الفصل العاشر

إنشاءات الدائرة

مقدمة

في هذا الفصل، سنستقصي تفاصيل الحلول التي تنطوي على إنشاءات الدائرة التي تناسب شروطاً مفترضة. ففي حالة المسألة الخاصة بإنشاء دائرة تمر بالرؤوس الثلاثة لمثلث التي تسمى الدائرة المحيطة بالمثلث المعطى، ويكون حلها – كما نعلم – وحيداً، أي أن الدائرة الناتجة وحيدة، مركزها O هو نقطة تقاطع الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث، أي أن الدائرة المطلوبة مركزها O ونصف قطرها $\overline{OA}$ (أو $\overline{OB}$ أو $\overline{OC}$). وأيضاً، كما ناقشنا سابقاً، فإن إنشاء الدائرة الداخلية لمثلث معطى، وهي الدائرة التي تمس أضلاع المثلث الثلاثة من الداخل هو إنشاء يقود إلى حل وحيد أيضاً. فمنصفات الزوايا الداخلية للمثلث تتقاطع جميعاً في مركز الدائرة الداخلية I ونصف قطرها هو المسافة العمودية بين I وأي ضلع من أضلاع المثلث الأصلي الثلاثة.

مسألة أبولونيوس The Problem of Apollonius

كلتا المسألتين السابقتين تنطوي على إنشاء دائرة تمر بنقاط معلومة أو تمس مستقيمات أيضاً معلومة. ولعل التعميم الطبيعي لذلك هو مسألة تتحدث عن إنشاء

دائرة تمر بنقطة واحدة أو عدة نقاط (P) وتمس مستقيماً أو عدة مستقيمات (L)، وربما تمس أيضاً دائرة أو أكثر من دائرة (C).

هذه المسألة العامة يطلق عليها أحياناً "مسألة أبولونيوس"* وهي تحلل إلى عشر حالات هي:

1.	PPP	3.	PLL	5.	PPC	7.	LLC	9.	LCC
2.	PPL	4.	LLL	6.	PLC	8.	PCC	10.	CCC

وسوف نبحث كل حالة من تلك الإنشاءات كالتالي:

الإنشاء 1 : PPP

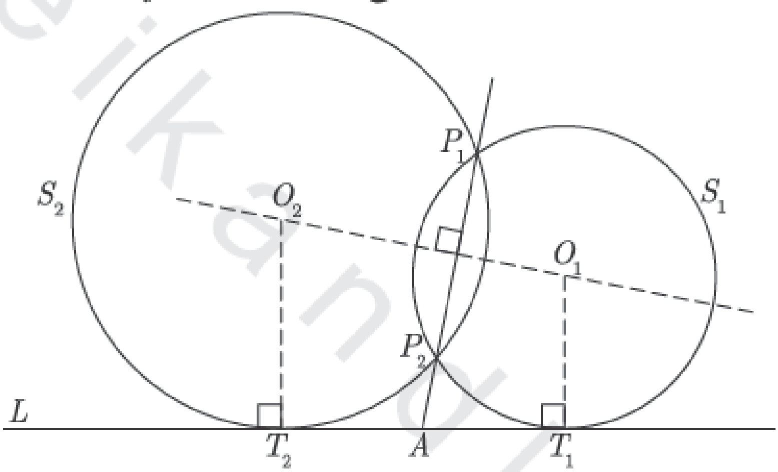
لقد ناقشنا تلك الحالة والتي تتحدث عن إنشاء دائرة تمر بثلاث نقاط، وذلك عندما أنشأنا دائرة تمر برؤوس مثلث، ولكن هناك حالة خاصة ينبغي الإشارة إليها، وهي عندما لا تشكل النقاط الثلاث مثلثاً، أي تكون على استقامة واحدة. وفي هذا الوضع تكون "الدائرة" الوحيدة التي تمر بتلك النقاط الثلاثة هي "دائرة" ذات نصف قطر غير منته، أي خط مستقيم.

---

* عاش أبولونيوس في الفترة مابين ٢٦٢-١٩٠ قبل الميلاد حيث ولد في مدينة يونانية صغيرة تقع جنوب آسيا الصغرى تدعى بيرجا. و اكتسب أبولونيوس شهرته من أعماله ودراساته حول القطوع المخروطية، بالإضافة لعملة بشكل عام في الهندسة المخروطية. وقد ذكر بابوس Pappus أن هناك ستة أعمال هامة تنسب لأبولونيوس تشكل مجتمعة جزءاً من أهم أعماله وأكثرها قيمة. ولكن العمل الوحيد الذي تم إنقاذه بالفعل هو كتابان (تمت كتابتهما أصلاً باللغة العربية ثم ترجمها للاتينية أدموند هالي Edmund Hally في عام ١٧٠٦م) (يتبع ⟵) عالج فيهما ما يسمى بمسائل تماس الدوائر والتي تعرف اليوم بمسائل أبولونيوس والتي سوف نقوم بدراستها خلال هذا الفصل. وقد أشار إقليدس Euclid في كتابه " العناصر " في الباب الرابع إلى أول حالتين منها. وأكمل أبولونيوس في كتابه الأول الحالات : ٣، ٤، ٥، ٦، ٨، ٩. وضمن في كتابه الثاني الحالتين : ٧، ١٠. وقد افتتن العديد من الرياضيين العظام السابقين أمثال نيوتن Newton ، و فيتا Vieta بالحالة العاشرة. وقد بذل الكثيرون من الرياضيين جهداً عظيماً لإعادة بناء وترميم الكتب الأربعة الباقية لأبولونيوس.

الإنشاء 2 : PPL

إذا كان الحل متاحاً، فسوف نرى المستقيم الذي يحوي الوتر $\overline{P_1P_2}$ يلاقي المستقيم المعطى عند النقطة A ، وهي النقطة الخارجية التي تقع على المماس ورسم منها القاطع إلى الدائرة (انظر الشكل $1-10$). ولكن نعلم أن طول المماس – في مثل هذه الحالة – هو الوسط المتناسب بين طول كامل القاطع وطول الجزء الخارجي منه.



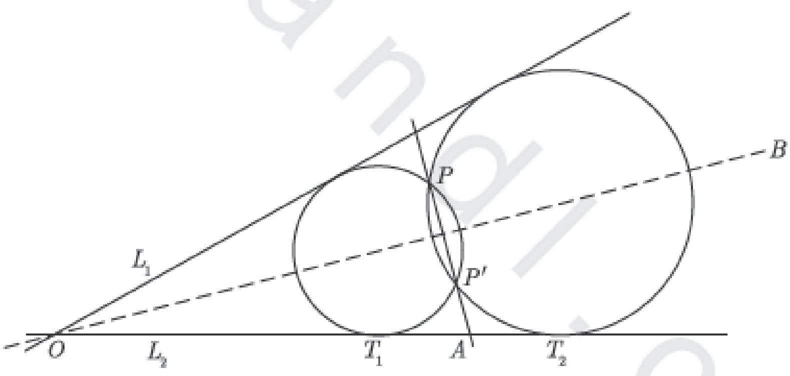
شكل $1-10$

لنفرض أن $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ يقطع L في النقطة A. ثم نوجد بالإنشاء الطول $AT_1 = AT_2 = t$ من معلومية الطولين AP_1, AP_2 ، حيث T_1, T_2 على L وعلى جهتين مختلفتين من A. إذن، T_1, T_2 نقطتا التماس للدائرتين المطلوبتين على المستقيم L اللتين مركزاهما نقطتا تقاطع العمود المنصف للقطعة $\overline{P_1P_2}$ والعمودين المقامين من T_1, T_2.

الإنشاء 3 : PLL

إذا كان الحل متاحاً، فإننا بشكل عام سنحصل على حلين لهذا الإنشاء يشتركان في النقطتين P, P' . وبالتأمل قليلاً حول وضع هاتين النقطتين نجد أنهما متماثلتان حول منصف الزاوية $\overrightarrow{OB}$.(انظر الشكل $2 - 10$). هذا بالإضافة إلى أن المستقيم الحامل للوتر $\overline{PP'}$ حتماً يقطع أحد ضلعي الزاوية وليكن L_2 عند النقطة A .

والآن، بالطبع يمكننا إيجاد $\overrightarrow{OB}$ ، كمنصف للزاوية بين المستقيمين المعطيين L_1, L_2 ، كما يمكننا أيضا الحصول على P' حيث إنها صورة النقطة المعطاة P حول $\overleftrightarrow{OB}$. وعليه نكون قد حولنا الحالة PLL إلى الحالة التي ناقشناها سابقا PPL .



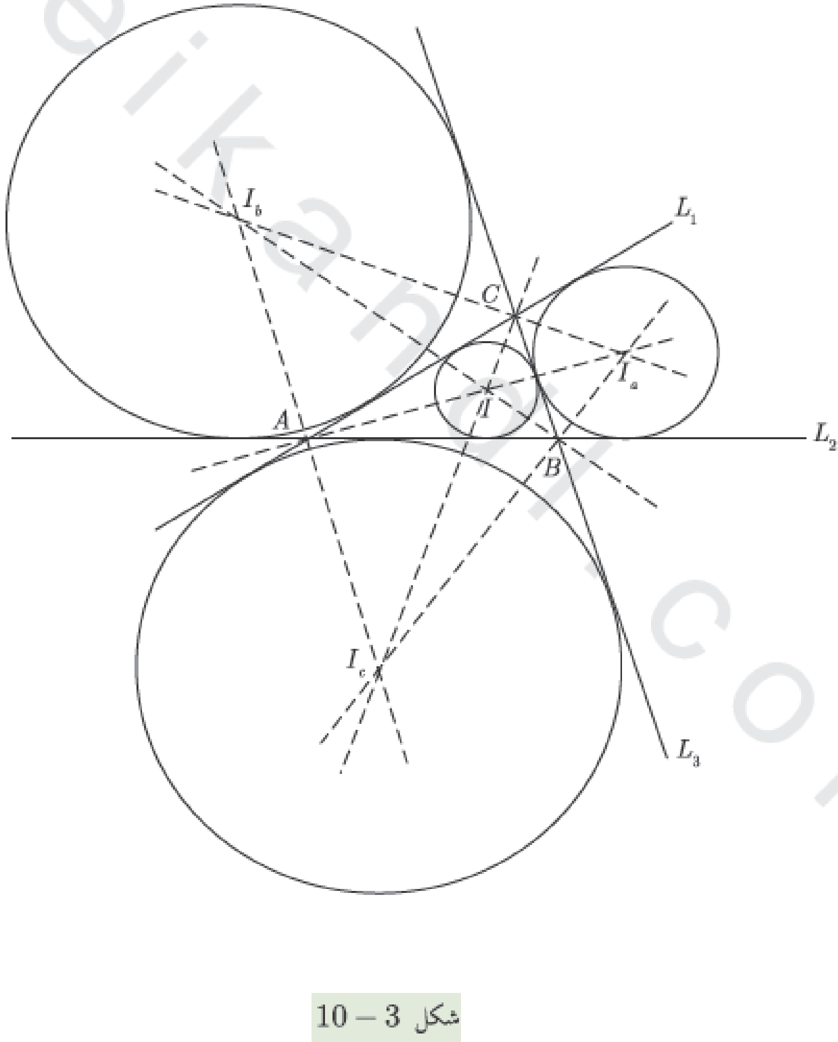
شكل $2 - 10$

الإنشاء 4 : LLL

لقد ناقشنا قبل ذلك الدائرة الداخلية لمثلث ينتج من تقاطع ثلاثة مستقيمات في ثلاث نقاط مختلفة A, B, C . (انظر الشكل $3 - 10$). الإنشاء هنا مباشر. بما أن مركز

أي دائرة تمس ثلاثة مستقيمات يجب أن يقع على منصفات الزاوايا التي تشكلها تلك المستقيمات. وبمجرد معرفة المراكز، فمن السهولة الحصول على أنصاف أقطار هذه الدوائر (كيف؟). وبعد ذلك نرسم الدوائر المطلوبة.

وعليك عزيزي القارئ أن تدرس هذا الشكل بعناية فهو يظهر لك بعض الخواص الرائعة التي تتحدث عن وقوع النقاط على استقامة واحدة والتعامد.



شكل $3-10$

الإنشاء 5 : PPC

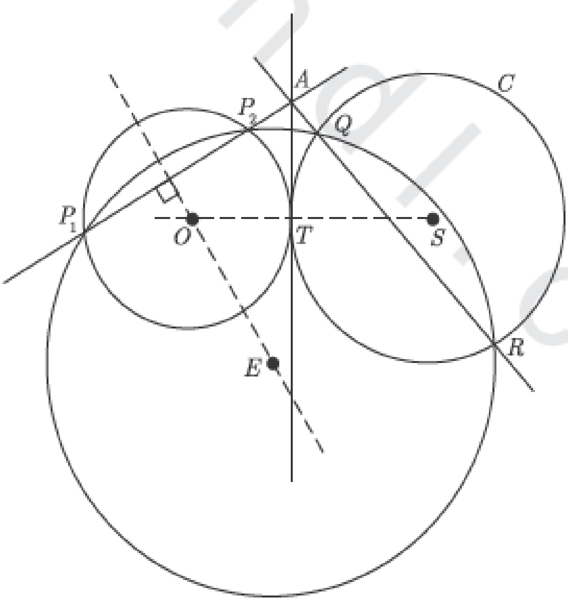
لنفرض أن حل هذا الإنشاء موجود. إذن ؛ ستتقاطع دائرتان في نقطة ولتكن T والتي عندها نستطيع رسم مماس مشترك للدائرتين. وإذا أخذنا من أي نقطة A تقع على هذا المماس المشترك، ورسمنا منها قاطعين أحدهما يقطع الدائرة المطلوبة في النقطتين P_1, P_2 ، والآخر يقطع الدائرة المعطاة في Q, R (انظر الشكل $4-10$)، فيكون لدينا:

$$AP_1 \cdot AP_2 = AT^2 = AR \cdot AQ$$

أي أن :

$$AP_1 \cdot AP_2 = AR \cdot AQ$$

إذن؛ النقاط P_1, P_2, Q, R هي رؤوس لشكل رباعي دائري (انظر التدريب رقم 18 في نهاية هذا الفصل). والآن بسهولة يمكن رسم دائرة تمر بالنقطتين P_1, P_2 وتقطع الدائرة المعطاة C.



شكل $4-10$

لنبدأ الآن في خطوات الإنشاء. أولاً ارسم المنصف العمودي للقطعة $\overline{P_1P_2}$ (الذي هو المحل الهندسي لكل مراكز الدوائر التي تمر بالنقطتين P_1, P_2). واختر على هذا العمودي نقطة ولتكن E ، ثم ارسم الدائرة $\left(E, EP_1\right)$ لتقطع الدائرة المعطاة C في Q, R ، وارسم أيضاً $\overleftrightarrow{QR}$ ليقطع $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ في النقطة A. ومنها ارسم المماس $\overleftrightarrow{AT}$ للدائرة المعطاة ثم ارسم $\overleftrightarrow{ST}$ ليمر بمركز الدائرة المعطاة S والنقطة T ويقطع العمود المنصف للقطعة $\overline{P_1P_2}$ عند النقطة O التي هي مركز الدائرة المعطاة (المماس $\overleftrightarrow{AT}$ للدائرة المعطاة هو واحد من مماسين ممكنين، ناقش هذا الإنشاء مستخدماً المماس الآخر $\overleftrightarrow{AT'}$ غير المرسوم في الشكل $4-10$).

الإنشاء 6 : PLC

لنفرض أن الحل موجود لدينا. ويتمثل في الشكل $5-10$ في الدائرة $\left(E, EG\right)$ حيث تمس الدائرة المعطاة C عند النقطة T وتمس المستقيم المعطى L عند النقطة G ، وتمر في نفس الوقت بالنقطة المعطاة P. خط المركزين $\overleftrightarrow{OE}$ يجب أن يمر بالنقطة T (لماذا ؟). والآن ارسم عموداً يمر بالمركز O إلى الخط المستقيم L ليقطع الدائرة المعطاة في النقطتين A, B اللتين هما نقطتا النهاية لقطر الدائرة المعطاة، ثم ارسم عموداً من المركز E إلى الخط المستقيم L ليلاقيه في النقطة G التي هي نقطة التماس (لماذا ؟). ثم ارسم كلاً من $\overline{BT}, \overline{AT}, \overline{TG}$ ، وأخيراً ارسم $\overline{AP}$ ليقطع الدائرة المطلوبة عند النقطة H. وبما أن $\overleftrightarrow{OF}$ يوازي $\overleftrightarrow{EG}$ ، وكلاً من المثلثين OAT, TEG متطابق الضلعين، فإن $\angle AOT \cong \angle TEG$. أيضاً، كلتا زاويتي القاعدة فيهما أيضاً متطابقتان، ومن ذلك نستنتج أن $\angle OAT \cong \angle ETG$. وبالتالي $\overline{AT}, \overline{TG}$ تقعان على نفس الخط المستقيم، وكل من $\angle BTG$ ، $\angle BTA$ قائمة، ولأن $\angle BFG$ هي الأخرى زاوية قائمة، فإن الشكل الرباعي $BFGT$ دائري (نصف قطر دائرته

$\overline{BG}$). لذلك يكون لدينا قاطعان من النقطة الخارجية A للدائرة المحيطة بالرباعي الدائري $BFGT$. إذن ؛

$$AB \cdot AF = AT \cdot AG$$

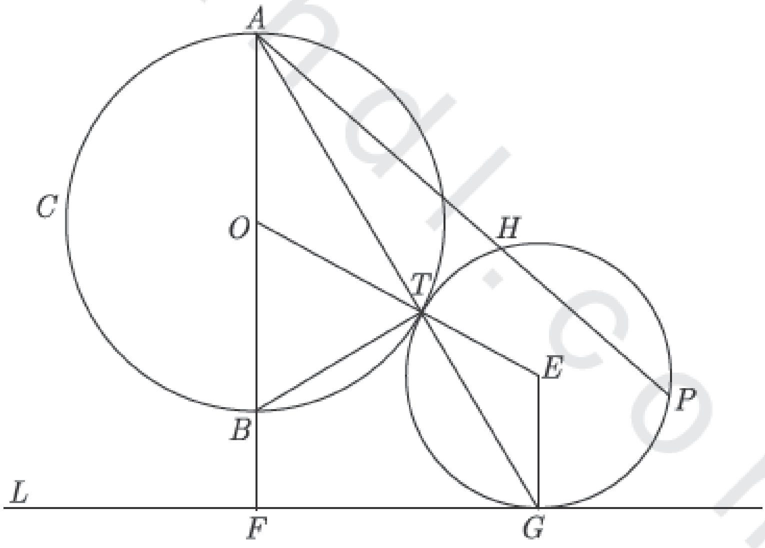
ولكن أيضاً النقاط T, G, P, H هي رؤوس رباعي دائري. إذن ؛

$$AT \cdot AG = AH \cdot AP$$

وعليه فإن :

$$AB \cdot AF = AH \cdot AP \,.$$

ولأن النقاط A, B, F, P موجودة ومتاحة من البداية لأنها من المعطيات ، فإننا يمكن بسهولة الحصول على النقطة H . وهكذا تكون المسألة قد تحولت إلى حالة سابقة درسناها بالفعل وهي PPL في الإنشاء الثاني.



شكل $10 - 5$

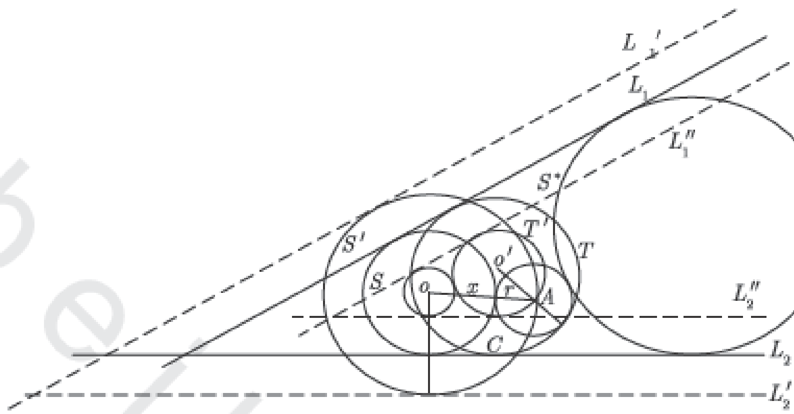
ولإيجاز الطريقة التي نحصل بها على النقطة H ، نبدأ برسم عمود من مركز الدائرة المعطاة O على الخط المستقيم المعلوم L ليلاقيه في النقطة F ، ويقطع الدائرة

C في A, B. ثم نرسم $\overleftrightarrow{AP}$ ومن العلاقة $\frac{AB}{AH} = \frac{AP}{AF}$ نستطيع إنشاء $\overline{AH}$. الآن، نستطيع الحصول على الحل باستخدام النقاط P, H, L التي تماثل النقاط P_1, P_2, L في الإنشاء الثاني.

الإنشاء 7 : LLC

لنفرض كالعادة أن الدائرة المطلوبة S موجودة كما يظهر في الشكل $6-10$. لأن الدائرة S تمس الدائرة المعطاة C ؛ لذا $\overline{OA}$ الواصلة بين مركزيهما تساوي مجموع نصفي قطري الدائرتين، نصف قطر الدائرة المطلوبة (x مثلاً)، ونصف القطر المعلوم للدائرة المعطاة r. والآن، لننشئ دائرة أخرى S' متحدة المركز مع الدائرة S ونصف قطرها $x + r$ ؛ وبالتالي تمر هذه الدائرة بمركز الدائرة المعطاة A وتمس المستقيمين L_1', L_2' الذين يوازيان على الترتيب المستقيمين المعطيين L_1, L_2 ويقعان خلفهما بمسافة قدرها r. ولكن، لأن هذه المستقيمات يمكن إنشاؤها بسهولة فعليه يتحول هذا الإنشاء إلى الإنشاء الثالث (PLL) على اعتبار أن المركز A للدائرة C هو النقطة P والمستقيمين L_1', L_2' يوازيان المستقيمين المعلومين L_1, L_2 والمسافة بينهما r.

وعلى ذلك يكون الحل – والمقصود به الدائرة S – لهذه المسألة سوف يعطينا المركز المطلوب O. ونحن نعلم عموماً أن للإنشاء رقم 3 حلين؛ ولذا سيكون لدينا هنا أيضاً حلان هما S, S^* كما هو موضح في الشكل $6-10$.



شكل $6-10$

يظل هناك احتمال آخر علينا التحقق منه : لنفرض أن الدائرة الحل T تمس الدائرة المعطاة من الداخل. وفي هذه الحالة طول خط المركزين للدائرتين T,C هو $\overline{O'A}$ والذي يساوي الفرق بين نصفي قطري هاتين الدائرتين وذلك بدلاً من المجموع كما سبق.

الآن سيكون لدينا دائرة مساعدة T' متحدة المركز مع الدائرة T وتقع داخلها ونصف قطرها $x'-r$ وكذلك تمر بالمركز A للدائرة المعطاة C وتمس المستقيمين L_1'', L_2'' اللذين يوازيان بدورهما المستقيمين المعطيين L_1, L_2 على الترتيب، ولكن عليك أن تلاحظ أن المستقيمين L_1'', L_2'' يقعان داخل الزاوية التي يشكلها المستقيمان المعطيان L_1, L_2 وليس وراءهما كما سبق. وهكذا - مرة أخرى - نتجه لحل المسألة عن طريق تحويلها للحالة (PLL) بالمعطيات التالية : النقطة A والمستقيمان L_1'', L_2''. وهكذا يكون لدينا حلان لهذه الحالة أيضاً، ولكن لا يظهر على الشكل $6-10$ إلا حل واحد هو الدائرة T.

الإنشاء 8 : PCC

لنفرض أن الدائرة المطلوبة S موجودة وتمس من الخارج الدائرتين المعطيتين C_1, C_2 عند النقطتين T_1, T_2 على الترتيب، كما يتضح في الشكل 7 − 10.

ليكن المماس المشترك $\overleftrightarrow{K_1K_2}$ للدائرتين المعطاتين يتقاطع مع الخط المستقيم $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ الذي يحمل خط المركزين في النقطة R. ولنفرض أن $\overleftrightarrow{T_1T_2}$ يمر بالنقطة R (هذا صحيح هل تستطيع أن تثبته ؟). ثم نرسم المستقيمات الموضحة في الشكل 7 − 10.

إذن، $\Delta U_1O_1T_1, \Delta T_1OT_2, \Delta U_2O_2T_2$ جميعها مثلثات متطابقة الضلعين وجميع زوايا قواعدها متطابقة. وبالتالي $\overleftrightarrow{O_2U_2} \parallel \overleftrightarrow{OO_1}, \overleftrightarrow{OO_2} \parallel \overleftrightarrow{O_1U_1}$. وعليه نستطيع من خلال زوجي المثلثات المتشابهة أن نحصل على :

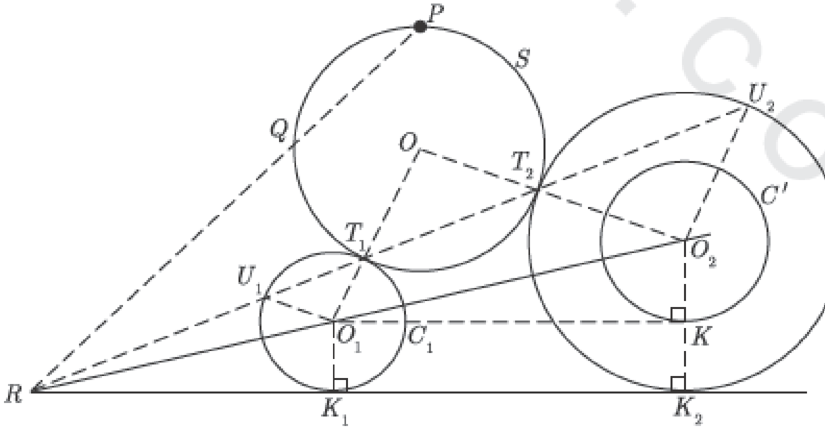
$$\frac{RU_1}{RT_2} = \frac{RO_1}{RO_2} = \frac{RT_1}{RU_2}$$

وبالتالي :

$$RU_1 \cdot RU_2 = RT_1 \cdot RT_2$$

وبالعمل على كل دائرة من الدائرتين المعطاتين نحصل على :

$$RU_1 \cdot RT_1 = RK_1^2 \quad , \quad RU_2 \cdot RT_2 = RK_2^2$$



شكل 7 − 10

إذن:

$$\left(RU_1 \cdot RT_1\right) \cdot \left(RU_2 \cdot RT_2\right) = RK_1^2 \cdot RK_2^2 = \left(RU_1 \cdot RU_2\right) \cdot \left(RT_1 \cdot RT_2\right)$$
$$= \left(RT_1 \cdot RT_2\right)^2$$

وبالتالي فإن:

$$RT_1 \cdot RT_2 = RK_1 \cdot RK_2$$

وهذا يعني أن النقاط الأربع T_1, T_2, K_2, K_1 هي رؤوس رباعي دائري (وكذلك النقاط T_1, T_2, P, Q) كما هو مبين في التدريب رقم 18. إذن:

$$RQ \cdot RP = RT_1 \cdot RT_2 = RK_1 \cdot RK_2$$

ويعد حاصل الضرب السابق معلوماً لأنه يمكن الحصول عليه مباشرة من الدائرتين المعلومتين بمجرد أن ننشئ المماس الخارجي المشترك للدائرتين (لإنشاء هذا المماس نبدأ برسم الدائرة $C' = \left(O_2, O_2K\right)$ حيث طول $\overline{O_2K}$ يساوي الفرق بين نصفي قطري الدائرتين المعطاتين، ثم نرسم مماساً للدائرة C' من النقطة O_1 ، أما المماس المطلوب فيرسم من الأسفل موازياً للمماس $\overleftrightarrow{O_1K}$ بمسافة قدرها O_1K_1).

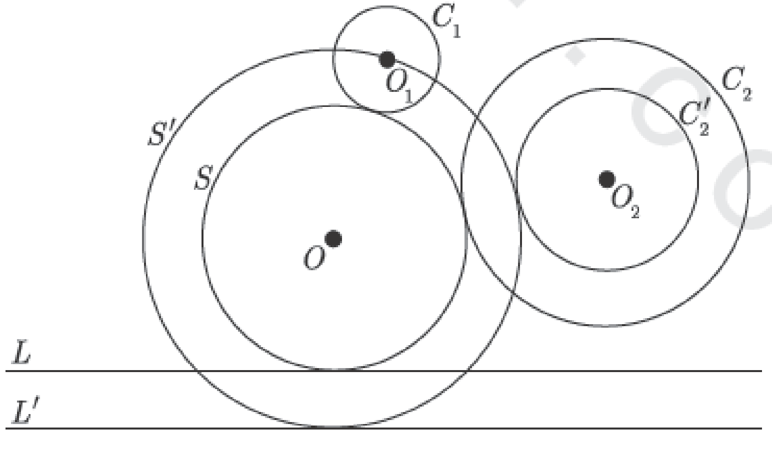
من العلاقة : $RQ \cdot RP = RK_1 \cdot RK_2$ ، نستطيع تحديد موقع النقطة Q على $\overleftrightarrow{RP}$ بإنشاء الرابع المتناسب ؛ وبالتالي تتحول المسألة إلى الإنشاء رقم 5 (PPC) ، حيث النقطتان هما P, Q والدائرة هي إحدى الدائرتين المعطاتين.

لأن الدائرة S يمكن رسمها تمس كلاً من الدائرتين المعطاتين، ولأن النقطة P يمكن لها أن تأخذ عدة مواضع متنوعة بجوار الدائرتين المعطاتين اللتين بدورهما أيضاً يمكن أن تأخذا مواقع متنوعة بجوار بعضهما ؛ ولذا فإن هناك حالات كثيرة ومعينة سنترك للقارئ التحقق منها.

الإنشاء 9 : LCC

لنفرض – كما اعتدنا – أن الحل موجود أمامنا كما هو موضح في الشكل $8-10$. الآن، لنفرض أن لدينا الدائرتين C_1, C_2 اللتين نصفا قطريهما r_1, r_2 على الترتيب. وليكن L هو المستقيم المعطى. فإذا رسمنا الدائرة S' نصف قطرها $\overline{OO_1}$ وتتحد في المركز مع الدائرة الحل S ، فإنه سيكون لدينا " توسيع " للدائرة الحل من الدائرة S إلى الدائرة S' التي تمر بالنقطة O_1 ، وتمس دائرة جديدة نسميها C_2' نصف قطرها يساوي الفرق بين نصفي قطري الدائرتين المعطاتين وتتحد في المركز مع الدائرة C_2. الدائرة S' تمس المستقيم L' الذي بدوره يوازي المستقيم المعطى L ويقع أسفله بمسافة قدرها r_1.

واضح أنه يمكننا أن ننشئ الدائرة C_2' والخط المستقيم L' ؛ وبالتالي يمكننا إنشاء الدائرة S' وذلك بنفس طريقة حل الإنشاء السادس (PLC) حيث النقطة المعطاة هي O_1 ، والمستقيم هو L' ، والدائرة هي C' وهذا يعطينا مباشرة الدائرة S' ، وعليه يكون من السهل الحصول على الدائرة الحل S.



شكل $8-10$

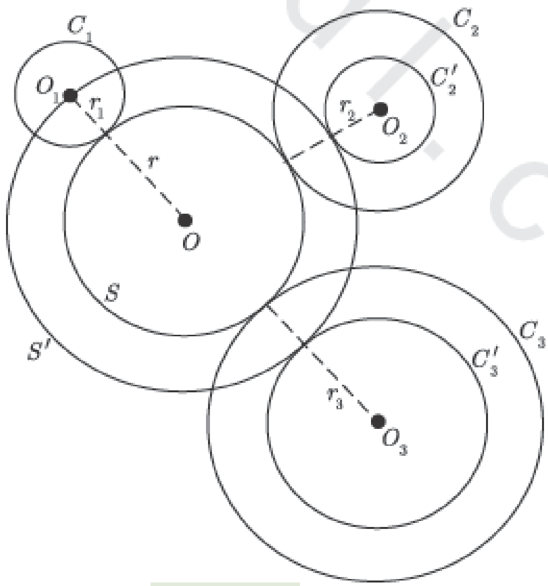
الإنشاء 10 : CCC

هذا هو الإنشاء الأخير في هذه المجموعة من الإنشاءات وهو ما يطلق عليه أيضاً " مسألة أبولونيوس Problem of Apollonius " أو " دائرة أبولونيوس Circle of Apollonius".

أما بخصوص الدوائر الثلاث المعطاة فإنها تأخذ مواقع مختلفة وحالات كثيرة، كل موقع منها يقود لعدد من الحلول المختلفة. (هل تستطيع رسم الدوائر المعطاة بحيث لا يكون أي حل ؟).

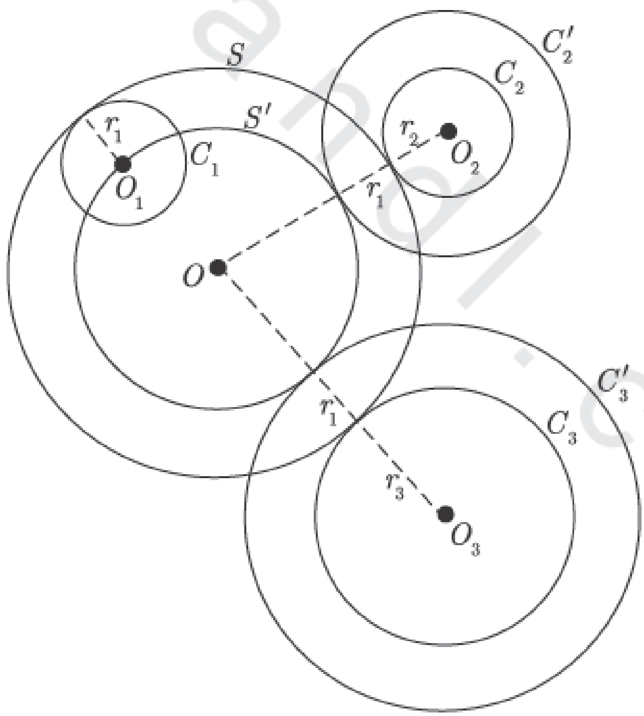
لذا سوف نناقش هنا أكثر تلك الحالات عمومية، وهي أن تكون هذه الدوائر في وضع تباعد، وهذا الوضع يقودنا في العموم إلى ثمانية حلول. سنرسم منها حالة واحدة فقط – الدائرة التي تمس الدوائر الثلاث المعطاة من الخارج. أما الحلول الأخرى ففيها تمس الدائرة الحل بعض الدوائر المعطاة من الخارج وتمس من الداخل البعض الآخر.

والآن لنفرض كالمعتاد أن الحل موجود ومتاح أمامنا. وهو – كما تعودنا – الدائرة S التي نصف قطرها r وتمس الدوائر الثلاث المعطاة C_1, C_2, C_2 التي مراكزها على الترتيب هي O_1, O_2, O_3 وأنصاف أقطارها هي r_1, r_2, r_3 (انظر الشكل 9–10).



شكل 9 – 10

بالأخذ في الاعتبار حل الإنشاء رقم 9 $\left(\mathrm{LCC}\right)$، نستطيع توسعة الحل (الدائرة S). وبالتركيز على الدائرة S' التي نصف قطرها $r + r_1$. ثم بتقليص الدائرة C_1 لتتحول إلى مركزها O_1، وكذلك تتحول الدائرة C_2 إلى الدائرة C_2' بنصف قطر قدره $r_2 - r_1$، وكذلك الدائرة C_3 إلى الدائرة C_3' بنصف قطر قدره $r_3 - r_1$. إذن؛ ستمر الدائرة S' بالنقطة O_1 وتمس الدائرتين C_2', C_3'، وهذا ما يقودنا بكل دقة نحو الإنشاء رقم 8 $\left(\mathrm{PCC}\right)$. فلدينا النقطة O_1، وبسهولة نستطيع إنشاء الدائرتين C_2', C_3'. وعليه؛ فبسهولة أيضاً نحصل على الحل (الدائرة S) وذلك بتقليص الدائرة S' والتي مركزها O ونصف قطر قدرها $OT = OO_1 - r_1$.



شكل 10 − 10

والآن سنرسم حلاً آخر حيث الدائرة S تمسها الدائرة C_1 من الداخل، والدائرتان C_2, C_3 من الخارج وذلك كما يظهر في الشكل $10 - 10$. أما بخصوص الحل فإنه سيسير بصورة كبيرة على نفس النهج السابق، حيث تعتبر الدائرة S' حلاً للإنشاء (PCC)، ولكن في هذه الحالة الدائرة C_2' يكون نصف قطرها $r_2 + r_1$، و الدائرة C_3' يكون نصف قطرها $r_3 + r_1$.

وهكذا نكون قد ناقشنا جميع الحالات العشر، ولكنك - عزيزي القارئ - ستفقد الكثير من الهندسة الشيقة والمثيرة إذا لم تحاول العمل على توضيح جميع الحالات الخاصة التي تنتج من تحريك بعض العناصر المعطاة في الإنشاء حول بعضها البعض، وهذا ما ستراه في التدريبات التالية.

تدريبات

سنشير هنا إلى بعض الحالات الخاصة التي قد تكون موجودة بين المعطيات الموجودة في كل إنشاء، مع العلم أن هذه الحالات الخاصة ستقودنا حتماً إلى حلول مختلفة وإلى عدد مختلف أيضاً من الحلول.

في التدريبات $1 - 4$ ، ناقش الحالات الخاصة التالية في ضوء الإنشاء (PPL).

1. $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ يوازي L (حل واحد).
2. P_1 تقع على L (حل واحد).
3. P_1, P_2 كلتاهما تقع على L.
4. L يقع بين P_1, P_2.

في التدريبات $5 - 9$ ، ناقش بالتفصيل الحالات الخاصة التالية في ضوء الإنشاء (PPL).

5. L_1, L_2 متوازيان، و P تقع على L_1.
6. L_1, L_2 متوازيان، و P تقع بينهما.
7. L_1, L_2 متوازيان، و P تقع خارجهما.
8. L_1, L_2 يتقاطعان ، و P تقع على L_1.
9. L_1, L_2 يتقاطعان في P.

في الإنشاء (LLL ، الشكل $16-9$). التدريبات $17-10$ تشير لبعض التفاصيل التي يطلب منك العمل عليها بنفسك. فحاول إيجاد (وإثبات) هذه العلاقات.

10. الدائرة التي مركزها I هي الدائرة التي تسمى الدائرة الداخلية للمثلث ABC ونصف قطرها r. أما الدوائر التي مراكزها I_a, I_b, I_c ، وهي التي تسمى الدوائر الخارجية لنفس المثلث وأنصاف أقطارها r_a, r_b, r_c على الترتيب. هذه الدوائر الأربع ترتبط بعلاقة ذات صيغة رائعة هي :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

أثبت هذه العلاقة. (إرشاد : استخدم المساحات)

11. أنصاف الأقطار الأربعة التي يتحدث عنها التدريب السابق، يمكن أيضاً التعبير بطريقة أخرى عن العلاقة بينها حيث يمكن لنا مباشرة ومن خلال أطوال أضلاع المثلث وعلاقتها بنصف محيط المثلث $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ، لدينا :

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \qquad r_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{(s-a)}}$$

$$r_b = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{(s-b)}} \qquad r_c = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-a)}{(s-c)}}$$

أثبت الصيغ السابقة (إرشاد : المساحات وخاصة صيغة هيرون التي تنص على
$$\left[\Delta ABC\right]=\sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}$$)

12. أثبت أن مقلوب نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث يساوي مجموع مقلوبات ارتفاعات نفس المثلث. أي أن
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

a.13 : أثبت أن حاصل ضرب أنصاف أقطار دوائر المثلث الأربع يساوي مربع مساحة نفس المثلث.

b : أثبت أن مجموع أنصاف أقطار الدوائر الخارجية للمثلث يساوي مجموع نصف قطر الدائرة الداخلية وأربعة أمثال طول قطر الدائرة المحيطة بالمثلث.

14. أثبت أن كل رأس من رؤوس ΔABC تقع على استقامة واحدة مع كل من مركز الدائرة الداخلية للمثلث ومركز الدائرة الخارجية المقابلة لهذه الرأس. (أي أنه على سبيل المثال أثبت أن A, I, I_a تقع على استقامة واحدة).

15. أثبت أن كل رأس من رؤوس ΔABC تقع أيضا على استقامة واحدة مع مركزي الدائرتين الخارجيتين الواقعتين بينهما. (أي أنه على سبيل المثال، أثبت أن A, I_b, I_c تقع على استقامة واحدة).

16. أثبت أن ارتفاعات $\Delta I_aI_bI_c$ هي نفسها منصفات زوايا ΔABC التي تتقاطع في نقطة مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC.

17. باستخدام النتائج التي توصلت إليها في التدريب رقم 16 أثبت أن النقاط الأربع I, I_a, I_b, I_c تشكل شكلاً رباعياً مرسوماً من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث. هذا يعني أننا إذا اخترنا من تلك النقاط الأربع أي ثلاث نقاط (تشكل مثلثاً) ورسمنا ارتفاعات هذا المثلث فإنها تتقاطع في النقطة الرابعة.

في التدريبات 18,19 أثبت العلاقات التالية في ضوء الإنشاء $\left(\mathrm{PPC}\right)$.

18. كما هو مبين في الشكل الخاص بالإنشاء المذكور، إذا تقاطع كل من $\overleftrightarrow{P_1P_2}, \overleftrightarrow{QR}$ في النقطة A ، $AP_1 \cdot AP_2 = AR \cdot AQ$ ، فأثبت أن النقاط P_1, P_2, R, Q تشكل شكلاً رباعياً دائرياً. (إرشاد: احصل على تناسب من المعادلة، ثم أثبت أن هناك زوجاً من المثلثات المتشابهة، ثم أوجد زاويتين متكاملتين، ثم استخدم الحقيقة التي تقول إن الشكل الرباعي يكون دائرياً إذا وفقط إذا كان به زاويتان متقابلتان متكاملتان).

19. أثبت أنه إذا تماست دائرتان من الخارج، فإن خط المركزين لهما يمر بنقطة تماس الدائرتين.

ناقش كلاً من الحالات الخاصة في التدريبات $31 - 20$. وأثبتها في ضوء الإنشاء (LLC) والشكل الموضح له.

20. L_1, L_2 متوازيان، ويمسان الدائرة C معاً.

21. L_1, L_2 متوازيان، ويقطعان الدائرة C معاً.

22. L_1, L_2 متوازيان، و L_1 يقطع الدائرة C ، و L_2 يوازيها.

23. L_1, L_2 متوازيان، و L_1 يقطع الدائرة C ، و L_2 لا يقطعها.

24. L_1, L_2 متوازيان، و الدائرة C تقع بينهما وتمس L_1 ، ولا تمس L_2 .

25. L_1, L_2 متوازيان، و الدائرة C تقع بينهما ولا تمسهما.

26. L_1, L_2 يتقاطعان في النقطة K التي تقع داخل الدائرة C.

27. L_1, L_2 يتقاطعان في النقطة K التي تقع على الدائرة C.

28. L_1, L_2 يتقاطعان في النقطة K ، و L_1 يمس الدائرة C عند النقطة K .

29. L_1, L_2 يتقاطعان في النقطة K التي تقع خارج الدائرة C التي بدورها تمس كلاً من L_1, L_2 .

30. L_1, L_2 يتقاطعان في النقطة K التي تقع خارج الدائرة C التي تمس بدورها L_1 ، وتقطع L_2.

31. L_1, L_2 يتقاطعان في النقطة K التي تقع خارج الدائرة C التي يقطعها كل من L_1, L_2.

ناقش كلاً من الحالات الخاصة في التدريبات $39 - 32$ ، وأثبتها في ضوء الإنشاء (LCC) والشكل الموضح له.

32. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) و L يقطع كلاً منهما.

33. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) و L يمس الدائرة C_1.

34. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) و L يقطع فقط C_2 ، ولا يقطع C_1.

35. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) و L يمس الدائرة C_2.

36. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) و L لا يقطع أياً منهما.

37. C_1 تمس داخلياً C_2 عند النقطة T. ناقش طبيعة وعدد حلول كل وضع من أوضاع المستقيم L بالنسبة للدائرتين C_1, C_2 كما يظهر في التدريبات $32 - 36$.

38. C_1 ، C_2 تتقاطعان عند النقطة P, Q. ناقش طبيعة وعدد حلول كل وضع من أوضاع المستقيم L بالنسبة للدائرتين C_1, C_2 كما يظهر في التدريبات $32 - 36$.

39. C_1 تمس خارجياً C_2 عند النقطة T. ناقش طبيعة وعدد حلول كل وضع من أوضاع المستقيم L بالنسبة للدائرتين C_1, C_2 كما يظهر في التدريبات $32 - 36$.

في كل حالة من التدريبات $59-40$ ، ارسم الشكل وناقش وقم بإنشاء الحل وذلك في ضوء الإنشاء (CCC).

40. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والتي تقع بدورها أيضاً داخل الدائرة C_3 (دون تماس)

41. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والتي تتماس داخلياً مع الدائرة C_3.

42. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) وكلتاهما تتقاطع مع الدائرة C_3.

43. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والدائرة C_3 تتقاطع مع الدائرة C_2 ولا تتقاطع مع C_1.

44. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والدائرة C_3 تتقاطع مع الدائرة C_2 وتمس الدائرة C_1.

45. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والدائرة C_3 تمس كلتا الدائرتين C_1, C_2.

46. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والدائرة C_3 تتقاطع مع الدائرة C_1 ولا تتقاطع مع C_2.

47. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والدائرة C_3 تتماس خارجياً مع الدائرة C_2.

48. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والدائرة C_3 تقع أيضاً داخل الدائرة C_2 (دون تماس) ولكن تقع خارج C_1.

49. C_1 تقع داخل C_2 (دون تماس) والدائرة C_3 تقع أيضاً داخل الدائرة C_2 (دون تماس) والدائرتان C_1, C_3 تتماسان من الخارج.

50. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_3 تمس الدائرتين C_1, C_2 عند النقطة T_1 (أربع حالات).

51. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_3 تمس الدائرتين C_1,C_2 ولكن ليس عند النقطة T_1 .

52. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_3 تقطع الدائرتين C_1,C_2 عند النقطة T_1 فضلاً عن نقاط أخرى.

53. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_3 تقطع الدائرتين C_1,C_2 ولكن ليس عند النقطة T_1 .

54. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_2 هي الأخرى تتماس داخلياً مع الدائرة C_3 عند النقطة T_2 .

55. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_3 هي الأخرى تتماس داخلياً مع الدائرة C_2 ولكن ليس عند النقطة T_1 وتقطع الدائرة C_1 .

56. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_3 تمس الدائرة C_1 وتقطع الدائرة C_2 .

57. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_3 تتماس خارجياً مع الدائرة C_2 عند النقطة T_2 .

58. C_1 تتماس داخلياً مع C_2 عند النقطة T_1 ، والدائرة C_3 تقع خارج كلتا الدائرتين C_1,C_2 .

59. C_1 تتقاطع مع C_2 عند النقطتين P,Q . ناقش الحالات الممكنة لوضع الدائرة C_3 بالنسبة لكل من الدائرتين المعطاتين والحلول المترتبة على ذلك.