الفصل التاسع

إنشاءات المثلث

مقدمة

من أقدم المسلمات المتعلقة بتطابق المثلثات تلك التي لها طابع إنشائي، فعلى سبيل المثال، نحن نستخدم وسائل الإنشاءات التقليدية (مسطرة غير مدرجة وفرجارين) مع الحقيقة التي تقول إن المثلثين يتطابقان إذا طابق في المثلث الأول ضلعان وزاوية محصورة نظائرهما في المثلث الآخر (SAS)، وعندها نحصل على مثلث وحيد له نفس الضلعان والزاوية المحصورة بينهما، بمعنى أنه إذا حاولنا رسم مثلث آخر بنفس الشروط والمعلومات (ضلعان وزاوية محصورة) فإننا لا محالة وبتكرار نفس خطوات الإنشاء سنحصل في نهاية المطاف على المثلث الذي يوافق المثلث الأول بجميع عناصره، ولن يكون هناك أي اختلاف سوى في وضع المثلث في المستوى. وهكذا نستطيع أن نقول إن المعلومات التي كانت لدينا حول المثلث (SAS) كافية لتعيين أو إنشاء المثلث.

في الماضي كنا نقوم بالإنشاءات التقليدية على الورق، ولكننا الآن وفي وقتنا الحاضر لدينا البرامج الحاسوبية التي تقدم لنا رسومات دقيقة.

الشكل $1-9$ يوضح لنا بعض التفاصيل الخاصة بالمثلث والتي سوف نقوم بدراستها خلال هذا الفصل من خلال قائمة منظمة يدعمها الفهم العام للمقصود بالرموز المستخدمة ودلالاتها في السياق الذي تقع فيه، فعلى سبيل المثال قد نستخدم الرمز b إما للإشارة إلى ضلع مثلث أو إلى اسمه أو إلى طوله. ولعل هذا الغموض يعكس اختيارنا وليس عدم معرفتنا. هدفنا هو الوضوح، وبالتأكيد فكل ما يدعم الدقة والإحكام في المادة العلمية المقدمة سيتم الإشارة إليه ضمن الوقت والمساحة الملائمين لمناقشاتنا.

والآن نستعرض الرموز التي سنستخدمها للدلالة على عناصر المثلث .

أضلاع المثلث : a, b, c.

زوايا المثلث : α, β, γ.

رؤوس المثلث : A, B, C.

ارتفاعات المثلث : h_a, h_b, h_c.

مساقط ارتفاعات المثلث على أضلاعه : H_a, H_b, H_c .

نقطة تقاطع الارتفاعات في المثلث: H .

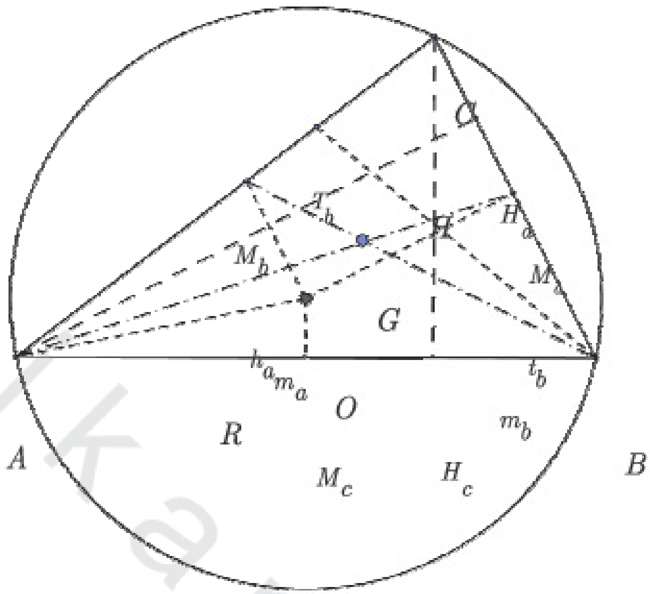
متوسطات المثلث : m_a, m_b, m_c.

نقاط المنتصف لأضلاع المثلث : M_a, M_b, M_c .

نقطة تقاطع المتوسطات في المثلث: G .

منصفات زوايا المثلث : t_a, t_b, t_c.

نقاط تقاطع منصفات الزوايا مع أضلاع المثلث : T_a, T_b, T_c .



شكل $9-1$

مركز الدائرة الداخلية للمثلث (نقطة تقاطع المنصفات الداخلية لزوايا المثلث) : I.

نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث : r.

مركز الدائرة المحيطية بالمثلث (نقطة تقاطع الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث) : O.

نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث : R.

نصف مجموع أطوال أضلاع المثلث $\frac{1}{2}\left(a+b+c\right)$: s.

لاحظ أننا استخدمنا الحروف الصغيرة في العموم للتعبير عن قياس الطول، والحروف الكبيرة تمثل النقاط، ويستثنى من ذلك استخدام الحرف الكبير R للتعبير عن طول نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث، وذلك اتباعاً للمألوف في هذا المقام.

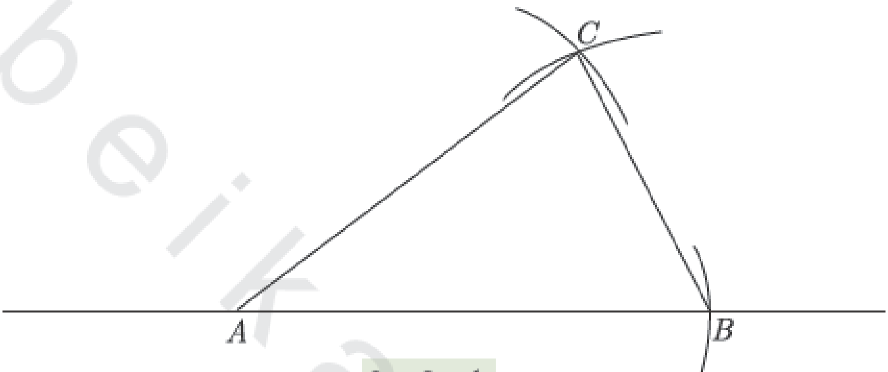
الكثيرون يساورهم القلق من دراسة الهندسة بسبب هذه القائمة الطويلة من الرموز والعلاقات، ولكنك بالفعل تعرف الكثير من العلاقات الخاصة بالمثلث (مثل

مجموع زوايا المثلث الداخلية تساوي 180°)، وأخرى نتوقع أنك لا تعرفها، وفي سبيلك لتعلمها (مثل نظرية $13-7$ والتي تتحدث عن العلاقة بين مقلوب طول نصف قطر الدائرة الداخلية يساوي مجموع مقلوبات أطوال ارتفاعات المثلث، $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$) . بالطبع، سنستخدم كل ما نحتاج إليه من العلاقات في إنشاءاتنا، وسنقدم لتلك العلاقات براهين موجزة إذا اقتضى الأمر، وعليك أن تسعى وراء هذه البراهين لاستكمالها من خلال خبراتك أو البحث عنها في المراجع الأكثر شمولاً، وعندها قد تجد بعض العلاقات الجديدة عليك.

سنعرض في هذا الجزء من الكتاب إنشاءات المثلث في مستويين، الأول منها، نفترض فيه وجود مثلث في مكان ما، وقام أحد الأشخاص بتسليم بعض أجزائه إلينا، وعندها تصبح وظيفتنا إعادة إنشائه ليكون مثلثنا الأصلي. وفي هذا المستوى سنفترض أن الحل موجود ويكون دورنا إيجاده. وفي هذه الحالة، عادة ما تكون طريقتنا هي محاولة إيجاد سلسلة من الخطوات والعلاقات المناسبة التي من شأنها إعادة إنشاء المثلث.
أما في المستوى الثاني، فليس من الضروري أن نفترض وجود الحل، وسيكون علينا دراسة المعطيات التي لدينا في ضوء احتمالية وجوده، وإذا كان الأمر كذلك، فإننا يجب أن نحدد العلاقات بين المعلومات المعطاة وطبيعة وعدد الحلول الممكنة. وسنحاول توضيح الطريقتين أو النهجين في حل تمرين أو مشكلة مألوفة هي إنشاء مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة a,b,c .

فبالعمل من خلال المستوى الأول، فإذا فرضنا أنه بالفعل يملك أحدهم ΔABC ، وأعطانا فقط أطوال أضلاعه الثلاثة a,b,c ، فإننا وبسرعة سنعيد إنشاء هذا المثلث كالتالي : فعلى أي خط مستقيم سنحدد نقطة لتكن الرأس A ، وبرسم القوس $\left(A,c\right)$ يقطع المستقيم في النقطة B ، إذن $AB=c$ (الشكل $2-9$)، ثم

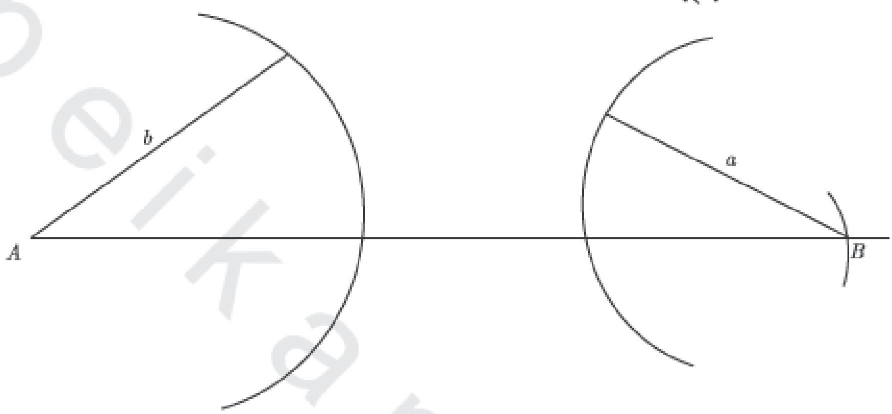
نرسم القوسين $(A,b),(B,a)$ ليتقاطعا في النقطة C ، ثم نرسم كلاً من $\overline{AC},\overline{BC}$ ، فنحصل على المثلث المطلوب ΔABC .



شكل $2-9$

أما عند العمل من خلال المستوى الثاني لهذه المشكلة فلن نفرض أن الحل موجود ولكن كما يقولون " دعونا نفحص الحصان الهدية من أسنانه "، فعلى سبيل المثال، إذا كانت الأطوال المعطاة هي $2,3,6$ فحتماً لن يأخذ ذلك منك كثيراً لتصل إلى عدم إمكانية رسم مثلث باستخدام هذه الأطوال. وأي محاولة لتنفيذ مثل الخطوات السابقة ستثبت لك استحالة تقاطع القوسين $(A,b),(B,a)$ ، وبالتالي ليس لدينا الرأس الثالثة C (الشكل $3-9$)، وبالتالي يقودنا ذلك للشرط الأساسي الذي يقول إن أي مجموعة من ثلاثة أطوال تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث إذا تحقق الشرط : مجموع أي طولين منهما أكبر من طول الضلع الثالث، وهذا ما يطلق عليه متباينة المثلث triangle inequality، والتي إذا لم تتحقق فلن يكون لدينا حل (لا يوجد لدينا مثلث)، وإذا تحقق هذا الشرط فإنه باستطاعتنا إنشاء مثلث، وفي واقع الأمر، القوسان $(A,b),(B,a)$ يتقاطعان في

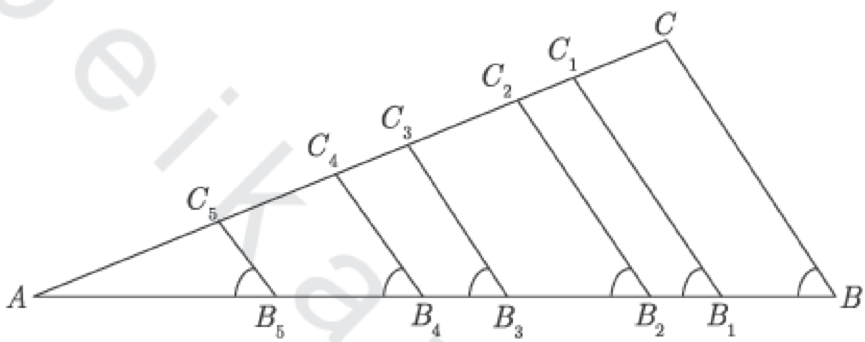
نقطتين C, C' ، إحداهما فوق والأخرى تحت $\overleftrightarrow{AB}$ ، ولذا سنحصل على مثلثين متطابقين $\Delta ABC, \Delta ABC'$ ، ولذا لدينا حل واحد لهذه المشكلة (ماذا يحدث عندما : $a + b = c$ ؟).



شكل $3-9$

مناقشة إمكانية وجود حل، وعدد الحلول وعلاقتها بالمعلومات المعطاة لنا يمكن أن تقودنا إلى موضوعات رياضية أكثر عمقاً وتشويقاً، وسندخل معا في هذه المناقشة في أوراقنا القادمة، ونحن ننصح بمتابعة مثل هذه الأفكار قدر الإمكان. وهناك صعوبة أخرى قد تنشأ على المستويين الخاصين بالإنشاءات، فعلى سبيل المثال، إذا أعطينا قياسات زوايا المثلث الثلاث α, β, γ ، وإذا كانت هذه القياسات من مثلث مرسوم بالفعل، ومع معرفتنا بأن مجموع قياسات زوايا المثلث يجب أن يكون قياس زاوية مستقيمة، والذي يتطلب أن تكون قياس واحدة من الزوايا الثلاث تتكامل مع مجموع قياسي الزاويتين الباقيتين. لذا؛ فمعرفة قياس أي زاويتين في مثلث تكفي لمعرفة قياس الزاوية الثالثة. وتسمى مجموعة المعلومات التي لا نحتاج أن تُعطى لنا لأننا نستطيع إيجادها بأنفسنا من المعلومات الباقية باسم مجموعة الفائض redundant set. وفي حالتنا

تلك، أعطينا في الأساس بعض المعلومات عن أي زاويتين من زوايا المثلث، لنفرض أنهما α, β ، واللتين (فعلياً) أتيا من ΔABC ، ولكن يمكن كذلك أن يأتيا من عدد غير منته من المثلثات المتشابهة $\Delta AB_1C_1, \Delta AB_2C_2, \Delta AB_3C_3, \ldots$ (الشكل $4-9$).



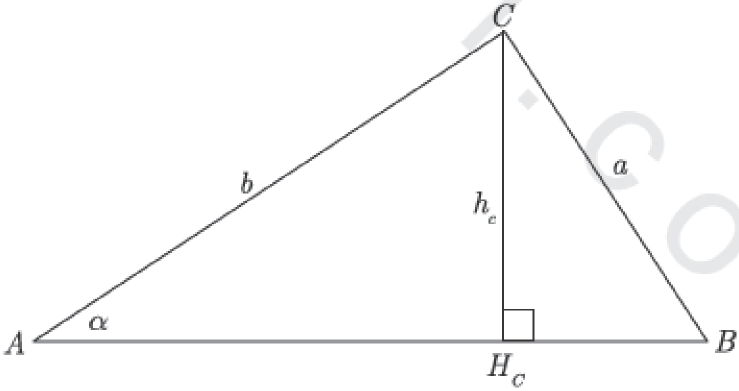
شكل $4-9$

وعلى الجانب الآخر، إذا بدأنا بأي ثلاث زوايا $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ ، فمن الممكن ألا نجد مثلثاً زواياه هي $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ مالم يكن مجموع قياساتها هو قياس زاوية مستقيمة. ينبغي أن يكون واضحاً أنه من أجل إنشاء أو إعادة إنشاء أي مثلث معين، يجب أن نملك ثلاثة معطيات مستقلة حول المثلث، وأي ارتباط بين هذه المعطيات قد يصنع منها مجموعة فائض، وبالتالي لا نستطيع تعيين المثلث.

لاحظ أن المجموعة $\{a, b, c\}$ مستقلة لأن اختيار a, b لا يعني تعيين c. بالطبع نحن ملزمون بمتباينة المثلث والتي يمكن صياغتها على الصورة $a - b < c < a + b$ (هل تستطيع أن تثبت كيف استنتجنا المتباينة الثانية من المتباينة الأولى ؟). أما المجموعة $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ فهي مجموعة فائض مألوفة.

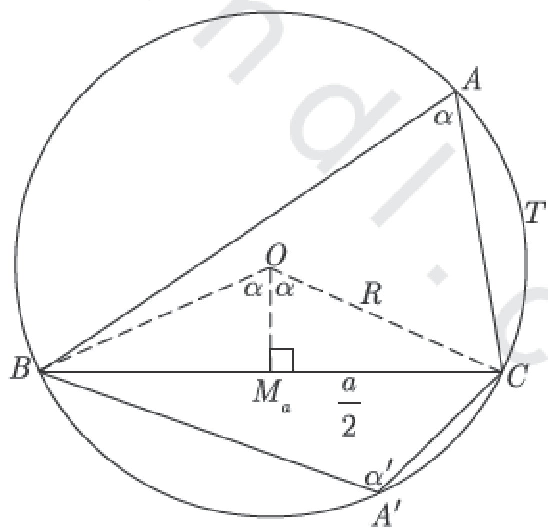
والآن، سوف نعير انتباهنا إلى اثنتين من المجموعات الفائضة غير المألوفة. لأن المثلث القائم الزاوية يتم تعيينه عندما نعرف طول وتره وإحدى زاويتيه الحادتين، فهذا يعني أن المجموعة $\{\alpha, b, h_c\}$ مجموعة فائض. من الشكل $5-9$ ، ينبغي أن يكون واضحاً أنه يمكننا أن ننشئ المثلث القائم ACH_C من أي عنصرين من عناصر المجموعة $\{\alpha, b, h_c\}$. فالرأس B يمكننا أن نأخذها في أي مكان على $\overleftrightarrow{AH_C}$ ، ولذا فبالتأكيد لا يمكننا تحديد ΔABC على وجه الخصوص. وفي المثلث القائم لدينا أيضاً $h_c = b\sin\alpha$ ؛ لذا المجموعة $\{\alpha, b, h_c\}$ مجموعة فائض، أي إذا أعطينا $\{\alpha, b\}$ فإننا لا نحتاج أن تكون ضمن معطياتنا h_c لأنه يمكننا الحصول عليها بأنفسنا.

ويكون لدينا وضع مماثل إذا كانت معطياتنا $\{\alpha, \beta, h_c\}$ والتي هي الأخرى مجموعة فائض (اعتبر المثلث القائم BCH_C) لا نستطيع بها تحديد مثلث وحيد ABC .



شكل $5-9$

مجموعة فائض أخرى أقل وضوحاً هي $\{a,\alpha,R\}$ ، ولنفرض - كما في الشكل 6 – 9 - أننا رسمنا الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، وأن نصفي قطر هذه الدائرة هما $\overline{OB},\overline{OC}$ ، وأن $\overline{OM_a}$ ارتفاع المثلث المتطابق الضلعين OBC ، ومن علاقة الزوايا المحيطية والمركزية، فإنه إذا كانت $\angle\alpha$ حادة، فإن $m\angle BOC=2m\angle\alpha$ ، أما إذا كانت $\angle\alpha$ منفرجة؛ فإن $m\angle BOC$ تساوي ضعف قياس $\angle\alpha'$ ، ولكن في ΔOCM_a القائم نحصل على $\frac{a}{2}=R\sin\alpha$ ، وبالتالي في كلتا الحالتين $a=2R\sin\alpha$ ، ومن خلال العلاقة السابقة يتضح بسهولة أن حصولنا على أي عنصرين من عناصر المجموعة $\{a,\alpha,R\}$ يجعلنا نحصل على العنصر الثالث من المجموعة، أي أن المجموعة $\{a,\alpha,R\}$ تعتبر مجموعة فائض.



شكل 6 – 9

وفيما يلي نقدم قائمة منهجية وشاملة لجميع المجموعات ذات ثلاث عناصر مستقلة في المثلث والتي قد تحدد مثلثاً والبالغ عددها 179 مجموعة، وبتغيير اختيار العناصر الواردة يمكننا الحصول على قائمة مجموعات أخرى بطرق مختلفة، وبالتالي فالمجموعة رقم 2 في القائمة التالية $\{a, b, \alpha\}$ والتي يتم تفسيرها لفظيا على الصورة " ضلعان وزاوية تقابل أحدهما " يمكن أن نقدمها باختيارات أخرى سواء أضلاع أو زوايا في نفس المثلث طالما نحقق نفس المفهوم اللفظي السابق وذلك مثل : $\{a, b, \beta\}$ ، $\{a, c, \alpha\}$ ، $\{a, b, \gamma\}$ ، $\{a, b, \beta\}$ أو $\{a, b, \gamma\}$ ، ولكنك دائما عند إنشائك أو تعاملك مع مشكلة من هذا النوع، سوف تجدها دائما ضمن القائمة التالية وذلك بكتابة العناصر المعطاة بالترتيب الذي استخدمناه في كل مجموعة وهو كالتالي، الأضلاع، الزوايا، الارتفاعات، المتوسطات، منصفات الزوايا، نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث، نصف قطر الدائرة الداخلية ونصف المحيط.

1. $\{a, b, c\}$
2. $\{a, b, \beta\}$
3. $\{a, b, \gamma\}$
4. $\{a, \alpha, \beta\}$
5. $\{a, b, h_a\}$
6. $\{a, b, h_c\}$
7. $\{a, \alpha, h_a\}$
8. $\{a, \alpha, h_b\}$
9. $\{a, \beta, h_a\}$

17. $\{a, b, m_a\}$
18. $\{a, b, m_c\}$
19. $\{a, \alpha, m_a\}$
20. $\{a, \alpha, m_b\}$
21. $\{a, \beta, m_a\}$
22. $\{a, \beta, m_b\}$
23. $\{a, \beta, m_c\}$
24. $\{\alpha, \beta, m_a\}$
25. $\{a, h_a, m_a\}$

33. $\{\alpha, h_b, m_b\}$
34. $\{\alpha, h_b, m_c\}$
35. $\{h_a, h_b, m_a\}$
36. $\{h_a, h_b, m_c\}$
37. $\{a, m_a, m_b\}$
38. $\{a, m_a, m_c\}$
39. $\{\alpha, m_a, m_b\}$
40. $\{\alpha, m_b, m_c\}$
41. $\{h_a, m_a, m_b\}$

49. $\{a, \beta, t_b\}$
50. $\{a, \beta, t_c\}$
51. $\{\alpha, \beta, t_a\}$
52. $\{a, h_a, t_a\}$
53. $\{a, h_a, t_b\}$
54. $\{a, h_b, t_a\}$
55. $\{a, h_b, t_b\}$
56. $\{a, h_b, t_c\}$
57. $\{\alpha, h_a, t_a\}$

10. $\{a,\beta,h_b\}$
11. $\{\alpha,\beta,h_a\}$
12. $\{a,h_a,h_b\}$
13. $\{a,h_b,h_c\}$
14. $\{\alpha,h_a,h_b\}$
15. $\{\alpha,h_a,h_c\}$
16. $\{h_a,h_b,h_c\}$

26. $\{a,h_a,m_b\}$
27. $\{a,h_b,m_a\}$
28. $\{a,h_b,m_b\}$
29. $\{a,h_b,m_c\}$
30. $\{\alpha,h_a,m_a\}$
31. $\{\alpha,h_a,m_b\}$
32. $\{\alpha,h_b,m_a\}$

42. $\{h_a,m_b,m_c\}$
43. $\{m_a,m_b,m_c\}$
44. $\{a,b,t_a\}$
45. $\{a,b,t_c\}$
46. $\{a,\alpha,t_a\}$
47. $\{a,\alpha,t_b\}$
48. $\{a,\beta,t_a\}$

58. $\{\alpha,h_a,t_b\}$
59. $\{\alpha,h_b,t_a\}$
60. $\{\alpha,h_b,t_b\}$
61. $\{\alpha,h_b,t_c\}$
62. $\{h_a,h_b,t_a\}$
63. $\{h_a,h_b,t_c\}$
64. $\{a,m_a,t_a\}$

65. $\{a,m_a,t_b\}$
66. $\{a,m_b,t_a\}$
67. $\{a,m_b,t_b\}$
68. $\{a,m_b,t_c\}$
69. $\{\alpha,m_a,t_a\}$
70. $\{\alpha,m_a,t_b\}$
71. $\{\alpha,m_b,t_a\}$
72. $\{\alpha,m_b,t_b\}$
73. $\{\alpha,m_b,t_c\}$
74. $\{h_a,m_a,t_a\}$
75. $\{h_a,m_a,t_b\}$
76. $\{h_a,m_b,t_a\}$
77. $\{h_a,m_b,t_b\}$

81. $\{a,t_a,t_b\}$
82. $\{a,t_b,t_c\}$
83. $\{\alpha,t_a,t_b\}$
84. $\{\alpha,t_b,t_c\}$
85. $\{h_a,t_a,t_b\}$
86. $\{h_a,t_b,t_c\}$
87. $\{m_a,t_a,t_b\}$
88. $\{m_a,t_a,t_c\}$
89. $\{t_a,t_b,t_c\}$
90. $\{a,b,R\}$
91. $\{a,\beta,R\}$
92. $\{\alpha,\beta,R\}$
93. $\{a,h_a,R\}$

97. $\{h_a,h_b,R\}$
98. $\{a,m_a,R\}$
99. $\{a,m_b,R\}$
100. $\{\alpha,m_a,R\}$
101. $\{\alpha,m_b,R\}$
102. $\{h_a,m_a,R\}$
103. $\{h_a,m_b,R\}$
104. $\{m_a,m_b,R\}$
105. $\{a,t_a,R\}$
106. $\{a,t_b,R\}$
107. $\{\alpha,t_a,R\}$
108. $\{\alpha,t_b,R\}$
109. $\{h_a,t_a,R\}$

113. $\{t_a,t_b,R\}$
114. $\{a,b,r\}$
115. $\{a,\alpha,r\}$
116. $\{a,\beta,r\}$
117. $\{\alpha,\beta,r\}$
118. $\{a,h_a,r\}$
119. $\{a,h_b,r\}$
120. $\{\alpha,h_a,r\}$
121. $\{\alpha,h_b,r\}$
122. $\{h_a,h_b,r\}$
123. $\{a,m_a,r\}$
124. $\{a,m_b,r\}$
125. $\{\alpha,m_a,r\}$

78. $\{h_a, m_b, t_c\}$
79. $\{m_a, m_b, t_a\}$
80. $\{m_a, m_b, t_c\}$

94. $\{a, h_b, R\}$
95. $\{\alpha, h_a, R\}$
96. $\{\alpha, h_b, R\}$

110. $\{h_a, t_b, R\}$
111. $\{m_a, t_a, R\}$
112. $\{m_a, t_b, R\}$

126. $\{\alpha, m_b, r\}$
127. $\{h_a, m_a, r\}$
128. $\{h_a, m_b, r\}$

129. $\{m_a, m_b, r\}$
130. $\{a, t_a, r\}$
131. $\{a, t_b, r\}$
132. $\{\alpha, t_a, r\}$
133. $\{\alpha, t_b, r\}$
134. $\{h_a, t_a, r\}$
135. $\{h_a, t_b, r\}$
136. $\{m_a, t_a, r\}$
137. $\{m_a, t_b, r\}$
138. $\{t_a, t_b, r\}$
139. $\{a, R, r\}$
140. $\{\alpha, R, r\}$
141. $\{h_a, R, r\}$
142. $\{m_a, R, r\}$
143. $\{t_a, R, r\}$
144. $\{a, b, s\}$

145. $\{a, \alpha, s\}$
146. $\{a, \beta, s\}$
147. $\{\alpha, \beta, s\}$
148. $\{a, h_a, s\}$
149. $\{a, h_b, s\}$
150. $\{\alpha, h_a, s\}$
151. $\{\alpha, h_b, s\}$
152. $\{h_a, h_b, s\}$
153. $\{a, m_a, s\}$
154. $\{a, m_b, s\}$
155. $\{\alpha, m_a, s\}$
156. $\{\alpha, m_b, s\}$
157. $\{h_a, m_a, s\}$
158. $\{h_a, m_b, s\}$
159. $\{m_a, m_b, s\}$
160. $\{a, t_a, s\}$

161. $\{a, t_b, s\}$
162. $\{\alpha, t_a, s\}$
163. $\{\alpha, t_b, s\}$
164. $\{h_a, t_a, s\}$
165. $\{h_a, t_b, s\}$
166. $\{m_a, t_a, s\}$
167. $\{m_a, t_b, s\}$
168. $\{t_a, t_b, s\}$
169. $\{a, R, s\}$
170. $\{\alpha, R, s\}$
171. $\{h_a, R, s\}$
172. $\{m_a, R, s\}$
173. $\{t_a, R, s\}$
174. $\{a, r, s\}$
175. $\{\alpha, r, s\}$
176. $\{h_a, r, s\}$

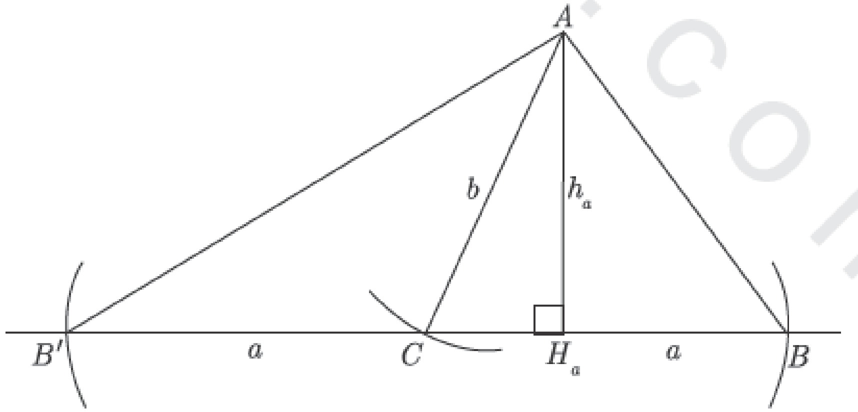
177. $\{m_a, r, s\}$
178. $\{t_a, r, s\}$
179. $\{R, r, s\}$

بواسطة القائمة السابقة، نستطيع الحصول على 179 مسألة إنشاءات، وبالطبع أنت مدعو للغوص في تفاصيلها، وسنقوم بتنفيذ الكثير من هذه الإنشاءات في الجزء الباقي من هذا الفصل وإثباتها بطرق وآليات مفيدة تسهم بلا شك في تطوير المفاهيم والمعلومات الهندسية، وبخاصة غير الشائعة منها. وسوف نناقش بشكل كامل في الجزء الأول من هذه الإنشاءات، الإمكانية وعدد الحلول حسب الشروط المختلفة، وفي باقي المسائل سنترك للقارئ هذا العمل الشيق (والأكثر صعوبة).

بعض الإنشاءات المختارة للمثلث

الإنشاء رقم 5 $\{a,b,h_a\}$

لنأخذ النقطة H_a على أي خط مستقيم، ونرسم منها العمود H_aA الذي طوله h_a (انظر الشكل 7 – 9)، وليقطع القوس (A,b) هذه الخط الأساسي في النقطة C ، والقوس (C,a) هذه الخط الأساسي في النقطتين B,B'. إذن لدينا الحلان $\Delta ABC,\Delta AB'C$ ، وكل منهما له نفس المعطيات $\{a,b,h_a\}$.



شكل 7 – 9

المناقشة

لأن القوس (A,b) يجب أن يقطع الخط الأساسي لنحصل على النقطة C ، يكون الشرط اللازم لوجود حل هو $b \geq h_a$. لأن القوس سيقطع الخط مرة أخرى في النقطة C' (على يمين النقطة H_a)، وكذلك سنحصل أيضاً على زوج آخر من الحلول ، ولكن هذا الزوج هو صورة بالانعكاس للحلول التي لدينا بالفعل. وفي احتمال آخر إذا أخذنا العمود عند النقطة H_a فوق وأسفل الخط الأساسي ، فإننا مرة أخرى نحصل على صورة بالانعكاس للحلول السابقة.

وفي عملنا اللاحق لن نناقش الحلول المتماثلة أو التي نحصل عليها بالانعكاس ، والتي لا تسهم بأي جديد.

إذا كان $h_a = b$ فإنه سيكون لدينا تقاطع واحدة بين القوس (A,b) والخط الأساسي عند النقطة H_a نفسها والتي هي أيضا نقطة التماس لهذا القوس ، وفي هذه الحالة يكون المثلثان ACB, ACB' قائمين متطابقين، أي أن لدينا حلاً واحداً في حالة $h_a = b$. وقد رأينا أن لدينا حلين عندما $b > h_a$ بصرف النظر عن اختيارنا لمقدار طول a. إذن في النهاية ؛ الشرط $b \geq h_a$ شرط لازم وكاف لأي حل لهذه المسألة، فحالة التساوي تقودنا لحل واحد وحالة عدم التساوي تقودنا لحلين اثنين .●

الإنشاء رقم 7 $\{a, \alpha, h_a\}$

لحل هذه المسألة، من الأفضل استخدام تقاطع المحال الهندسية، (انظر الشكل $8-9$). فعلى أي خط مستقيم، ننشئ $BC = a$. إذن، أحد المحال الهندسية للرأس A هو الخط المستقيم L_1 الذي يوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ويبعد عنه مسافة قدرها h_a ، وبالعمل على محل هندسي آخر للرأس A ، وهو جزء الدائرة التي تمر بالنقطتين B,C ونقطة

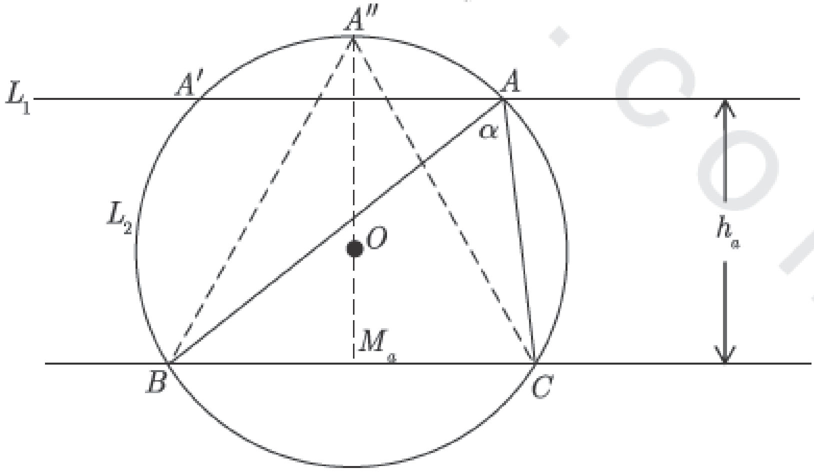
ثالثة "A مقابلة لـ $\overleftrightarrow{BC}$ من جهة L_1 بحيث يكون $m\angle BA''C = \alpha$. باعتبار نقطتي تقاطع هذه الدائرة مع L_1 في A, A' ، نجد أن كلاً $\Delta ABC, \Delta A'BC$ حل ممكن.

المناقشة

في هذه المسألة، سنحصل على الحلول إذا وفقط إذا تقاطع المحلان الهندسيان، وهذا التقاطع سيحدث إذا كانت h_a "ليست كبيرة جداً". لاحظ أيضاً المثلث "الأطول" $\Delta A''BC$ ، وفي المثلث القائم

$\Delta A''BM_a$ والذي فيه $m\angle BA''M_a = \frac{1}{2}\alpha$ ، $BM = \frac{1}{2}a$.

المشكلة الأصلية لها حل إذا وفقط إذا تحقق الشرط $h_a \le A''M_a$ ، والذي يتحول من العلاقات في المثلث القائم إلى $h_a \le \frac{1}{2}a \cot \frac{1}{2}\alpha$ ، وتأتي حالة التساوي عندما L_1 يمس الدائرة عند النقطة A'' ، ويكون الحل الوحيد هو المثلث المتطابق الضلعين $A''BC$ ، وفي حالة عدم التساوي نحصل على المثلثين المتطابقين $\Delta ABC, \Delta A'BC$ الذين هما في الأساس حل واحد.

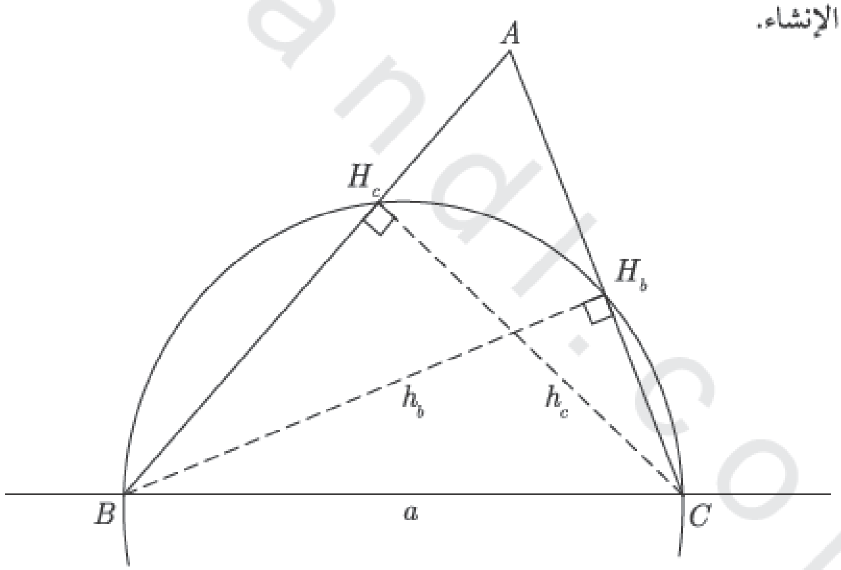


شكل 8 – 9

الإنشاء رقم 13 $\{a, h_b, h_c\}$

على أي خط مستقيم أنشئ $BC = a$ ، ونصف دائرة قطرها $\overline{BC}$ (انظر الشكل $9 - 9$). إذن نصف الدائرة محل هندسي لكل من H_b, H_c لأن كلاً من $\angle BH_bC, \angle BH_cC$ قائمة. والآن ، لنرسم القوس (B, h_b) ليقطع نصف الدائرة في H_b ، ونرسم القوس (C, h_c) ليقطع نصف الدائرة في H_c ، وأخيراً نرسم $\overleftrightarrow{BH_c}, \overleftrightarrow{CH_b}$ ليتقاطعا في النقطة A ليعطينا ذلك الحل ΔABC.

سنترك المناقشة والتوضيح لك أيها القارئ مع إرشاد بأنك يجب أن تفحص نسبية الأطوال a, h_a, h_c والتي تعين نقاط التقاطع للأقواس المختلفة التي تدخل في الإنشاء.



شكل $9 - 9$

الإنشاء رقم 16 في $\{h_a, h_b, h_c\}$

الحل الأول:

لأن مساحة ΔABC تساوي $\frac{1}{2}ah_a$ وتساوي أيضاً $\frac{1}{2}bh_b$ ، $\frac{1}{2}ch_c$. إذن،

$$ah_a = bh_b = ch_c$$

ومن ذلك نستطيع كتابة المعادلات :

$$a : \frac{1}{h_a} = b : \frac{1}{h_b} = c : \frac{1}{h_c}$$

وتخبرنا المعادلات السابقة أن أطوال أضلاع المثلث تتناسب عكسيا مع ارتفاعات المثلث المناظرة لها . وبالعكس يمكننا الوصول للمعادلات :

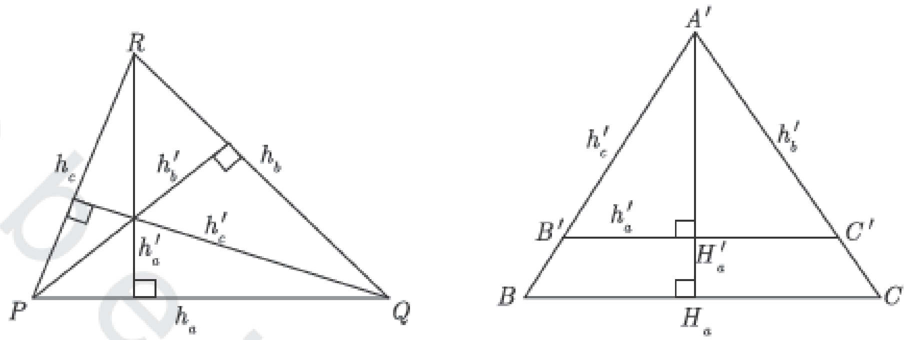
$$h_a : \frac{1}{a} = h_b : \frac{1}{b} = h_c : \frac{1}{c}$$

إذا رسمنا مثلثاً جديداً وليكن ΔPQR والذي أطوال أضلاعه h_a, h_b, h_c (انظر الشكل $10 - 9$) وأطوال ارتفاعاته h'_a, h'_b, h'_c ، والتي هي أيضاً تتناسب عكسياً مع أطوال أضلاع المثلث h_a, h_b, h_c :

$$h_a : \frac{1}{h'_a} = h_b : \frac{1}{h'_b} = h_c : \frac{1}{h'_c}$$

ولكننا يمكن أن نرى أن أطوال هذه الارتفاعات الجديدة سوف تتناسب مباشرة مع أطوال أضلاع المثلث الأصلي :

$$a : h'_a = b : h'_b = c : h'_c$$



شكل $10-9$

إذن المثلث الجديد الذي أطوال أضلاعه h_a', h_b', h_c' يشابه المثلث المطلوب ABC . وعليه تكون خطوات الإنشاء كالتالي :

(1) أنشئ ΔPQR والذي أطوال أضلاعه هي الارتفاعات المعطاة h_a, h_b, h_c .

(2) أوجد أطوال الارتفاعات h_a', h_b', h_c' للمثلث PQR .

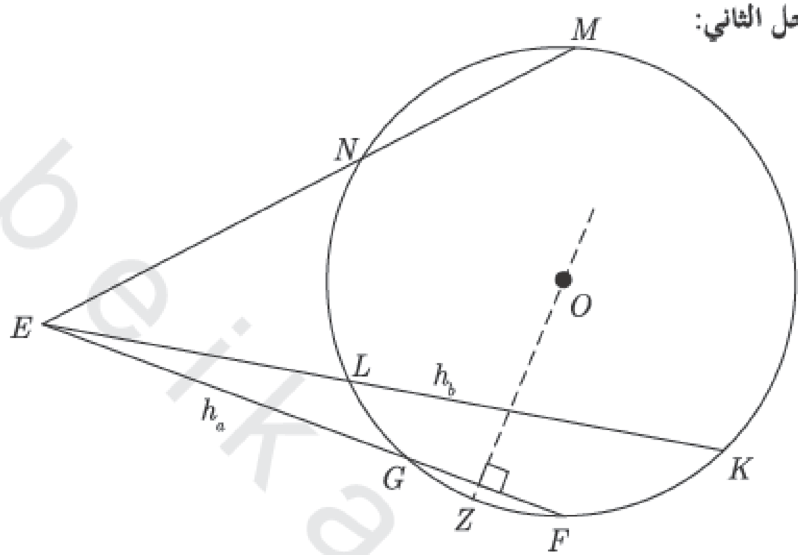
(3) أنشئ $\Delta A'B'C'$ والذي أطوال أضلاعه هي الارتفاعات التي أتينا بها تواً. ($\Delta A'B'C'$ يشابه المثلث المطلوب ABC) . (انظر الشكل $10-9$) .

(4) أنشئ أي ارتفاع للمثلث $\Delta A'B'C'$ وليكن $\overline{A'H_a'}$ ثم أنشئ عليه $\overline{A'H_a}$ والذي يطابق طول الارتفاع المعطى h_a .

(5) من النقطة H_a نرسم عموداً إلى $A'H_a$ يتقاطع مع $\overleftrightarrow{A'B'}, \overleftrightarrow{A'C'}$ في النقطتين B,C .

إذن ، $\Delta A'BC$ هو المثلث المطلوب .●

الحل الثاني:



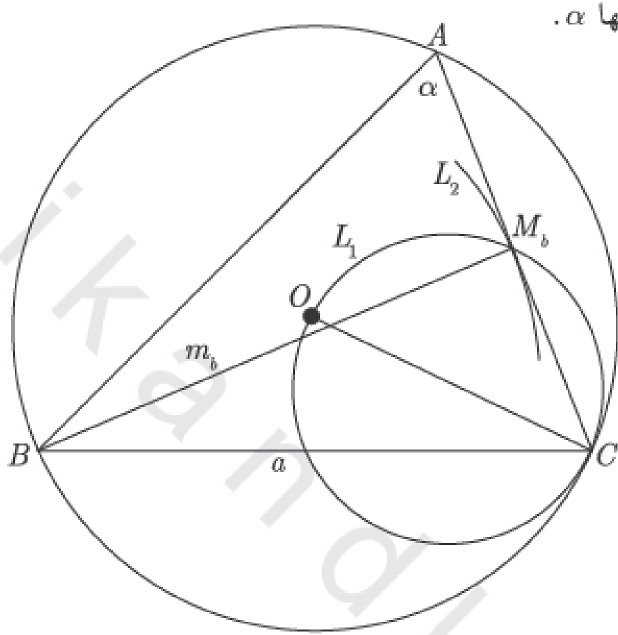
شكل $11-9$

إذا رسمنا من النقطة E التي تقع خارج الدائرة O ، القواطع الموضحة بالشكل $11-9$ ، إذن : $EF \cdot EG = EK \cdot EL = EM \cdot EN$ ، وكل من هذه المقادير يساوي أياً من المقادير المتساوية $ah_a = bh_b = ch_c$ ، حيث اعتبرنا $EF = h_a, EK = h_b, EM = h_c$ ، و $EG = a', EL = b', EN = c'$ كما في الشكل $11-9$. إذن لدينا $a'h_a = b'h_b = c'h_c$ ثم بالقسمة نحصل على $a : a' = b : b' = c : c'$. وعليه يكون المثلث الذي أطواله a', b', c' مشابهاً للمثلث المطلوب (المثلث الحل) ABC. ثم نكمل الإنشاء بعمل المثلث $A'B'C'$ والذي أضلاعه تطابق كلاً من $\overline{EG}, \overline{EL}, \overline{EN}$ ، ثم نكمل كما في الحل الأول .

في كلتا الحالتين $\Delta A'B'C'$ سوف يشابه المثلث المطلوب (المثلث الحل) ABC.●

الإنشاء رقم 20 $\{a, \alpha, m_b\}$

على أي خط مستقيم أنشئ $BC = a$ ، ثم أنشئ قوساً دائرياً BAC يحتوي زاوية قياسها α .

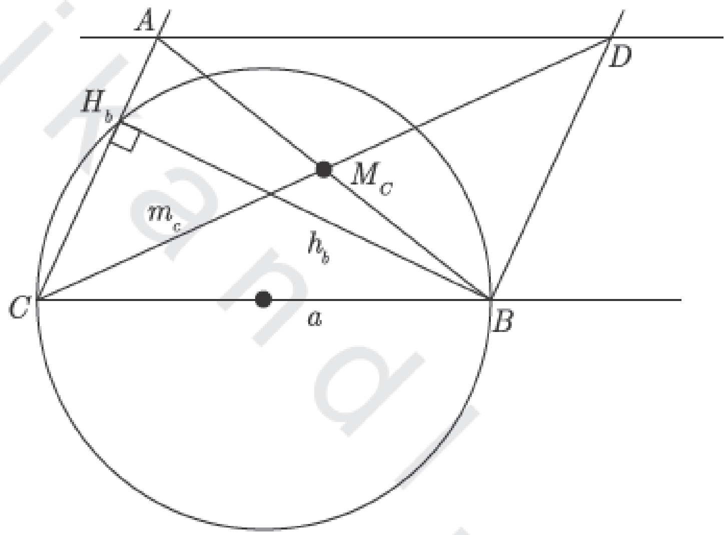


شكل 12 − 9

بالطبع، يكون هذا القوس هو المحل الهندسي للرأس A ، وهو في ذات الوقت جزء من الدائرة O المحيطة بالمثلث ABC. وبعد ذلك، أنشئ الدائرة L_1 التي قطرها $\overline{OC}$ ، والتي هي أيضاً المحل الهندسي لجميع نقاط المنتصف لكل وتر للدائرة الأولى مرسوم من النقطة C ، وبالتالي هي المحل الهندسي للنقطة M_b ، ولأن المسافة من النقطة B إلى النقطة M_b هي m_b ، فإن هناك محلاً هندسياً آخر للنقطة M_b هو L_2 ، وهو الدائرة (B, m_b) الموضح جزء منها في الشكل 12 − 9. إذن؛ النقطة M_b هي نقطة تقاطع هذين المحلين الهندسيين. ثم نرسم $\overleftrightarrow{CM_b}$ ليلاقي الدائرة الأولى في النقطة A . إذن المثلث المطلوب (المثلث الحل) هو ΔABC.

الإنشاء رقم 29 $\{a, h_b, m_c\}$.

لنفرض أن المثلث قد تم إنشاؤه بالفعل ، فإذا مددنا $\overline{CM_C}$ بقدر طوله إلى D ، فإن الشكل $ACBD$ متوازي أضلاع (لأن القطرين ينصف كل منهما الآخر (انظر الشكل $13-9$)). الأطوال a, h_b تعين المثلث القائم الزاوية BH_bC ، والآن يكون الإنشاء كالتالي.

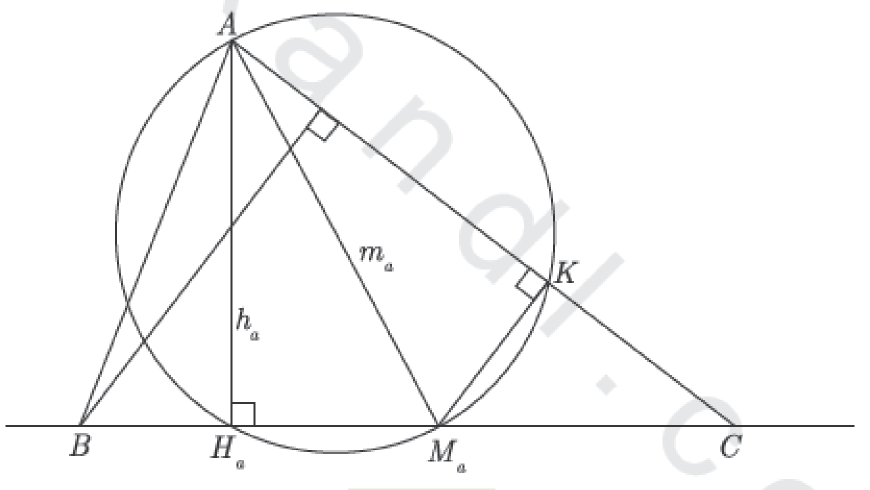


شكل $13-9$

على أي مستقيم أنشئ $CB = a$ ، ثم أنشئ نصف الدائرة التي قطرها $\overline{BC}$ (نصف الدائرة هي المحل الهندسي للنقطة H_b). القوس (B, h_b) يقطع نصف الدائرة عند النقطة H_b ، والآن لنرسم $\overleftrightarrow{CH_b}$ ، ثم نرسم $\overleftrightarrow{BD}$ يوازي $\overleftrightarrow{CH_b}$. والقوس $(C, 2m_c)$ يقطع $\overleftrightarrow{BD}$ عند النقطة D ، والتي تكون الرأس الثالثة لمتوازي الأضلاع. ومن النقطة D نرسم مستقيماً يوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ويقطع $\overleftrightarrow{CH_b}$ في النقطة A ، الرأس الرابعة من متوازي الأضلاع وهي الرأس الثالثة من المثلث المطلوب هو ABC.

الإنشاء رقم 35 $\{h_a, h_b, m_a\}$.

لنفرض أن المثلث موجود بالفعل، إن المثلث ΔAM_aH_a يتحدد تماماً بالمعطيات، فالوتر هو m_a، وضلع القائمة h_a، وهذا ما يعين المثلث. لنرسم الدائرة المحيطة بهذا المثلث، ونعتبر K نقطة تقاطع هذه الدائرة مع $\overline{AC}$ (انظر الشكل $14-9$). الزاوية M_aKA قائمة لأن الرباعي M_aKAH_a دائري. الآن، M_a منتصف $\overline{BC}$، وكل من BH_b, M_aK عمودي على $\overline{AC}$. إذن؛ $M_aK = \frac{1}{2}h_b$. نعلم أيضاً طول الوتر m_a. والآن يكون الإنشاء كالتالي.



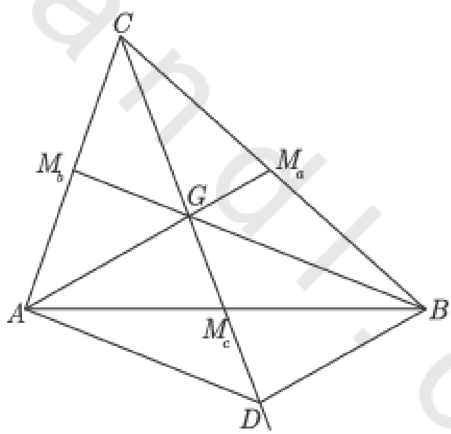
شكل $14-9$

على أي مستقيم أنشئ $AM_a = m_a$، ثم ارسم الدائرة التي قطرها $\overline{AM_a}$، والتي هي في واقع الأمر محل هندسي لكل من النقطتين H_a, K. نقطع الدائرة بالقوس (A, h_a) لتحديد موقع النقطة H_a، ثم مع القوس $\left(M_a, \frac{1}{2}h_b\right)$ لتحديد موقع النقطة K، ثم نرسم $\overleftrightarrow{H_aM_a}, \overleftrightarrow{AK}$ ليتقاطعا في الرأس C، وأخيراً نمد $\overline{CM_a}$ بمقدار طوله

CM_a لنحصل على النقطة B ، ثم نرسم $\overline{AB}$ لنكمل المثلث المطلوب الذي هو ABC.

الإنشاء رقم 43 $\{m_a, m_b, m_c\}$.

لنفرض أن المثلث موجود بالفعل ، نمد $\overline{GM_c}$ بقدر طوله ليصل للنقطة D، ثم نرسم $\overline{AD}, \overline{DB}$ (انظر الشكل $15-9$) فنحصل على متوازي الأضلاع $ADBG$ (لأن القطرين ينصف كل منهما الآخر)، ولكن $AG = \frac{2}{3}m_a, AD = BG = \frac{2}{3}m_b, GD = 2(GM_c) = \frac{2}{3}m_c$. إذن، أضلاع ΔADG تساوي على الترتيب ثلثي أطوال المتوسطات المعطاة. والآن يكون الإنشاء كالتالي.



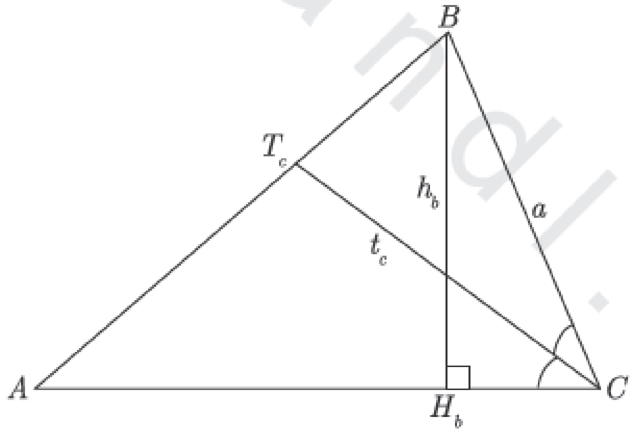
شكل $15-9$

أنشئ قطعاً مستقيمة أطوالها تساوي ثلثي أطوال المتوسطات المعطاة، ومن هذه القطع أنشئ ΔADG ، والذي أطوال أضلاعه $AD = \frac{2}{3}m_b, DG = \frac{2}{3}m_c, GA = \frac{2}{3}m_a$ ، اعتبر منتصف $\overline{DG}$ هي النقطة M_c ، ثم مد $\overline{AM_c}$ بقدر طوله ليصل للنقطة B ، وهي رأس من رؤوس المثلث المطلوب. وأخيراً، مد $\overline{DG}$ بقدر طوله ليحدد الرأس الثالثة من المثلث المطلوب وهي C ، وعليه نصل $\overline{AC}, \overline{BC}$ ، فيظهر لنا الحل.

الإنشاء رقم 56 $\{a, h_b, t_c\}$.

لنفرض أن المثلث موجود بالفعل، إذن المثلث القائم CBH_b يمكن تعيينه لأننا نعلم وتره a وطول ضلع القائمة h_b، ولكننا أيضاً في هذا المثلث القائم نعلم $\angle BCH_b$ والتي هي أيضاً زاوية المثلث المطلوب ABC. وعليه يكون الإنشاء كالتالي.

على أي خط مستقيم، اختر النقطة H_b، ثم أقم منها عموداً بحيث $H_bB = h_b$ (انظر الشكل $16-9$). ارسم القوس (B,a) الذي يقطع الخط الرئيسي عند النقطة C، ثم ارسم $\overline{BC}$ ونصف $\angle BCH_b$. وعلى هذا المنصف نأخذ $CT_c = t_c$. وأخيراً، تكون الرأس A نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{BT_c}, \overleftrightarrow{CH_b}$. وعلى ذلك يكتمل لدينا المثلث المطلوب الذي هو ABC.



شكل $16-9$

الإنشاء رقم 63 $\{h_a, h_b, t_c\}$.

لنفرض أن المثلث موجود بالفعل، ومن T_c نرسم $\overline{T_cY}$ على $\overline{BC}$ يقطعه في Y (انظر الشكل $17-9$). ولأن منصف الزاوية يقسم الضلع المقابل لها إلى جزأين

يتناسبان مع ضلعي الزاوية، فإن $\frac{AT_c}{T_cB}=\frac{b}{a}$ ، وكما عرضنا سابقاً فإن أطوال أضلاع المثلث تتناسب عكسيا مع أطوال ارتفاعات المثلث المتناظرة ، إذن $\frac{b}{a}=\frac{h_a}{h_b}$، ومن ذلك نستنتج أن $\frac{AT_c}{T_cB}=\frac{h_a}{h_b}$ ، ويمكننا من التناسب السابق أن نحصل على :

$$\frac{h_a+h_b}{h_b}=\frac{AT_c+T_cB}{T_cB}=\frac{AB}{T_cB}$$

من المثلثين القائمين BAH_a, BT_CY لدينا:

$$\frac{AB}{T_cB}=\frac{AH_a}{T_cY}=\frac{h_a}{T_cY}$$

ومن ذلك نحصل على :

$$\frac{h_a+h_b}{h_b}=\frac{h_a}{T_cY}$$

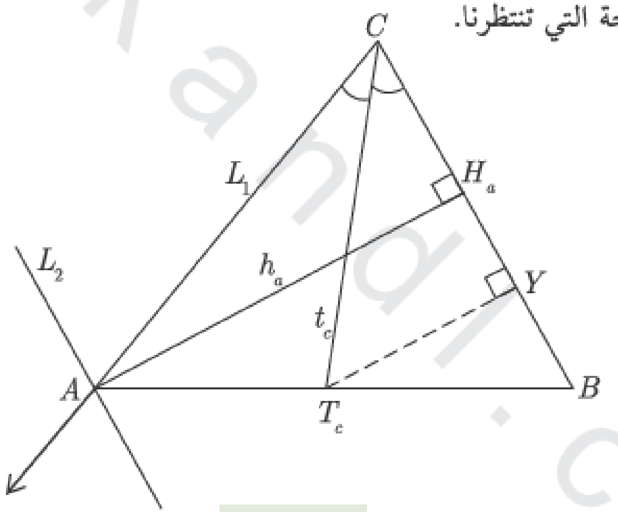
نلاحظ في التناسب الأخير أننا إذا علمنا مقدار T_cY نحصل على الإنشاء لأن بقية المقادير معطاة.

وعليه سيبدأ العمل بإيجاد القطعة المستقيمة $\overline{T_cY}$ من القيم المعطاة أصلاً في المسألة، h_a+h_b, h_a, h_b ، ثم نرسم المثلث القائم الزاوية CYT_c بمعلومية وتره $CT_c=t_c$ وضلعه $\overline{T_cY}$ ، ولكن هذا المثلث القائم يحتوي على $\angle YCT_c$ ، والتي هي نصف قياس $\angle BCA$ التي هي إحدى زوايا المثلث المطلوب. وإذا أخذنا صورة $\angle YCT_c$ بالانعكاس حول $\overline{T_cC}$ ، فإن $\overleftrightarrow{CA}$ هو المحل الهندسي L_1 للرأس A ، ولكن لأن هذه الرأس أيضاً على بعد h_a من الضلع المقابل، فإن محلاً هندسياً آخر للرأس A هو L_2 ، الخط المستقيم الذي يوازي $\overleftrightarrow{CY}$ ويبعد عنه المسافة h_a. وهذان المحلان الهندسيان

يتقاطعان في النقطة A ، وفي النهاية $\overleftrightarrow{AT_c}, \overleftrightarrow{CY}$ يتقاطعان في النقطة B والتي تمثل الرأس الثالثة للمثلث المطلوب ABC .

المناقشة

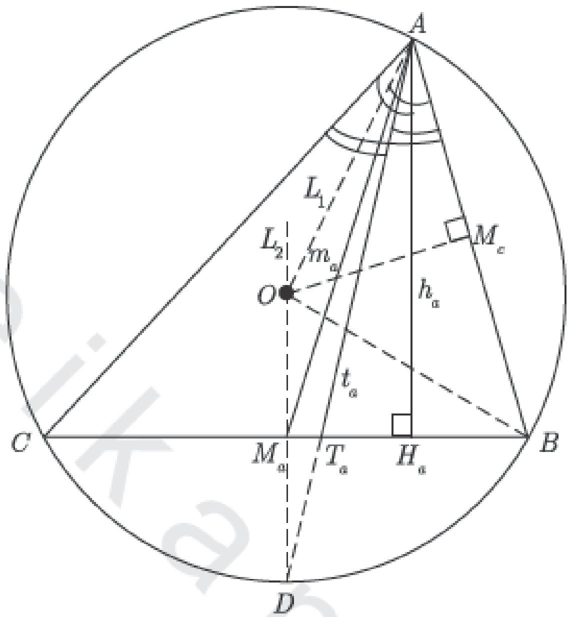
لقد حصلنا على الحل بواسطة التحليل الجبري والذي يبعد كثيراً عن دراستنا. بالطبع، من الضروري أن نعرف العلاقات الهندسية التي قادتنا للتناسب. ولعلك تلاحظ أن الإنشاءات الأخيرة استندت على علاقات هندسية كثيرة غير مألوفة، ولذا أنت مدعو لتوسيع وتعميق معارفك الهندسية وذلك إن كنت ستغامر بالدخول في المياه الهائجة التي تنتظرنا.



شكل $17-9$

الإنشاء رقم 74 $\{h_a, m_a, t_a\}$.

لنفرض كالعادة أن المثلث موجود بالفعل. المثلثان القائمان AH_aT_a, AH_aM_a كلاهما يمكن تعيينه بمعرفة الوتر وأحد ضلعي القائمة، ولنرسم كذلك الدائرة المحيطة بالمثلث المطلوب ABC بنصفي قطريها $\overline{OA}, \overline{OM_aD}$ (انظر الشكل $18-9$)، ثم بعد ذلك، لنثبت نظرية بسيطة مهمة ستساعدنا في عملنا هنا.



شكل 18 – 9

نظرية: 9–1 منصف زاوية رأس المثلث ينصف أيضا الزاوية التي ضلعاها ارتفاع المثلث من نفس الرأس، ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث الواصل من مركزها إلى نفس الرأس.

البرهان

العمود الخارج من مركز الدائرة المحيطة O إلى $\overline{AB}$ يلاقي $\overline{AB}$ في M_c ، والتي هي منتصف $\overline{AB}$. ولأن الزاوية المركزية AOB والزاوية المحيطية ACB يشتركان في قوس واحد، فإن:

$$\gamma = \frac{1}{2} m\angle AOB = m\angle AOM_c$$

وفي المثلثين القائمين ACH_a, OAM_c لدينا :

متممة $m\angle CAH_a = m\angle OAM_c = \gamma$

ولكن لأن $\overleftrightarrow{AT_a}$ ينصف $\angle BAC$ ، أي أن $m\angle BAT_a = m\angle CAT_a$ ، وبالطرح نحصل على:

$$.m\angle OAT_a = m\angle H_aAT_a$$

إذن $\overleftrightarrow{AT_a}$ لا ينصف فقط $\angle ABC$ ولكنه ينصف أيضاً $\angle H_aAO$.●

ونفس الشكل $18-9$ يقودنا لاستنتاج آخر مفيد نصوغه في النظرية التالية :

نظرية: 2-9	منصف زاوية رأس المثلث يلاقي العمود المنصف للضلع المقابل لهذه الزاوية في نقطة تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث.

البرهان

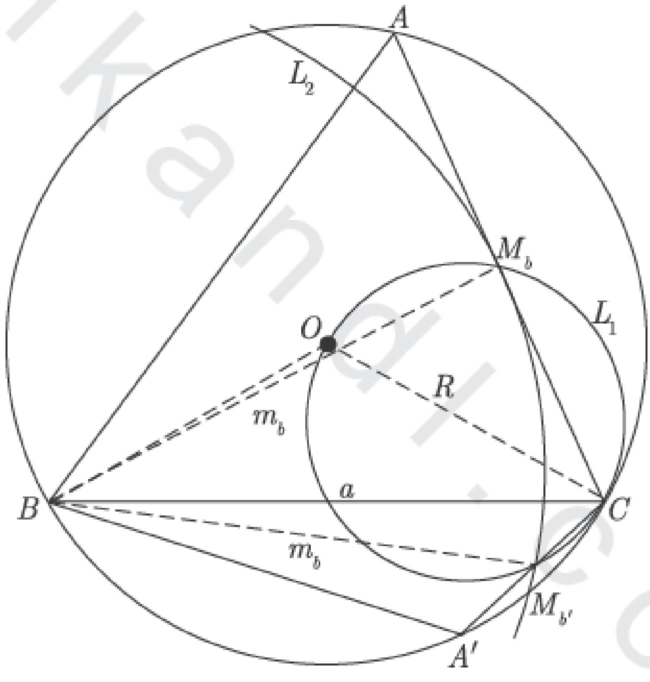
هدفنا هو إثبات أن $\overleftrightarrow{AT_a}, \overleftrightarrow{OM_a}$ يتلاقيان على الدائرة المحيطة بالمثلث عند النقطة D (انظر الشكل $18-9$). وهذا الهدف يتحقق مباشرة، حيث إن كلاً من المستقيمين ينصف $\overset{\frown}{AB}$.

بالعودة إلى الإنشاء المطلوب، نجد أنه في ضوء هاتين النظريتين. ننشئ المثلثين القائمين H_aAT_a ، AH_aM_a ، ثم نضاعف $\angle H_aAT_a$ حول $\overleftrightarrow{AT_a}$ لنحصل على المحل الهندسي الأول L_1 ، لمركز الدائرة المحيطة O ($\overleftrightarrow{AT_a}$ ينصف $\angle H_aAO$). أما المحل الهندسي الثاني الخاص بالدائرة O ، فهو العمود L_2 على $\overleftrightarrow{H_aM_a}$ عند النقطة M_a ، وأخيراً، الدائرة (O,OA) ستلاقي $\overleftrightarrow{H_aM_a}$ عند B,C ، الرأسين المتبقيتين للمثلث المطلوب ABC.●

الإنشاء رقم 99 $.\{a,m_b,R\}$

لننشئ المثلث المتطابق الضلعين OBC ، والمعلوم أضلاعه كالتالي $BC=a, OB=OC=R$: (انظر الشكل $19-9$). إذن؛ الدائرة (O,R) هي محل

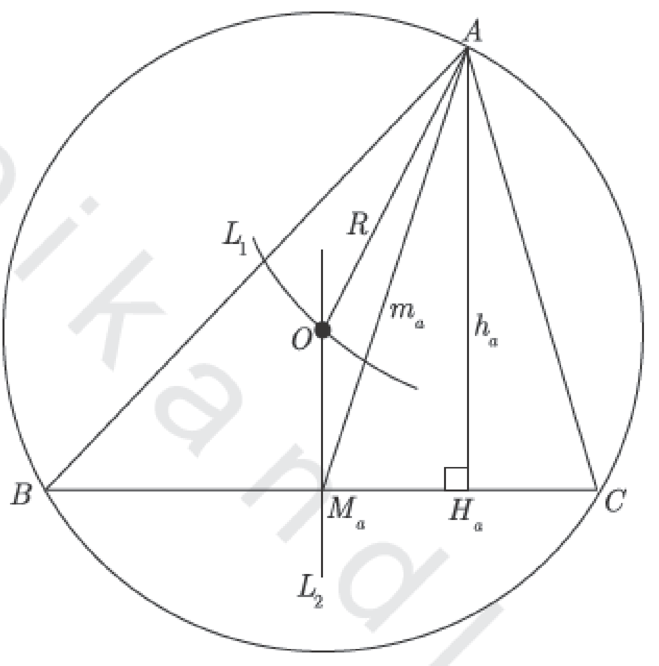
هندسي للرأس الثالثة من المثلث المطلوب ABC. ولكن لأن M_b منتصف $\overline{AC}$، فإن أحد المحال الهندسية للنقطة M_b هو الدائرة L_1، والتي قطرها $\overline{OC}$. ولأن M_b على بعد معلوم قدره m_b من الرأس B ؛ فإن محلاً هندسياً آخر سيظهر للنقطة M_b هو L_2، الدائرة (B, m_b)، والتي تتقاطع مع L_1 عند النقطتين $M_b, M_{b'}$. إذن $\overleftrightarrow{CM_b}, \overleftrightarrow{CM_{b'}}$ يلاقيان الدائرة المحيطة (O, R) عند الرأس الثالثة A, A' للمثلث المطلوب $ABC, A'BC$



شكل 19 – 9

في الحالة السابقة، أعطتنا المعطيات الواردة حلين مختلفين. وبالطبع، فالأطوال المعطاة قد لا تعطينا محال هندسية تتقاطع مع بعضها البعض مما يؤكد أن بعض الحالات ليس لها حل.

الإنشاء رقم 102 $\{h_a, m_a, R\}$.

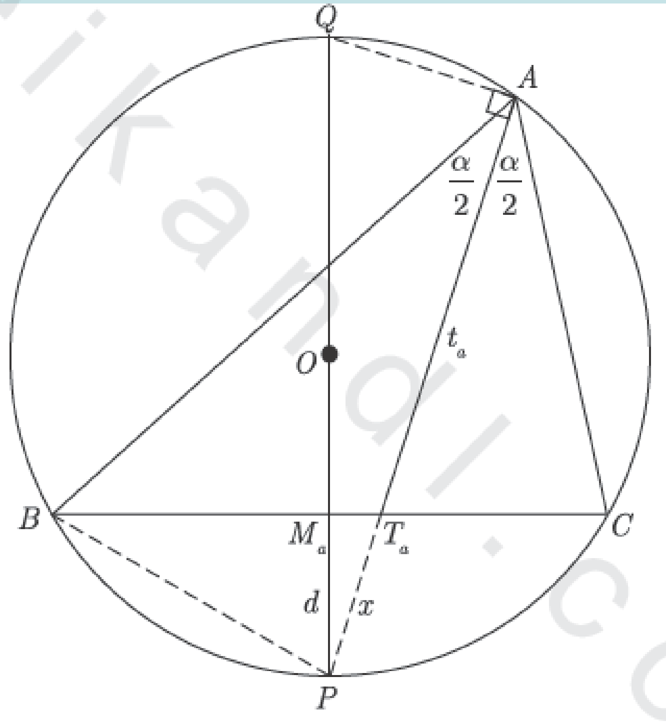


شكل 20 – 9

لنفرض أن المثلث موجود بالفعل، وعليه ففي المثلث القائم AH_aM_a ، نعلم طول الوتر $AM_a = m_a$ ، وطول ضلع القائمة $AH_a = h_a$ ؛ لذا فهذا المثلث يمكن تحديده. كذلك، يمكننا إيجاد مركز الدائرة المحيطة بالمثلث لأنه يقع على المنصف العمودي للضلع $\overline{BC}$ ، والذي بدوره عمودي على $\overleftrightarrow{M_aH_a}$ عند النقطة M_a ، وبالطبع يقع هذا المركز على بعد معلوم R من الرأس A. وبالتالي يكون الإنشاء، برسم المثلث القائم الزاوية AH_aM_a ، المعلوم طول وتره $AM_a = m_a$ ، وطول ضلع القائمة فيه $AH_a = h_a$ (انظر الشكل 20 – 9). إذن أحد المحال الهندسية لمركز

الدائرة المحيطة O هو L_1 ، الدائرة (A,R) ، وهناك محل هندسي آخر للنقطة O هو L_2 ، العمودي على $\overleftrightarrow{M_aH_a}$ عند النقطة M_a . هذه المحال الهندسية تتقاطع في مركز الدائرة المحيطة O. وأخيراً ستقطع (O,R) المستقيم $\overleftrightarrow{M_aH_a}$ عند النقاط B,C واللتين هما الرأسان الباقيتان لنحصل على المثلث المطلوب ABC .

الإنشاء رقم 105 $\{a,t_a,R\}$.



شكل 21 – 9

لنفرض أن المثلث المطلوب ABC موجود بالفعل، وكذلك دائرته المحيطة (O,R) التي قطرها العمودي ينصف $\overline{BC}$ ويقطعها في النقطة M_a ويلاقي الدائرة عند P,Q كما في الشكل 21 – 9. منصف الزاوية BAC ، $\overline{AT_a}$ سيلاقي الدائرة أيضاً

عند P. وكما أشرنا في الإنشاء رقم 74، النقطة P هي منتصف $\overparen{BPC}$، إذن $\angle QAP$ قائمة لأنها زاوية محيطية منشأة في نصف دائرة، والمثلثان PAQ, PM_aT_a متشابهان حيث إنهما يشتركان في $\angle APQ$، وهذه العلاقة تعطينا التناسب $\frac{PT_a}{PM_a} = \frac{PQ}{PA}$.

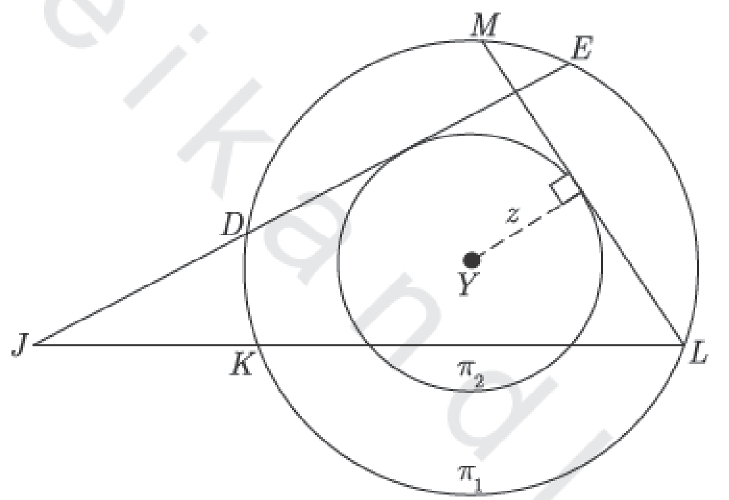
وكما هو مبين في الشكل $21 - 9$، يمكننا استخدام الأطوال الموضحة لنحصل على نفس التناسب ولكن على الصورة: $\frac{x}{d} = \frac{2R}{x + t_a}$.

لأن $\overline{PQ}$ قطر للدائرة المحيطة، فطوله $2R$ من المعطيات، وكذلك t_a معطى. أما الطول d فيمكننا بسهولة العثور عليه حسب الصيغة $d = R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$، بمساعدة رسم الوتر الذي طوله a في الدائرة المحيطة، وذلك لأن d هي المسافة بين من منتصف الوتر ومنتصف القوس المقابل له. (هل لك أن تثبت أن $d = R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$ ؟).

إذن من التناسب الأخير نستطيع الحصول على المعادلة $x\left(x + t_a\right) = d\left(2R\right)$ والتي تحتوي على الطول x، والأطوال المعطاة $d, t_a, 2R$. والآن، سنعمل على الحل الهندسي للمعادلة التي على الصورة $x\left(x + u\right) = vw$ حيث u, v, w أطوال معلومة. على أي مستقيم أنشئ $\overline{JK}$ التي طولها v، $\overline{JL}$ التي طولها w، ثم أخيراً، ارسم $\overline{LM}$ التي طولها u في أي اتجاه، ثم أنشئ الدائرة π_1 (انظر الشكل $22 - 9$). أوجد المسافة ذات الطول z من مركز الدائرة حتى منتصف $\overline{LM}$، ثم ارسم الدائرة $\left(Y, z\right)$ وسمها π_2 وارسم لها مماساً من النقطة الخارجية J ليقطع الدائرة π_1 عند النقطتين D, E. من الإنشاء، الوتران $\overline{DE}, \overline{LM}$ لهما نفس البعد عن المركز Y، وبالتالي $DE = ML$.

وأخيراً، لأن $JD\cdot JE=JK\cdot JL$ ، أي أن $JD\cdot\left(JD+DE\right)=JK\cdot JL$ أو $JD\cdot\left(JD+u\right)=vw$. إذن ؛ $JD=x$ ، وبالتالي المعادلة المطلوبة $x\left(x+u\right)=vw$.

ولوضع هذه الخطوات معاً لإنشائنا الأصلي، سنبدأ برسم الدائرة المحيطة $\left(O,R\right)$ ، ونضع فيها الوتر



شكل $22-9$

$\overline{BC}$ والذي طوله a. العمود المنصف للوتر BC سيعطينا $d=PM_a$ ، $2R=PQ$ للخطوات في الإنشاء القادم الذي سيكون على شكل منفصل.

فعلى أي مستقيم، ارسم $JK=PM_a=d$ ، و $JL=PQ=2R$. وفي أي اتجاه، ارسم من L $\overline{LM}$ التي طولها t_a. ارسم الدائرة المحيطة بالمثلث KLM ، ثم العمود من مركزها إلى $\overline{LM}$. ثم ارسم الدائرة π_2 المتحدة المركز مع الدائرة π_1 وتمس $\overline{LM}$. وكما في الفصل الأول من الكتاب، نرسم المماس $\overleftrightarrow{JDE}$ للدائرة π_2 ، ومما قدمناه سابقاً من أن $JD=x$ ، وبالعودة للشكل الأول، ارسم الدائرة $\left(P,x\right)$

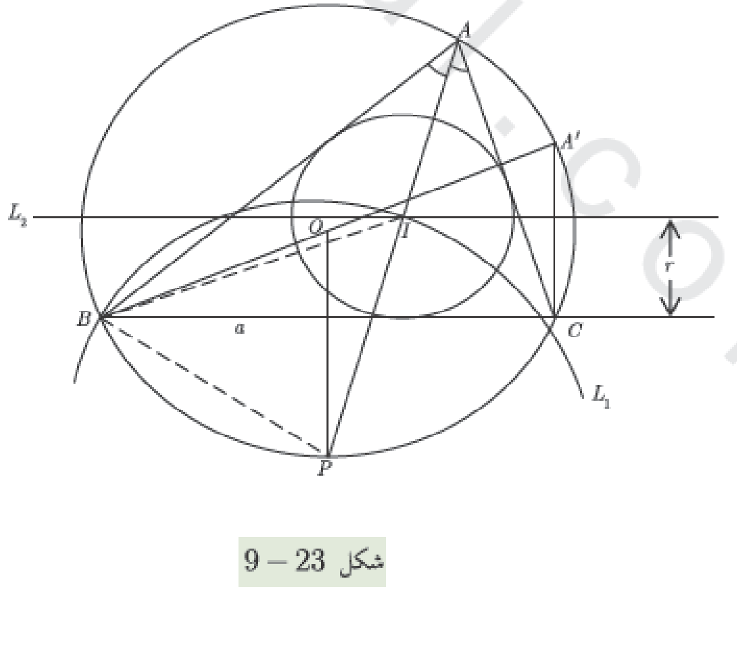
لتقطع $\overline{BC}$ في T_a ، وأخيرا سيلاقي $\overleftrightarrow{PT_a}$ الدائرة المحيطة في النقطة A التي هي الرأس الثالثة من المثلث المطلوب ABC .

المناقشة

لقد استخدمنا هنا الكثير من المفاهيم الجبرية والهندسية الجيدة وتركنا بعض التفاصيل والتعليقات، ولا يفوتنا أن نشير إلى أنه في الشكل الأصلي، النقاط الأربع A, Q, M_a, T_a تقع جميعاً على دائرة واحدة (قطرها $\overline{QT_a}$) لأن كلاً من $\angle T_aAQ, \angle T_aM_aQ$ زاويتان قائمتان.●

الإنشاء رقم 115 $\{a, \alpha, r\}$.

هذا الحل يقودنا أيضا لبعض العلاقات الهندسية الشيقة التي قد تكون غير مألوفة لدى القارئ. لنفرض كالمعتاد أن المثلث المطلوب موجود بالفعل. نعلم أن منصف $\angle BAC$ يمر بمركز الدائرة الداخلية I للمثلث وكذلك نقطة المنتصف P للقوس المقابل $\overparen{BPC}$ في الدائرة المحيطة بالمثلث (انظر الشكل $23-9$)



شكل $23-9$

لأن $\angle BCA, \angle BPI$ تحصران $\widehat{AB}$ ؛ إذن

$$m\angle BCA = m\angle BPI = \gamma$$

وأيضاً، لأن كلاً من $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{AI}$ منصفان لزاويتين من زوايا المثلث المطلوب ABC ؛ فلدينا

$$m\angle BPI = m\angle PBC + m\angle CBI = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

ولأن $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ؛ إذن $m\angle BIP = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}$ ، وعليه فإن ΔBPI متطابق الضلعين حيث $\overline{BP} \cong \overline{PI}$ ، ولكن $\overline{BP}$ يمكن الحصول عليه من المعطيات ؛ لأن a, α كما أشرنا قبل ذلك في هذا الفصل يكفيان لتعيين الدائرة المحيطة ، وإذا وضعنا الوتر المعلوم $\overline{BC}$ في الدائرة المعلومة (O, OB) ، فيمكننا بسهولة رسم نصف القطر $\overline{OP}$ الذي هو عمود منصف للوتر ، ثم نرسم $\overline{PB}$. وبالتالي يكون لدينا محل هندسي أول L_1 لمركز الدائرة الداخلية I وهو الدائرة (P, PB) المتاحة من خلال المعطيات. I لها محل هندسي آخر يمكننا استنتاجه من أن الدائرة الداخلية للمثلث تمس جميع أضلاع المثلث المطلوب من الداخل ومركز هذه الدائرة I يبعد مسافة قدرها r عن كل ضلع من أضلاعه ، إذن المحل الهندسي الآخر هو المستقيم L_2 ، والذي يوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ويبعد عنه من أعلى مسافة قدرها r. وعليه ، وبعد هذا التحليل ، يكون الإنشاء كالتالي.

ارسم المثلث القائم الزاوية BCA' بحيث $BC = a$ وزاويته القائمة هي C ، $m\angle CBA'$ تساوي متممة α ، ثم أنشئ الدائرة المحيطة بهذا المثلث. هذه الدائرة (O, OB) هي الدائرة المحيطة بالمثلث المطلوب لأن أي زاوية ستنشأ على $\widehat{BA'C}$ سيكون لها القياس α. ثم ارسم نصف القطر $\overline{OP}$ عمودي على $\overline{BC}$ ، وارسم الدائرة (P, PB) التي هي المحل الهندسي الأول L_1 للمركز I. والآن لنرسم المحل

الهندسي الثاني L_2 ، الذي يوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ويعلوه بمسافة قدرها r. هذان المحلان الهندسيان يلتقيان عند مركز الدائرة الداخلية I ؛ وبالتالي $\overleftrightarrow{PI}$ يلاقي الدائرة المحيطة عند النقطة A التي هي الرأس الثالثة للمثلث المطلوب ABC .

المناقشة

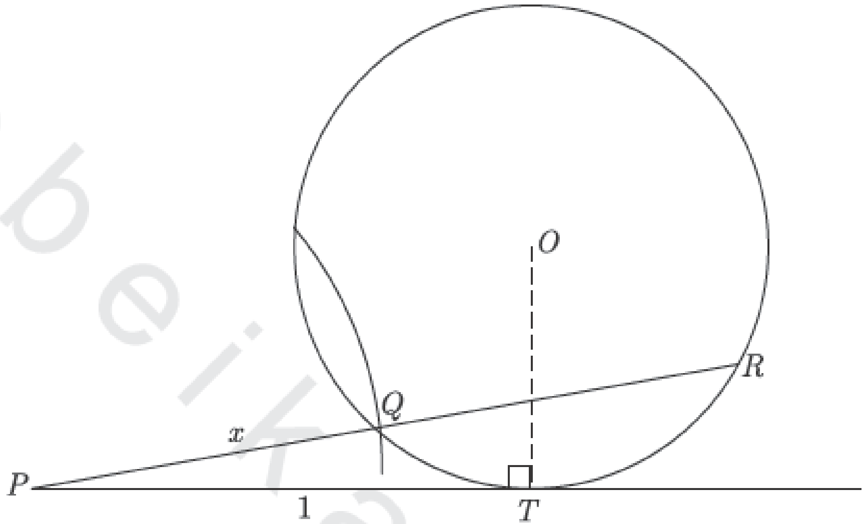
بالطبع L_1, L_2 يجب أن يلتقيا إذا كان لـ I وجود، وإذا التقيا مرة فقد يلتقيان مرة أخرى. وسنترك للقارئ المجال لمزيد من المناقشة حول عدد وطبيعة الحلول.●

الإنشاء رقم 122 $\{h_a, h_b, r\}$.

لن نقوم بحل هذه المسألة بشكل كامل هنا وبدلاً من ذلك سوف نشير إلى كيف نحولها إلى مسألة قد قمنا بحلها بالفعل، وبداية لنسترجع النظرية 13 — 7 التي تنص على أن :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

وبالتعامل جبرياً مع هذه المعادلة التي تحتوي على أربعة مجاهيل، نجد أننا في حالة معرفتنا ثلاثة منها، فيمكننا الحصول على المجهول الرابع. ولأن مسألتنا تبدأ بمعرفتنا لكل من h_a, h_b, r ، فبالتالي نستطيع الحصول على h_c ، وهذا يحيلنا إلى الإنشاء رقم 16 ، والذي ينشئ مثلثاً بمعلومية ارتفاعاته الثلاثة.



شكل $24 - 9$

ولكن يظل هناك سؤال حول إنشاء معكوس أي طول x. وللإجابة عن هذا السؤال دعونا نأخذ القطعة PT طولها الوحدة وتمس أي دائرة عند النقطة T (انظر الشكل $24 - 9$). ثم نرسم دائرة أخرى (P, x) تقطع الأولى في النقطة Q ، كما نرسم $\overleftrightarrow{PQ}$ يقطعها أيضا في النقطة R. ولأن:

$$PQ \cdot PR = PT^2 = 1$$

فإن هذا يتطلب أن يكون PQ, PR كل منهما معكوسا للآخر. وإذا كانت (P, x) لا تقطع الدائرة الأولى فما عليك سوى أخذ أكبر دائرة ممكنة تمس PT عند النقطة T وتكمل كما سبق.

أما الحل الفعلي لهذا الإنشاء فسنشير إليه هنا ولن نكمله كما ذكرنا سابقاً. وسنستخدم الإنشاء العكسي للحصول على معكوس كل h_a, h_b, r. وبالطرح سنحصل على معكوس h_c :

$$\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}-\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}$$

ثم أوجد معكوس هذا المعكوس للحصول h_c نفسها . ثم نعود للإنشاء رقم 16 والذي نفذناه سابقاً في صفحة 271.

الإنشاء رقم 150 $\{\alpha, h_a, s\}$.

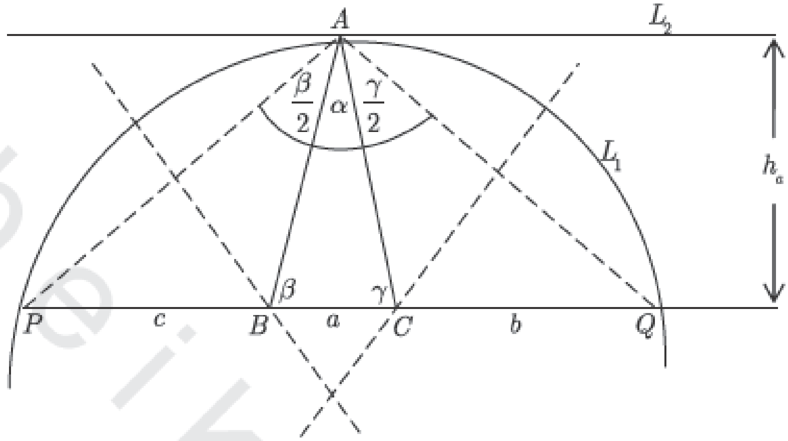
لنفرض أن المثلث المطلوب إنشاؤه موجود بالفعل. لنأخذ على $\overleftrightarrow{BC}$ كلاً من $BP = BA = c$ ، $CQ = CA = b$ (انظر الشكل 25 – 9). إذن طول $\overline{PBCQ}$ يساوي $a+b+c=2s$ وهذا الناتج معلوم من المعطيات. في المثلث المتطابق الضلعين BPA ، قياس كل زاوية من زاويتي قاعدته المتطابقتين يساوي نصف قياس الزاوية الخارجة عند الرأس B ، أي أن $m\angle PAB=\frac{1}{2}\beta$.

وبالمثل $m\angle QAC=\frac{1}{2}\gamma$. وعليه يكون لدينا عند الرأس A :

$$m\angle PAQ=\frac{1}{2}\beta+\alpha+\frac{1}{2}\gamma=\left(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\gamma\right)+\frac{1}{2}\alpha=90^\circ+\frac{1}{2}\alpha$$

إذن $m\angle PAQ$ هي أيضا معلومة لأنها جاءت بدلالة المعطيات الأصلية في المسألة .

على القطعة المعلومة $\overline{PQ}$ ، النقطة A تقابل الزاوية المعلومة $90^\circ+\frac{1}{2}\alpha$ ، وبالتالي L_1 محل هندسي لها والذي هو قوس دائري معلوم، و L_2 هو المحل الهندسي الآخر لنفس النقطة A والذي يوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ويقع فوقها بمسافة قدرها h_a. والآن لنبدأ إنشاء المثلث المطلوب، وأولى خطواتنا لذلك هي إيجاد L_1 .

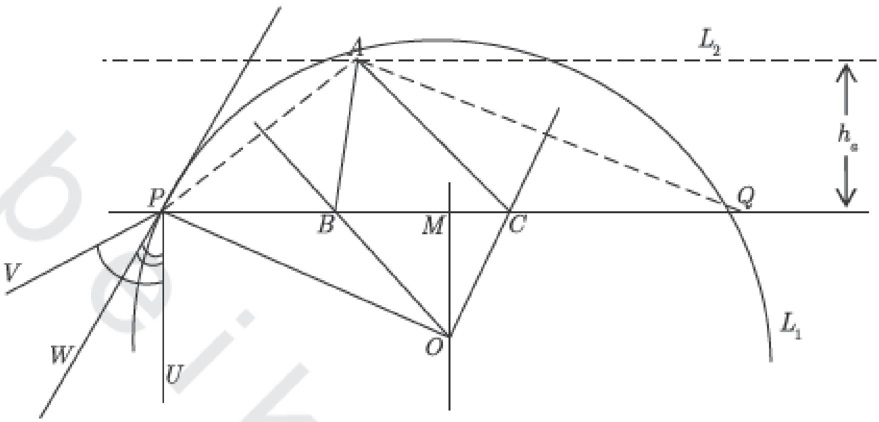


شكل $25-9$

على أي خط ، ارسم $PQ = 2s$ التي هي طول محيط المثلث المطلوب ABC ، وعند النقطة P أنشئ $\overleftrightarrow{PU}$ عمودياً على $\overleftrightarrow{PQ}$ ، ثم أنشئ $\angle UPV$ تطابق الزاوية المعلوم قياسها α (انظر الشكل $26-9$). نرسم $\overleftrightarrow{PW}$ ينصف $\angle UPV$ ، وبالتالي :

$$\angle QPW = 90° + \frac{1}{2}\alpha$$

وأما O مركز القوس L_1 فنحصل عليها من تقاطع العمود المنصف لـ $\overline{PO}$ مع العمود على $\overleftrightarrow{PW}$ عند P .أخيراً (O, OP) هو فعلاً المحل الهندسي L_1. أما المحل الهندسي الثاني L_2 فمن السهل رسمه كما أشرنا في الشكل $26-9$ ، ليتقاطع المحلان الهندسيان عند A وهي رأس من رؤوس المثلث المطلوب. وأخيراً العمودان المنصفان لكل من $\overline{AP}, \overline{AQ}$ يلاقيان الخط الرئيسي عند النقطتين B, C ، وهما الرأسان الباقيتان للمثلث المطلوب ABC .



شكل $26 - 9$

لقد قمنا بحل عدد قليل من تلك القائمة التي تضم .. مشكلة، ولكننا، وكما نأمل، اخترنا منها نماذج تقدم لنا مادة هندسية شيقة. ونحن نحث القارئ على استكشاف هذه المنطقة بكل تفاصيلها لأنه سوف يجد مادة ثرية شيقة ترضي طموحه.

تدريبات

1. بالعودة للإنشاء رقم 20 (الشكل $12 - 9$). هل نستطيع أن نأخذ M_b كنقطة تقاطع أخرى للمحلين الهندسيين ؟ وضح إجابتك.
2. بالعودة للإنشاء رقم 29 (الشكل $13 - 9$). القوس $\left(C, 2m_c\right)$ ربما يقطع $\overleftrightarrow{BD}$ في نقطة أخرى D' . ناقش الإنشاء والحل الذي ستحصل عليه.
3. بالعودة للإنشاء رقم 29 (الشكل $13 - 9$). إذا كان طول a يساوي 10 سم ، فما هو الطول الممكن للارتفاع h_b ؟ وللمتوسط m_c ؟ موضحاً إجابتك.
4. بالعودة للإنشاء رقم 35 (الشكل $14 - 9$). تحت أي شروط $\overleftrightarrow{AK}, \overleftrightarrow{H_aM_a}$ لا يلتقيان ؟ ثم وضح كيف يتأثر حلنا في هذه الحالة.

5. بالعودة للإنشاء رقم 35 (الشكل $14-9$). نفرض أننا أخذنا K, H_a في نفس الاتجاه من $\overline{AM_a}$ بدلاً من جهتين مختلفتين منها كما بالشكل. أكمل الشكل الجديد وناقش النتائج.
6. بالعودة للإنشاء رقم 35 (الشكل $14-9$). إذا كان : $m_a = 10$، ناقش الطول الممكن لكل من h_a, h_b لأي حل أو لأي عدد من الحلول.
7. بالعودة للإنشاء رقم 43 (الشكل $15-9$). ما الشروط التي يجب أن تكون عليها الأطوال m_a, m_b, m_c لنحصل على حل.
8. بالعودة للإنشاء رقم 43 (الشكل $15-9$). ما النتائج إذا تساوي طولا متوسطين أو أطوال المتوسطات الثلاثة في المثلث.
9. بالعودة للإنشاء رقم 56 (الشكل $16-9$). ما الشروط التي تقع على كل من a, h_a لتجعل من المستحيل إنشاء المثلث القائم BCH_b .
10. بالعودة للإنشاء رقم 56 (الشكل $16-9$). ما هو طول منصف الزاوية $\overline{CT_c}$ الذي من شأنه أن يجعل من المستحيل على $\overleftrightarrow{BT_c}, \overleftrightarrow{CH_b}$ أن يتقاطعا.
11. بالعودة للإنشاء رقم 74 (الشكل $18-9$). ناقش الحالات التي لا يوجد فيها أي مساواة بين الأطوال الثلاثة المعطاة.
12. بالعودة للإنشاء رقم 74 (الشكل $18-9$). أخذنا M_a, T_a في نفس الاتجاه بالنسبة للنقطة H_a . ناقش النتائج التي تترتب على وقوع . بين M_a, T_a .
13. بالعودة للإنشاء رقم 74 (الشكل $18-9$). تحت أي شروط لا تلاقي الدائرة (O, OA) المستقيم $\overleftrightarrow{H_aM_a}$ ؟
14. بالعودة للإنشاء رقم 99 (الشكل $19-9$). ناقش إمكانية وعدد الحلول للاختيارات المختلفة للأطوال المعطاة $\{a, m_b, R\}$.
15. في الإنشاء 99 . قرر ما إذا كان يمكن التوصل إلى الشروط الكافية واللازمة التالية لأي حل

$$\sqrt{R^2 + 2a^2} - R \leq 2m_b \leq \sqrt{R^2 + 2a^2} + R$$

16. بالعودة للإنشاء رقم 102 (الشكل 20 — 9). تحت أي شروط يكون من المستحيل رسم المثلث القائم الأول AH_aM_a ؟
17. بالعودة للإنشاء رقم 102 (الشكل 20 — 9). تحت أي شروط لا يتقاطع المحلان الهندسيان L_1, L_2 .
18. بالعودة للإنشاء رقم 102 (الشكل 20 — 9). المحلان الهندسيان L_1, L_2 يحتمل أن يتقاطعا مرتين عند O كما يظهر بالشكل، O' والتي لا تظهر. ناقش هذا الاحتمال .
19. بالعودة للإنشاء رقم 102 (الشكل 20 — 9). إذا كان لدينا نقطة التقاطع O، فمتى نفشل في الحصول على الرأسين B, C ؟ وضح إجابتك.

تمريننا الأخير في هذا الفصل هو الأصعب والأهم.

20. أكمل حلول أكبر عدد ممكن من المشكلات الواردة في القائمة التي تحتوى على 179 مشكلة في الصفحات 267 — 265. وناقش في كل مشكلة الشروط وإمكانية وجود الحل والعلاقات بين الشروط وطبيعة وعدد الحلول .