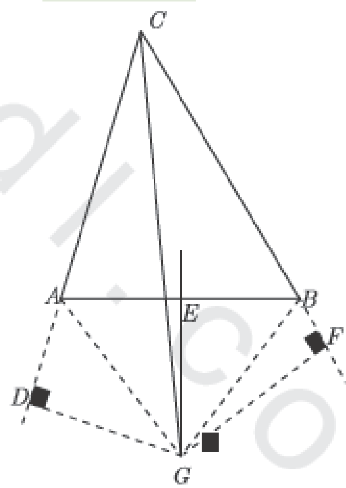
قائمتان، وهذا يؤدي أيضاً إلى تطابق المثلثين $\Delta DAG, \Delta FBG$ (وتر وضلع قائمة) ومن ذلك نستنتج أن $DA = FB$ وهذا بالطبع يقودنا إلى أن $AC = BC$ (بالجمع في شكلي $1-20$ ، $1-21$ وبالطرح في $1-22$ ، $1-23$) ●



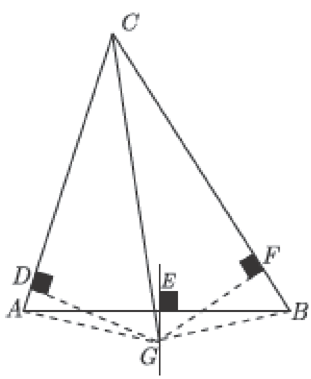
شكل $1-21$



شكل $1-20$



شكل $1-23$



شكل $1-22$

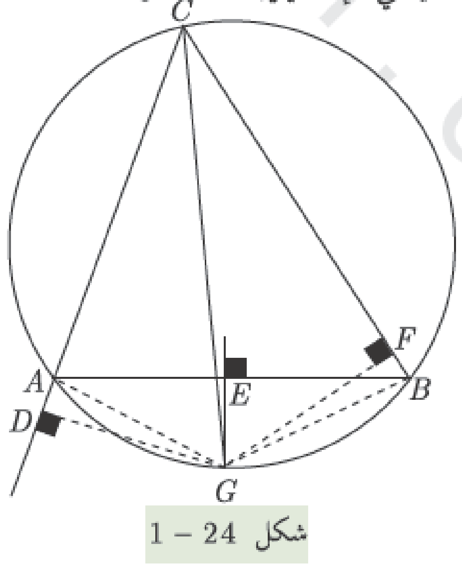
عند هذه النقطة قد تنزعج بعض الشيء، وتتساءل أين ارتكبنا الخطأ والذي سمح بهذه المغالطة، ولكنك بالإنشاء الدقيق سوف تجد الخطأ الماكر في الرسم، وتستنتج أن جميع الأشكال الأربعة المفترضة غير صحيحة.

a. إن النقطة G يجب أن تكون خارج المثلث.

b. عندما يلتقي العمودان مع ضلعي المثلث في D, F فإن إحدى هاتين النقطتين ستكون بين رأسين من رؤوس المثلث أما الثانية فستقع خارج المثلث.

وحسب القواعد العامة التي يستخدمها إقليدس، فإن هذه المعضلة لا تزال لغزا لأنه لم يقم بتعريف مفهوم البينية في كتابه العناصر. في المناقشة التالية، سوف نثبت أن هذا الخطأ ارتكب عند إثبات المغالطة السابقة، وبرهاننا سوف يستخدم الطرق الإقليدية ولكن مع فرض تعريف للبينية.

وسنبدأ بإنشاء دائرة محيطة بالمثلث ABC (انظر الشكل $1-24$). إن منصف $\angle ACB$ لابد أن يمر بمنتصف القوس AB (لأن $\angle ACG$ تطابق $\angle BCG$ - زاويتان محيطيتان متطابقتان)، ولنسم ذلك المنتصف G. أيضاً، المنصف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ لابد أن يمر بمنتصف $\widehat{AB}$ ؛ وعليه لابد أن يمر بالنقطة G ، أي أن منصف $\angle ACB$ والمنصف العمودي للقطعة المستقيمة AB يتقاطعان خارج المثلث في G ، وهذا يلغي الإمكانيتين $1-20$ و $1-21$.



شكل $1-24$

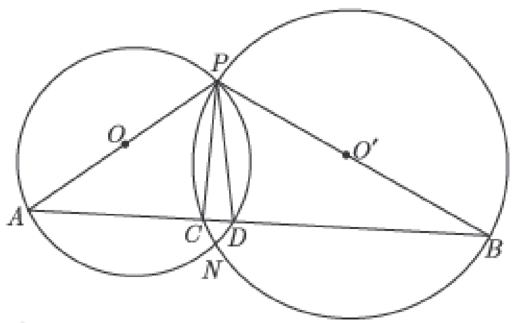
والآن لننظر للشكل الرباعي الدائري $ACBG$ الذي فيه $\angle CAG + \angle CBG = 180°$ ، نجد أنه في حالة $\angle CAG \equiv \angle CBG = 90°$ فإن القطعة المستقيمة CG تكون قطراً للدائرة وهذا يجعل المثلث ABC مثلثاً متطابق الضلعين، ولكن ذلك مرفوض لأن المثلث ABC مختلف الأضلاع. إن هذا يعني أن $\angle CAG, \angle CBG$ ليستا قائمتين وأن إحداهما حادة والأخرى منفرجة .

وبفرض $\angle CBG$ حادة تكون $\angle CAG$ منفرجة، ومنه فإن ارتفاع المثلث CBG على الضلع CB يقع داخل المثلث، وفي المثلث المنفرج الزاوية CAG الارتفاع على الضلع AC يقع خارج المثلث. (هذا يقبل عادة بدون برهان ولكن من السهل إثباته). إن حقيقة أن واحداً وواحداً فقط من الارتفاعين يقطع ضلعاً من أضلاع المثلث بين رأسين فيه يدحض "إثبات" المغالطة.

المغالطة الثانية : يمكن رسم عمودين مختلفين على مستقيم واحد من نقطة خارجه.

الإثبات

لإثبات العبارة السابقة، نرسم دائرتين O, O' تتقاطعان في P, N (كما في الشكل $25-1$)، ثم نرسم القطرين $\overline{PA}, \overline{PB}$ في كل دائرة ، ثم نصل $\overline{AB}$ الذي يقطع الدائرة O في D ، والدائرة O' في C ، ومن هذا نجد أن $\angle PDA, \angle PCB$ قائمتان لأنهما منشأتان في نصفي الدائرتين O, O' على الترتيب، إذن $\overline{PC}, \overline{PD}$ عمودان على $\overline{AB}$.أي أنه يوجد خطان مستقيمان مختلفان عموديان على خط مستقيم ثالث مما يعني أن مجموع زوايا المثلث BCD أكبر من $180°$ - وهذه مزعجة جداً في هندسة إقليدس !●

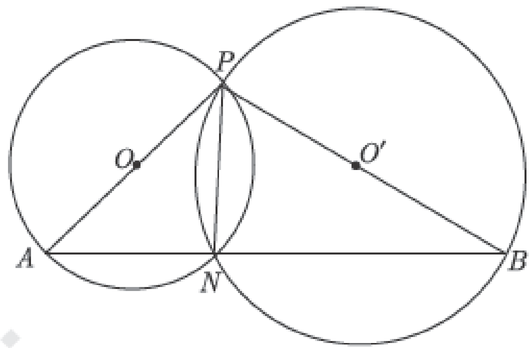


شكل $25-1$

والمغالطة هنا تظهر بفعل التقاطع الخاطئ للقطعة $\overline{AB}$ مع الدائرتين والتي من السهل إثبات أن $\overline{AB}$ تقطع الدائرتين عند النقطة N، وذلك عن طريق رسم $\overline{AN}, \overline{BN}, \overline{PN}$ (انظر الشكل $26-1$)، لأن $\angle ANP$ و $\angle BNP$ كل منهما منشأة في نصف دائرة، إذن هما زاويتان قائمتان، وكما تخبرنا مسلمة إقليدس الخامسة بأنه لا يمكن لنا سوى إنشاء عمود وحيد على مستقيم من نقطة تقع على هذا المستقيم.

ولذلك فالعمودان $\overline{AN}$، $\overline{BN}$ على $\overline{PN}$ يقطعانها في N، وبالتالي هما قطعتان تقعان على مستقيم واحد $\overleftrightarrow{ANB}$. هذا يثبت أنه عندما نرسم $\overleftrightarrow{AB}$ للمرة الأولى يجب ألا يقطع الدائرتين في نقطتين C, D بل في نقطة واحدة N والتي هي نقطة تقاطع الدائرتين. ويتضح الآن أن " إثبات " المغالطة معتمد على فرض وجود النقطتين C, D.*

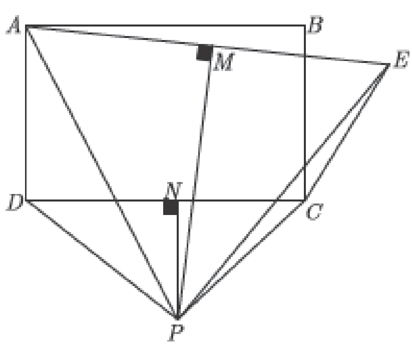
* لأولئك الذين يشعرون بالانزعاج حول دحض المغالطة مع الفرضية نفسها التي برهنت عليها (لا يمكن رسم مستقيمين مختلفين متعامدين على مستقيم ثالث)، نستطيع استخدام مسلمة بليفير لإثبات أن كلاً من $\overline{AN}, \overline{BN}$ يوازي $\overline{OO'}$ ولذا يجب أن يكونا جزأين من $\overleftrightarrow{ANB}$.



شكل $1-26$

المغالطة الثالثة : الزاوية القائمة لها نفس قياس الزاوية المنفرجة .

الإثبات



شكل $1-27$

بداية إثباتنا سيكون برسم المستطيل $ABCD$ ، ثم نرسم $\overline{CE}$ خارجه بحيث $\overline{AD} \cong \overline{CE}$ ، ثم نرسم المتوسطين العموديين لكل من $\overline{AE}, \overline{CD}$ ، يقطعانهما في M, N على الترتيب ويتقاطعان في P ، وأخيراً نرسم $\overline{CP}, \overline{EP}, \overline{AP}, \overline{DP}$ كما في الشكل $1-27$.

ولأن $AP = EP, DP = CP$ (كل نقطة تقع على المنصف العمودي لقطعة مستقيمة تبعد المسافة نفسها عن طرفي القطعة المستقيمة)، فإن $\triangle ECP \cong \triangle ADP$

ونستنتج من التطابق أن $m\angle ECP = m\angle ADP$. ولكن ΔPDC متطابق الضلعين مما يعني أن $m\angle DCP = m\angle CDP$. بالطرح نصل إلى أن الزاوية المنفرجة $\angle ECD$ تساوي الزاوية القائمة $\angle ADC$ ●

قد ترغب في دراسة الحالتين اللتين فيهما تقع النقطة P على $\overline{DC}$ أو داخل المستطيل $ABCD$ ، ولكن المناقشة السابقة تتحقق فيهما أيضا.

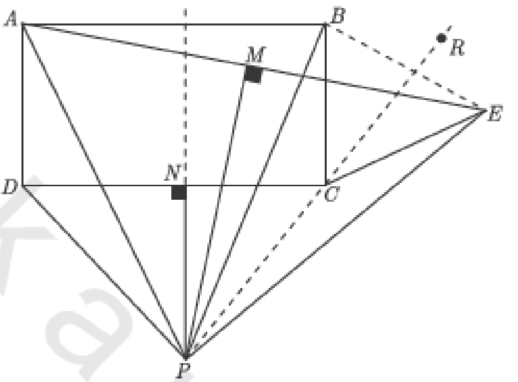
حتى الآن قد تجد أن أفضل طريقة للعثور على الخطأ في الإثبات السابق هو رسم هندسي دقيق، ولكن بدلاً من محاولة اكتشاف الخطأ عن طريق الرسم سوف نقوم بتحليل الوضع القائم.

سوف نلاحظ أن $\overleftrightarrow{NP}, \overleftrightarrow{MP}$ منصفان عموديان لكل من $\overline{AB}, \overline{AE}$ على الترتيب يتقاطعان في النقطة P التي هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABE ، وهذا يعني أن النقطة P تقع أيضاً على المنصف العمودي للضلع الثالث $\overline{BE}$ ، ومن المعطيات لدينا $BC = EC$ وبالتالي فالنقطة C يجب أن تقع أيضاً على المنصف العمودي للضلع الثالث $\overline{BE}$ (انظر الشكل $28-1$)، إن $\overleftrightarrow{PC}$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{BE}$ ، وكذلك المنصف الداخلي للزاوية $\angle BCE$. نعلم أن الزاوية المنعكسة هي الزاوية التي قياسها بين $180°$ و $360°$. وباعتبار الزاوية المنعكسة $\angle ECP$ التي قياسها يساوي $m\angle PCR + m\angle RCE$ ، نجد أن $\overline{EP}$ ضلع في ΔECP يقع مقابل النقطة C خارج المستطيل.

وهذا يجعل الخطوة الأخيرة في "برهان" المغالطة غير صحيح ؛ لأن

$$m\angle ECP \neq m\angle ECD + m\angle DCP$$

وينبغي أن نضع في اعتبارنا أن إقليدس لم يستخدم مصطلحات (داخل وخارج) في براهينه. و إنما كان يستخدمها فقط للإشارة إلى أشكال محددة. ونحن عموماً قادرون على مناقشة هذه المغالطة باستخدام تلك المصطلحات.

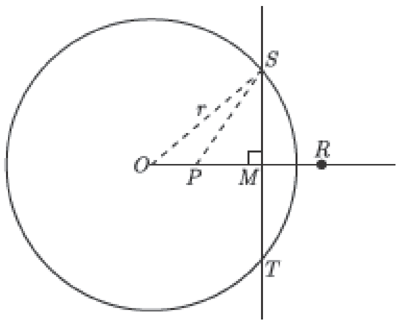


شكل 28 – 1

المغالطة الرابعة : أي نقطة داخل الدائرة تكون على الدائرة.

الإثبات

لتكن النقطة P تقع داخل الدائرة O ، واخترنا النقطة R واقعة على $\overrightarrow{OP}$ ، بحيث $\left(OP\right)\left(OR\right)=r^2$ حيث r طول نصف قطر الدائرة O. ولنفرض أن $\overleftrightarrow{ST}$ هو المنصف العمودي للقطعة $\overline{PR}$ والذي يقطع الدائرة في S,T ، حيث M منتصف $\overline{PR}$ (الشكل 29 – 1) .



شكل $1-29$

لاحظ أن

$$OP = OM - MP \qquad (\mathrm{I})$$

$$OR = OM + MR = OM + MP \qquad (\mathrm{II})$$

بضرب $(\mathrm{II}),(\mathrm{I})$ نجد أن:

$(OP)(OR) = (OM - MP)(OM + MP)$ أو

$$(OP)(OR) = (OM)^2 - (MP)^2 \qquad (III)$$

وباستخدام نظرية فيثاغورس نجد:

$(OM)^2 + (MS)^2 = (OS)^2$ أو

$$(OM)^2 = (OS)^2 - (MS)^2 \qquad (\mathrm{IV})$$

أيضا

$$(MP)^2 + (MS)^2 = (PS)^2$$ أو

$$(MP)^2 = (PS)^2 - (MS)^2 \qquad (V)$$

والآن بالتعويض من $(V),(IV)$ في (III) نجد أن :

$$(OP)(OR) = [(OS)^2 - (MS)^2] - [(PS)^2 - (MS)^2] \qquad (III)$$

$$(OP)(OR) = (OS)^2 - (PS)^2 \qquad (VI)$$

ولأن $\overline{OS}$ نصف قطر الدائرة O ، لدينا :

$$(OS)^2 = r^2 = (OP)(OR) \qquad (VII)$$

و بالتعويض من (VII) في (VI) نحصل على :

$$(OP)(OR) = (OP)(OR) - (PS)^2 \qquad (VII)$$

وهذا يؤدي إلى أن $PS = 0$ ، والذي يقتضي بدوره أن النقطة P يجب أن تقع على محيط الدائرة .●

لاكتشاف المغالطة في البرهان السابق ، نفرض أن $OP = a$ ومنها $OR = \frac{r^2}{a}$

ولأن $r > a$ ومربع العدد الحقيقي غير الصفري دائما موجب ، إذن $(r-a)^2 > 0$ ، والتي يمكن صياغتها على الصورة $r^2 - 2ra + a^2 > 0$ ومنها $r^2 + a^2 > 2ra$

وبضرب المتباينة السابقة في $\frac{1}{2a}$ نحصل على $\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{a} + a\right) > r$ والتي تكافئ

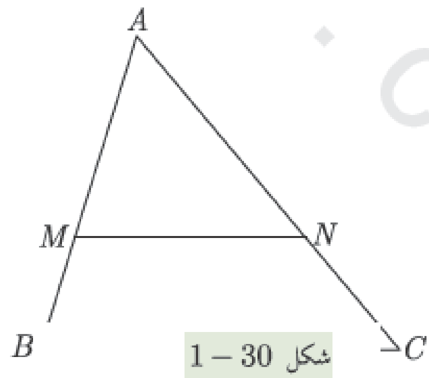
$\frac{1}{2}(OR+OP)>r$ أو $OM>r$*. وهذا يتطلب أن تكون النقطة M خارج الدائرة، وعليه فإن النقطتين S,T ليس لهما وجود، وهذا ما يفند "البرهان" السابق.

المغالطة الخامسة : أي قطعتين مستقيمتين غير متساويتين هما في الحقيقة متساويتان .

الإثبات

في المثلث ABC لدينا $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ حيث $\overline{MN}$ تقطع $\overline{AB},\overline{AC}$ في M,N على الترتيب (انظر شكل $30-1$). والآن سنثبت أن $\overline{BC}=\overline{MN}$.

لأن $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ ، فإن $\Delta AMN \sim \Delta ABC$. إذن $\frac{AB}{AM}=\frac{BC}{MN}$ ، التي منها نستنتج أن $(BC)(AM)=(AB)(MN)$. بضرب طرفي المتساوية في $(BC-MN)$ نحصل على :



شكل $30-1$

* $\frac{1}{2}(OR+OP)=\frac{1}{2}(OP+PR+OP)=\frac{1}{2}(2OP+2PM)=\frac{1}{2}(2OM)=OM>r$ (المترجم)

$$(BC)(AM)(BC-MN)=(AB)(MN)(BC-MN)$$

والتي يمكن صياغتها على الصورة :

$$(BC)^2(AM)-(BC)(MN)(AM)=(AB)(MN)(BC)-(AB)(MN)^2$$

بإضافة $(BC)(MN)(AM)-(AB)(MN)(BC)$ للطرفين نحصل على :

$$(BC)^2(AM)-(AB)(MN)(BC)=(BC)(MN)(AM)-(AB)(MN)^2$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة :

$$(BC)\left[(BC)(AM)-(AB)(MN)\right]=(MN)\left[(BC)(AM)-(AB)(MN)\right]$$

بالقسمة على العامل المشترك $(BC)(AM)-(AB)(MN)$ نحصل على $BC = MN$. ●

ما من مناقشة كاملة للمغالطات الرياضية دون أن يكون هناك مثال لمشكلة تنتج عن القسمة على صفر، ونحن اقترفنا هذا الخطأ الرياضي عندما قسمنا على صفر والذي كان على الصورة

$(BC)(AM)-(AB)(MN)$ ، حيث إنه نتيجة لتشابه المثلثين المذكورين آنفاً.*

التسميات الشائعة common nomenclature

الشكل $1-31$ يوضح بعض التفاصيل والمسميات التي علينا أخذها في الاعتبار عند قراءتنا لهذا الكتاب، وقد وضعناها بشكل منهجي في قائمة، ولكننا

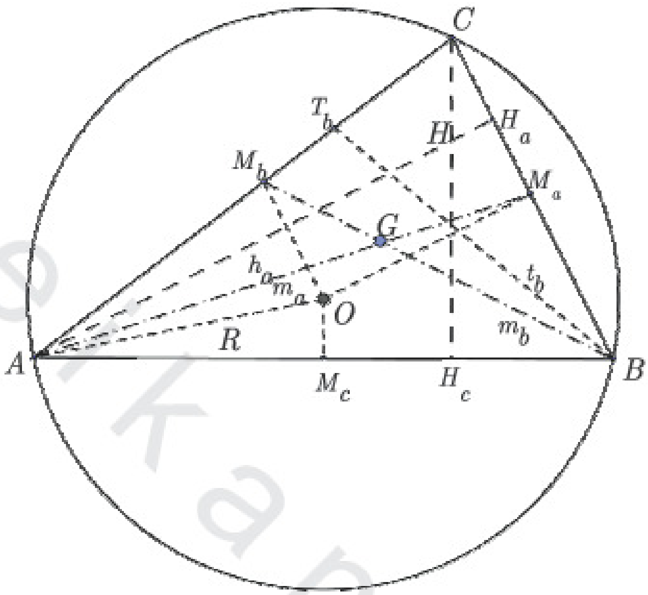
---

* من نتائج تشابه $\Delta ABC \sim \Delta AMN$ أن

$$\frac{BC}{MN}=\frac{AB}{AM}\Rightarrow (BC)(AM)=(AB)(MN)$$ (المترجم)

عندما نستخدم رمزاً غامضاً سوف نوضحه حتى لا يكون هناك التباس، وبالتالي قد نستخدم b للتعبير عن اسم ضلع مثلث أو قياسه، والذي سيوضح ذلك السياق ذاته. فالغموض ناتج من الخيارات المتعددة وليس من الجهل بالترميز، وهدفنا دائما سيكون الوضوح. وبغير شك، فإن الدقة والإحكام تدعم المادة المقدمة وبخاصة في المواضع الضبابية من مناقشاتنا.

الأضلاع	*Sides*	a,b,c
الزوايا	*Angles*	α,β,γ
الرؤوس	*Vertices*	A,B,C
الارتفاعات	*Altitudes*	h_a,h_b,h_c
مواقع الارتفاعات على الأضلاع المقابلة	*Feet of the altitudes*	H_a,H_b,H_c
نقطة تقاطع الارتفاعات في المثلث	*Orthocenter*	H
متوسطات المثلث	*Medians*	m_a,m_b,m_c
منتصفات الأضلاع	*Midpoints of sides*	M_a,M_b,M_c
نقطة تقاطع المتوسطات في المثلث	*Centroid*	G
منصفات زوايا المثلث الداخلية	*Angle bisectors*	t_a,t_b,t_c
مواقع منصفات الزوايا على الأضلاع المقابلة	*Feet of Angle bisectors*	T_a,T_b,T_c
نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث الداخلية ومركز الدائرة الداخلية للمثلث	*Incenter*	I
نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث	*Inradius*	r
نقطة تقاطع الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث ومركز الدائرة المحيطة للمثلث	*Circumcenter*	O
نصف قطر الدائرة المحيطة للمثلث	*Circumradius*	R
نصف المحيط (نصف مجموع أطوال أضلاع المثلث)	*Semiperimeter*	$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$



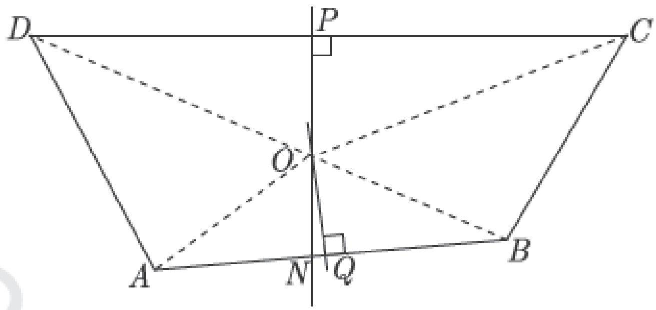
شكل $1-31$

تدريبات

1. اكتشف المغالطة في البرهان التالي : إذا تطابق ضلعان متقابلان في شكل رباعي فإن الضلعين الآخرين يتوازيان.

"البرهان"

في الشكل الرباعي $ABCD$ ، $AD = BC$ ، لتكن P,Q منتصفي $\overline{DC},\overline{AB}$ على الترتيب. ارسم المنصفين العموديين $\overline{OP},\overline{OQ}$ على الضلعين $\overline{DC},\overline{AB}$ ليتقاطعا في O . لتكن N هي نقطة تقاطع $\overrightarrow{PO}$ مع $\overline{AB}$ (انظر الشكل $1-32$) .



شكل $1-32$

لأن O تقع على المنصف العمودي للضلع $\overline{DC}$ ، فإن $\overline{DO} \cong \overline{CO}$ ، وبالمثل $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ ، ولدينا المعطى $AD = BC$ ، مما يؤدي إلى أن $\Delta ADO \cong \Delta BCO \left(SSS\right)$.
ومن التطابق نستنتج أن $m\angle AOD = m\angle BOC$.

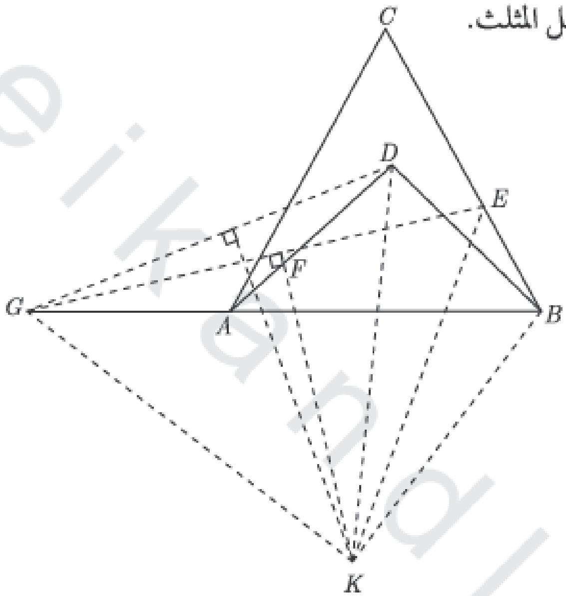
ويمكننا بسهولة إثبات أن $m\angle DOP = m\angle COP$ ، وبإضافة $m\angle AOD = m\angle BOC$ نحصل على $m\angle AOP = m\angle BOP$ ، وبما أن N تقع على $\overrightarrow{PO}$ ، إذن $m\angle AON = m\angle BON$ ، ولكن $\Delta AOQ \cong \Delta BOQ \left(SSS\right)$ ومن هذا التطابق نستنتج $m\angle AOQ = m\angle BOQ$ ، ولأنه لا يوجد سوى منصف واحد فقط للزاوية فإن $\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OQ}$ يجب أن ينطبق كل منهما على الآخر (N تنطبق على Q) مما يؤدي إلى أن $\overleftrightarrow{PN}$ عمودي على $\overline{AB}$ ، وهذا يعني أن : $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ●

كرر البرهان إذا كانت O خارج الشكل الرباعي، ثم كرر البرهان عندما O تقع على $\overline{DC}$.

2. اكتشف المغالطة في البرهان التالي : $45° = 60°$.

"البرهان"

لننشئ المثلث المتطابق الأضلاع ABC (انظر الشكل $33-1$)، ثم ننشئ المثلث القائم والمتطابق الضلعين ABD على الضلع $\overline{AB}$ بحيث يكون $\overline{AB}$ وتراً لهذا المثلث و D داخل المثلث.



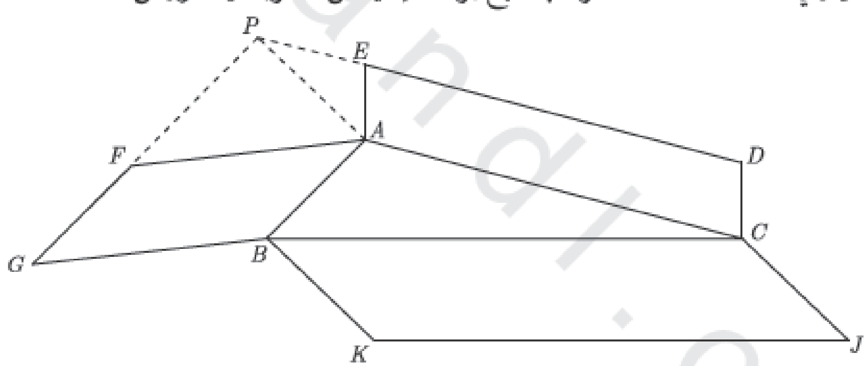
شكل $33-1$

لتكن E نقطة تقع على $\overline{BC}$ بحيث $\overline{BE} = \overline{BD}$. نصل النقطة E بنقطة منتصف $\overline{AD}$ ولتكن F ، ثم نمد EF ليقطع $\overrightarrow{BA}$ في G. نرسم $\overline{GD}$ ، وننشئ العمود المنصف لكل من $\overline{GD}, \overline{GE}$. ولأن $\overline{GD}, \overline{GE}$ غير متوازيين فإن منصفيهما العموديين يلتقيان في نقطة ولتكن K. نصل K بكل من G, D, E, B. ولأن $GK = KD, GK = KE$ (النقطة التي تقع على العمود المنصف لقطعة مستقيمة تكون على أبعاد متساوية من نهايتي هذه القطعة) نستنتج أن $KD = KE$ ، ولكن من الإنشاء الأول $\overline{BE} = \overline{BD}$ ، وهذا يجعل $\Delta KBD \cong \Delta KBE \left(SSS\right)$. ومن

هـذا التطابق نستنتج $m\angle KBD = m\angle KBE$. بالطرح نحصل على $m\angle DBG = m\angle EBG$ ، ولكن $m\angle DBG = 45°$ ، $m\angle CBG = 60°$ ، أي أن $60° = 45°$. ●

3. على الضلعين $\overline{AB}, \overline{AC}$ في المثلث الاختياري ABC ، أنشأنا متوازيي الأضلاع $ABGF, ACDE$ ، $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{GF}$ يتقاطعان في P. كما أنشأنا على الضلع $\overline{BC}$ متوازي الأضلاع $BCJK$ بحيث $\overline{BK} \cong \overline{PA}, \overline{BK} \parallel \overline{PA}$. (انظر الشكل $34 - 1$).

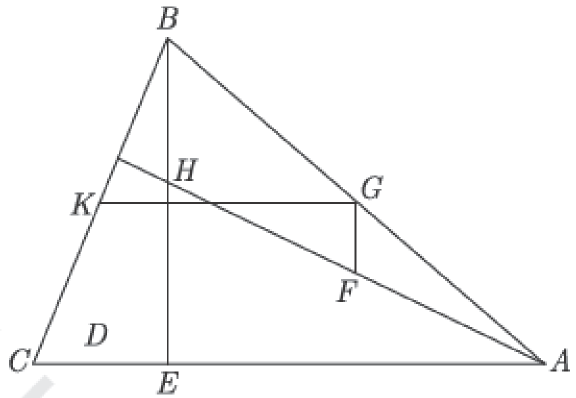
من هذا التكوين قدم بابوس (٣٠٠ بعد الميلاد) مقترحه لتوسعة نظرية فيثاغورس ، وقد أثبت أن مجموع مساحتي متوازيي الأضلاع $ABGF, ACDE$ تساوي مساحة متوازي الأضلاع $BCJK$. أثبت هذه العلاقة حيث المثلث ABC اختياري (ملاحظة : قد ترغب تتبع برهان إقليدس لنظرية فيثاغورس).



شكل $34 - 1$

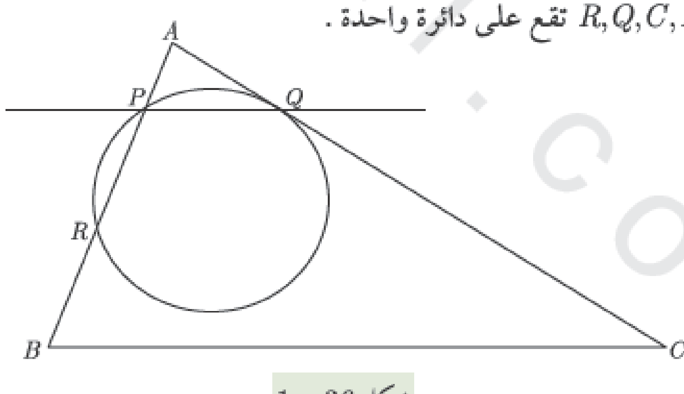
4. لدينا الارتفاعان $\overline{BE}, \overline{AD}$ في المثلث ABC يتقاطعان في H. فإذا كانت النقاط F, G, K منتصفات كل من $\overline{AH}, \overline{AB}, \overline{BC}$ على الترتيب (انظر الشكل $35 - 1$).

أثبت أن $\angle FGK$ زاوية قائمة.



شكل 35-1

5. الخط المستقيم $\overleftrightarrow{PQ}$ يوازي $\overline{BC}$ حيث $\overline{BC}$ قاعدة المثلث ABC ويقطع كلاً من $\overline{AB}, \overline{AC}$ في P, Q على الترتيب (انظر الشكل 36 − 1) ، الدائرة التي تمر بالنقطة P وتمس $\overline{AC}$ عند Q تقطع $\overline{AB}$ مرة أخرى في R. أثبت أن النقاط R, Q, C, B تقع على دائرة واحدة .



شكل 36 − 1

أثناء متابعة ما تبقى من هذا الكتاب، قد ترغب في العمل على بعض التدريبات الإضافية.

لهذا الغرض حاول أن تستخدم كتاب :

"Challenging Problems in Geometry "

للمؤلفين

A. S.Posamentier and C. T. Salkind
(New York: Dover, 1996)