ملحق أ

الأعداد المركبة
Complex Numbers

مقدمة:

عرف علماء الرياضيات خط الأعداد موعة الأعداد ا قيقية ***R*** تعريفاً كماً .. هذه ا موعة كانت تفي بالغرض حينما يطلب موعة ا ل عادلات رياضية مثل $(x^2 - 9 = 0)$ أو $(x^2 - 2x + 1 = 0)$ وغ ها .. وكذلك حينما يطلب موعة ا ل تباينات (متراجحات) من أمثال $(x + 1 > 0)$ وغ هـا. ولكن كيف نستطيع إ اد موعة ا ل عادلة مثل $(x^2 + 1 = 0)$؟ .. إن موع ا ربعات لا يساوي صفراً لأن مربع العدد (دائماً) موجب، فكيف كن موع أعداد مربعة أن يكون صفراً أو سالباً؟.

للإجابة على هذا السؤال افترض العلماء وجود ما يسمى بالعـدد التخيلـي Imaginary number وهو العدد ا عرف كالآ :

$$i = \sqrt{-1}$$

فهذا التعريف كننا من حل ا عادلة $(x^2 + 1 = 0)$ إذ أن:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

ولكن إ أي موعة تنتمي موعة ا لول؟ .. فكان لابد من توسيع Extending موعة الأعداد ا قيقية لتستوعب الوافد ا ديد، ولذلك تعريف العـدد ا ركـب Complex Number ليكون مكوناً بصورة عامة من جـزء حقيقـي Real Part وجـزء يلـي Imaginary Part كالآ :

$$z = a + ib$$

حيث ***R*** $a, b \in$ و $i = \sqrt{-1}$. هذه ا موعة ا وسعة ا توي أمثال هذه الأعداد

سميت جموعة الأعداد ا ركبة **Z** وبالتا $z = a + ib$ قق $z \in$ **Z**. كذلك **R** $\subset$ **Z** ، أي أن موعة الأعداد ا قيقية هي موعة جزئية من **Z** وذلك لأنه عندما نضع $b = 0$ فإن $z \in$ **R** .

بداية من هذا التفك ا بدع، والذي يبدو الآن يس ، تطور علم من العلوم ا امة جداً وا هي بدورها تسببت   تطوير الرياضيات وتوسيع طرق ا ل للمعادلات .. بل إ ا أصبحت من العلوم القيمة جداً وا لا غ عنها   العلوم الكهربية وعلوم الاتصالات وعلم ا وائع وعلم الديناميكا .. وذلك لأن هذه ا قدمة اليس ة ال أنتجت ما يسمى بالعدد ا ركب تطورت هي الأخرى لتنتج علماً فائقاً ومدهشاً آخر يسمى با تغ ا ركب Complex Variable وهو من العلوم البديعة ا دهشة وال ا أيادي بيضاء كث ة على تطور الرياضيات ككل.

تعريفات:

تعريف – ١:

العدد ا ركب z هـو عدد ينتمي إ موعة الأعداد ا ركبة Z يث يكون $z = a + ib$ لكل $a, b \in$ R ، $i = \sqrt{-1}$.

ملحوظة:

ا أن $i = \sqrt{-1}$ ، فإن

$$
\begin{aligned}
i^2 &= i \times i = -1 \\
i^3 &= i^2 \times i = -1 \times i = -i \\
i^4 &= i^2 \times i^2 = 1 \\
i^5 &= i^4 \times i = i \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

وهكذا. وتؤدي عمليات الرفع لأس موجب على i إ وجود ما يسمى **بالدورة الرباعية**، أي أن:

$$
\boxed{\begin{array}{lll} i^{4n} = 1 & , & i^{4n+1} = i \\ i^{4n+2} = -1 & , & i^{4n+3} = -i \end{array}}
$$

حيث n عدد صحيح موجب.

تعريف – ٢:

$a = \text{Re}(z)$:	Real part of z	ا ـزء ا قيقي من
$b = \text{Im}(z)$:	Imaginary part of z	ا ـزء التخيلي من
$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$:	Argument of z	سعة
$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$:	Absolute value of z	القيمة ا طلقة (طول) لـ

بعض العمليات الأساسية ج الأعداد ا ركبة:

إذا كان $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ فإن:

(أ) عملية ا مع Addition:

إذا كان $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ فإن:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

(ب) عملية الطرح Subtraction:

إذا كان $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ فإن:

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

(ج) عملية الضرب Multiplication:

إذا كان $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ فإن:

$$z_1z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + \underbrace{i^2 a_2 b_2}_{=-a_2b_2}$$

أي أن

$$z_1z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

(د) عملية الترافق Conjunction:

إذا كان $z = a + ib$ فإن العدد المركب

$$\bar{z} = a - ib$$

يسمى مرافق Conjugate العدد z . ويحقق الترافق غياب العدد التخيلي i عند إجراء عملية الضرب $z\,\bar{z}$ أو $\bar{z}\,z$ حيث أن:

$$z\,\bar{z} = \bar{z}\,z = a^2 + b^2 \in \boldsymbol{R}$$

وبالتالي فحاصل ضرب العدد في مرافقه دائماً يعطي عدداً صحيحاً.

(هـ) عملية القسمة Division:

إذا كان $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ فإن:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}$$

ولإجراء عملية القسمة فإنه يمكن استعمال تعريف المرافق وذلك للتخلص من كون المقام عدد مركب لا يمكن بسهولة القسمة عليه، وبالتالي فإنه عند الضرب في $\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$ فإن:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \times \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) + i\left(\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)$$

أي أننا نجحنا في النهاية في كتابة $\frac{z_1}{z_2}$ كعدد مركب مكون من جزء حقيقي وجـزء تخيلـي وهذا ييسر العمليات الحسابية كثيراً.

(و) القيمة ا طلقة للعدد ا ركب Absolute Value:

إذا كان $z = a + ib$ فإن القيمة ا طلقة $|z|$ للعدد ا ركب z تعطي بـ :

$$|z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

يطلق على القيمة ا طلقة أيضاً طول z (Length of z). و قق القيمة ا طلقـة العلاقـات ا امة التالية:

$$(a)\quad |z_1 z_2| = |z_1| . |z_2|$$

$$(b)\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad , \quad z_2 \neq 0$$

$$(c)\quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$(d)\quad |z_1 - z_2| \geq \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big|$$

و كن للقارئ اولة إثبات هذه العلاقات وا كن تعميمها كالآ :

$$(e)\quad \left|\prod_{i=1}^{n} z_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |z_i|$$

$$(f)\quad \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|$$

و كن إثبات العلاقة (e) باستعمال الاستنتاج الرياضي كالتا :

* أولاً: عند $n = 2$:

$$\left|\prod_{i=1}^{2} z_i\right| = |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

وذلك من العلاقة (a).

* ثانياً: بفرض صحة العلاقة عند $n = m$، فإن:

$$\left|\prod_{i=1}^{m} z_i\right| = \prod_{i=1}^{m} |z_i|$$

وبالتا   فإنه عند $n = m + 1$ يكون:

$$\left|\prod_{i=1}^{m+1} z_i\right| = \left|\prod_{i=1}^{m} z_i \cdot z_{m+1}\right| = \left|\prod_{i=1}^{m} z_i\right| \cdot |z_{m+1}| = \prod_{i=1}^{m} |z_i| \cdot |z_{m+1}| = \prod_{i=1}^{m+1} |z_i|$$

أي أن العلاقة صحيحة عند $m + 1$ بفرض صحتها عند m. وحيث أن العلاقة (e) صحيحة عند $m = 2$، إذن فهي صحيحة عند $m = 2, 3, 4, \ldots$.

وبا ثل كن إثبات العلاقة (f) باستعمال الاستنتاج الرياضي أيضاً كالتا :

* أولاً: عند $n = 2$:

$$\left|\sum_{i=1}^{2} z_i\right| \le |z_1| + |z_2|$$

وذلك من العلاقة (c).

* ثانياً: بفرض صحة العلاقة عند $n = m$ ، فإن:

$$\left|\sum_{i=1}^{m} z_i\right| \le \sum_{i=1}^{m} |z_i|$$

وبالتا   فإنه عند $n = m + 1$ يكون:

$$\left|\sum_{i=1}^{m+1} z_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{m} + z_{m+1}\right| \le \left|\sum_{i=1}^{m} z_i\right| + |z_{m+1}| \le \sum_{i=1}^{m} |z_i| + |z_{m+1}| = \sum_{i=1}^{m+1} |z_i|$$

أي أن العلاقة صحيحة عند $m + 1$ بفرض صحتها عند m. وحيث أن العلاقة (f) صحيحة عند $m = 2$، إذن فهي صحيحة عند $m = 2, 3, 4, \ldots$.

فوا هامة:

بعد أن عرفنا عملي ا مع والضرب فإن هات العملية قققان القوا الآتية:

إذا كان $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{Z}$ فإن:

(*i*) **قانون الإقفال** ***Closure Law***

$$z_1 + z_2 \in \mathbf{Z} \quad , \quad z_1\, z_2 \in \mathbf{Z}$$

(*ii*) **قانون الإبدال ا معي** ***Commutative Law of Addition***

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

(*iii*) **قانون الإدماج ا معي** ***Associative Law of Addition***

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

(*iv*) **قانون الإبدال الضر** ***Commutative Law of Multiplication***

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

(*v*) **قانون الإدماج الضر** ***Associative Law of Multiplication***

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)\, z_3$$

(*vi*) **قانون التوزيع** ***Distribution Law***

$$z_1(z_2 + z3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

(*vii*) **ا ايد ا معي** ***0: Identity with respect to Addition***

$$z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1 \quad , \quad 0 \in \mathbf{Z}$$

(*viii*) **ا ايد الضر** ***1: Identity with respect to Multiplication***

$$(1)z_1 = z_1(1) = z_1 \quad , \quad 1 \in \mathbf{Z}$$

(*ix*) ا معكوس ا معي *Additive Inverse*

لكل عدد $z \in Z$ يوجد عدد $(-z) \in Z$ (يسمى ا معكوس ا معي للعدد z)

يث: $z+(-z) = 0$

(*x*) ا معكوس الضر *Multiplicative Inverse*

لكل عدد $z \in Z$ يوجد عدد $(z^{-1}) \in Z$ (يسمى ا معكوس الضر للعدد z)

يث: $zz^{-1} = 1$

مثال ١:

إذا كان:

$$z_1 = 1 + i \quad , \quad z_2 = -1 - 2i \quad , \quad z_3 = i$$

أوجد حاصل العمليات الآتية:

$(a) \quad z = 2z_1 + 3z_2 \qquad , \qquad (b) \quad z = z_1 + \dfrac{z_2}{z_3}$

$(c) \quad z = z_1 - z_2 + z_3 \qquad , \qquad (d) \quad z = \dfrac{z_1 + z_2}{z_1 + z_3}$

$(e) \quad z = z_1(z_2 + z_3) \qquad , \qquad (f) \quad r = |z_1 - z_2 + z_3|$

$(g) \quad r = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$

ا ل:

$$(a) z = 2z_1 + 3z_2 = 2(1+i) + 3(-1-2i) = (2+2i) + (-3-6i) = -1-4i$$

$$(b) z = z_1 + \frac{z_2}{z_3} = (1+i) + \frac{(-1-2i)}{i} = (1+i) + \frac{(-1-2i)}{i} \times \left(\frac{i}{i}\right) = (1+i) + \frac{-i-2i^2}{i^2}$$

(تذكر أن $i^2 = -1$)

$$z=(1+i)+\frac{-i+2}{-1}=(1+i)+(-2+i)=-1+2i$$

$$(c)\,z=z_1-z_2+z_3=(1+i)-(-1-2i)+(i)=1+i+1+2i+i=2+4i$$

$$(d)\,z=\frac{z_1+z_2}{z_1+z_3}=\frac{(1+i)+(-1-2i)}{(1+i)+(i)}=\frac{-i}{1+2i}=\frac{-i}{1+2i}\times\left(\frac{1-2i}{1-2i}\right)=\frac{-i-2}{1+4}$$ (لماذا؟)

$$z=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$$

$$(e)\,z=z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3=(1+i)(-1-2i)+(1+i)(i)=(1-3i)+(-1+i)=-2i$$

أو

$$z=z_1(z_2+z_3)=(1+i)[\,(-1-2i)+(i)\,]=(1+i)(-1-i)=-2i$$

$$(f)\,r=|z_1-z_2+z_3|=|(1+i)-(-1-2i)+(i)|=|2+4i|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

لاحظ أنه من ا طأ أن نوزع عملية القيمة ا طلقة على الأعداد .. أي أنه لا كن أن نقوم ل هذا ا زء (ا زء f) بالصورة التالية:

$$r=|z_1-z_2+z_3|=|z_1|-|z_2|+|z_3|$$

فهذا **خطأ** حيث أن: $|z_1-z_2+z_3|\neq|z_1|-|z_2|+|z_3|$

إذن لابد من القيام بأداء العمليات داخل علام القيمة ا طلقة قبل أن ري عملية القيمة ا طلقة

$$(g)\,r=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{(1+i)}{(-1-2i)}\right|=\left|\frac{(1+i)}{(-1-2i)}\times\left(\frac{-1+2i}{-1+2i}\right)\right|=\left|\frac{-3+i}{1+4}\right|=\frac{1}{5}|-3+i|=\frac{1}{5}\sqrt{9+1}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

أو

$$r=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{|1+i|}{|-1-2i|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

رينات (١)

إذا كان

$$z_1=1+i\quad,\quad z_2=1-i\quad,\quad z_3=1+i\quad,\quad z_4=i\quad,\quad z_5=6$$

احسب ناتج العمليات الآتية:

$$(i)\,z=z_1+z_2+z_3+z_4+z_5\left(=\sum_{i=1}^{5}z_i\right)\qquad (ii)\,z=z_1-z_2+z_3-z_4+z_5$$

$$(iii)\,z=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_3}{z_4}+\frac{z_5}{z_4}\qquad (iv)\,z=z_1(z_2+z_3)+z_4(z_5+z_3)$$

$(v)\, r = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| \left(= \sum_{i=1}^{4} |z_i| \right)$ $\qquad$ $(vi)\, r = \dfrac{|z_1 + z_2|}{|z_3 + z_4|}$

$(vii)\, r = |(z_1 + z_2) + z_3|$ $\qquad$ $(viii)\, z = z_1 z_2 \left(\dfrac{z_3}{z_4} + z_5 \right)$

$(ix)\, z = z_1 |z_2 + z_3|$ $\qquad$ $(x)\, \theta = Arg\left(\dfrac{z_1}{z_2} \right)$

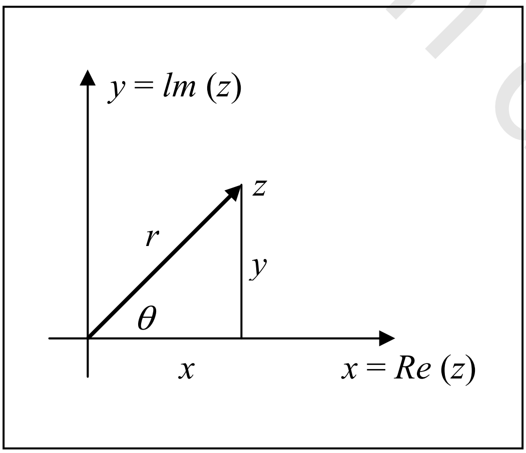
ملاحظة:

تعريف السعة لعدد مركب $z = a + ib$ هي (كما سبق): $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a} \right)$.

التعب الشكلي للأعداد ا ركبة

GRAPHICAL REPRESENTATION OF COMPLEX NUMBERS

لرسم هذه الأعداد أشكال فإنه لابد أن نعرف مستوياً (خالياً) للرسم عليه. ويتم ذلك برسم إحداثيات متعامدة (كما حالة الأعداد ا قيقية) على أن يكون ا ط الأفقي للأعداد ا قيقية وا ط الرأسي للأعداد التخيلية. ولذلك يسمى با ستوى التخيلي (أي ليس له وجود واقعي) كما هو موضح بالرسم ا قابل. وبالتا يأخذ العدد $z = x + iy$ صورة ا تجه ا وضح بالرسم والذي له x من الأعداد ا قيقية، y من الأعداد التخيلية. لاحظ أن طول ا تجه z هو:



$$r = |z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

كذلك لاحظ صحة العلاقات الآتية:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

هذا التعب الشكلي للعدد ا ركب قد ساعد على كتابة العدد ا ركب بدلالة عددين حقيقي آخرين غ x, y كما بالشكل؛ و ا r, θ. فإذا عرفنا طول العدد z (أي r) وعرفنا سعته (أي θ) فإنه كن تعي العدد ا ركب تعييناً كماً.

فإذا ما ع نا عن العدد ا ركب z بالعددين ا قيقي (x, y) فإن هذا يسمى بالتمثيل الكرتيزي Cartesian Representation للعدد z. أما إذا ع نا عنه بالعددين ا قيقي (r, θ) فإن هذا التمثيل يسمى بالتمثيل القط Polar Representation للعدد z. وإذا ما استخدمنا التمثيل الكرتيزى فإننا نع عن العدد z بالصورة $z=x+iy$، أما إذا استخدمنا التمثيل القط فإننا نع عن العدد z بصيغة أويلر Euler وا عروفة كالآ :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

وهذه الصيغة كننا من كتابة التمثيل القط كما يلي:

التمثيل القط للعدد ا ركب $z = x + iy$:

$$z = r\,e^{i\theta}$$

حيث

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

مثال ٢:

ء عن الأعداد ا ركبة الآتية بتمثيل آخر:

$$(a) z = 1 + i \qquad\qquad (b) z = 3e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

ا ل:

$(a)\ z = 1 + i$

التمثيل هنا كرتيزى وا طلوب التعب عنه بتمثيل قط .

$$\left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \left|\begin{matrix} r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow z = re^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

مع ملاحظة أن θ ب أن يع عنها بالتقدير الدائري وليس بالدرجات.

$(b)\ z = 3e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

التمثيل هنا قط وا طلوب التعب عنه بتمثيل كرتيزي.

$$\left.\begin{matrix} r = 3 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \equiv 60^\circ \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \left|\begin{matrix} x = r\cos\theta = \frac{3}{2} \\ y = r\sin\theta = \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow z = x + iy = \frac{3}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$$

ملاحظة:

ليس هناك فرق عند كتابة $\cos\theta$ (من حيث القيمة) عند استعمال θ بالدرجات أو بالدائري، وكذلك بالنسبة ميع النسب ا ثلثية الأخرى.

نظرية د وافر DEMOIVRE's THEOREM

إذا كان:

$$z_j = r_j e^{i\theta_j} \in \mathbf{Z} \quad , \quad j = 1,2,\ldots\ldots,n$$

فإن

$$\prod_{j=1}^{n} z_j = \left(\prod_{j=1}^{n} r_j\right).\left[\cos\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_j\right) + i\sin\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_j\right)\right]$$

$$= (r_1 r_2 \dots r_n).[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]$$

الإثبات:

حيث أن: $e^a \,.\, e^b = e^{a+b}$

إذن:

$$\prod_{j=1}^{n} z_j = \prod_{j=1}^{n} r_j e^{i\theta_j} = \left(\prod_{j=1}^{n} r_j\right)\cdot\left(\prod_{j=1}^{n} e^{i\theta_j}\right) = \left(\prod_{j=1}^{n} r_j\right)\cdot\left[e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} \,.....\, e^{i\theta_n}\right]$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{n} r_j\right)\cdot\left[e^{i(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n)}\right] = \left(\prod_{j=1}^{n} r_j\right)\cdot\left[e^{i\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_j\right)}\right]$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{n} r_j\right)\cdot\left[\cos\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_j\right) + i\sin\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_j\right)\right]$$

هذه النظرية مفيدة جداً ا سابات كم يتضح من ا ثال التا .

مثال ٣:

إذا كان: $z_1 = 1+i \quad , \quad z_2 = 1 - i \quad , \quad z_3 = i \quad , \quad z_4 = 2 + i$

أوجد: $z = z_1 z_2 z_3 z_4 = \prod_{j=1}^{4} z_j$

ا ل:

$$z = z_1 z_2 z_3 z_4 = (1+i)(1-i)(i)(2+i)$$

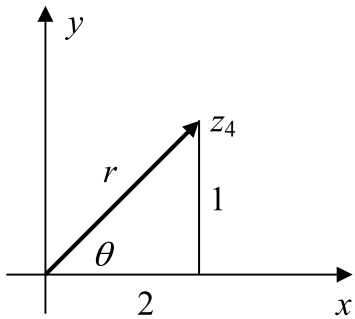
وبدلا من استخدام التمثيل الكرتيزي لكل عدد من الأعداد ا ركبة ا عطـاه، مـن الأنـسب استخدام التمثيل القط للأعداد استعمال نظرية د وافر السابقة.

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$z_3 = r_3 e^{i\theta_3} = 1\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$z_4 = r_4 e^{i\theta_4} = \sqrt{5}\,e^{i(\theta)}$$



حيث

$$\theta_4 = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.464 \text{ rad.}$$

وباستعمال نظرية د وافر صل على:

$$z = z_1 z_2 z_3 z_4 = \left[\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right]\cdot\left[\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right]\cdot\left[1\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right]\cdot\left[\sqrt{5}e^{i\theta}\right]$$

$$= \left[\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 1\cdot\sqrt{5}\right]\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = 2\sqrt{5}\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

$$= 2\sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right] = 2\sqrt{5}\left[-\sin\theta + i\cos\theta\right]$$

$$= 2\sqrt{5}\left[-\frac{1}{\sqrt{5}}+i\frac{2}{\sqrt{5}}\right] = -2+4i$$

صيغة أخرى لنظرية د وافر:

$$(\cos\theta \pm i\sin\theta)^n = \cos n\theta \pm i\sin n\theta$$

حيث n أي عدد نسـ $(n \in \boldsymbol{R})$.

الإثبات:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

وبا ثل (حيث أن $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos$):

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^n = (e^{i(-\theta)})^n = e^{i(-n\theta)}$$

$$= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

مثال ٤:

ضع ا قدار التا أبسط صورة كنة:

$$z = \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)^6(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{-5}}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^7(\cos 4\theta - i\sin 4\theta)^3}$$

ا ل:

بتطبيق نظرية د وافر:

$$z = \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)^6(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{-5}}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^7(\cos 4\theta - i\sin 4\theta)^3}$$

$$= \frac{(\cos 6\theta - i\sin 6\theta)(\cos(-10\theta) + i\sin(-10\theta))}{(\cos 21\theta + i\sin 21\theta)(\cos 12\theta - i\sin 12\theta)}$$

$$= \frac{(\cos 6\theta - i\sin 6\theta)(\cos 10\theta - i\sin 10\theta)}{(\cos 21\theta + i\sin 21\theta)(\cos 12\theta - i\sin 12\theta)}$$

$$= \frac{\cos(-16\theta) + i\sin(-16\theta)}{\cos 9\theta + i\sin 9\theta}$$ (لماذا؟)

$$= \cos(-25\theta) + i\sin(-25\theta)$$ (لماذا؟)

$$= \cos 25\theta - i\sin 25\theta$$

لاحظ أننا حلنا السابق استعملنا العلاقات التالية:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$
$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} \cdot e^{-i\theta_2} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

ملاحظة هامة:

هناك تطبيقات هامة لنظرية د وافر حيث كننا إ اد $\sin n\theta, \cos n\theta$ بدلالة قوى $\sin\theta,$ $\cos\theta$ **فمثلاً** خذ ا فكوك $(\cos\theta + \sin\theta)^4$، فإنه باستعمال مفكوك ذات ا دين:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos^4\theta + 4\cos^3\theta\,(i\sin\theta) + 6\cos^2\theta(i^2\sin^2\theta) + 4\cos\theta(i^3\sin^3\theta) + i^4\sin^4\theta$$

وباستعمال الدورة الرباعية لـ I فإن:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = (\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta) + i(4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta) \qquad (1)$$

كذلك فإنه باستعمال نظرية د وافر:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta \qquad (2)$$

و قارنة (2) ,(1) ومساواة ا زء ا قيقي با زء ا قيقي وا زء التخيلي با زء التخيلـي كلٍ منهما فإننا صل على هذين ا فكوك :

$$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$$

$$\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$$

وهكذا كننا، وبنفس الأسلوب دائماً، إ اد مفكـوك $\cos n\theta$ أو $\sin n\theta$ بدلالـة قـوى $\sin\theta, \cos\theta$.

و ب أن نذكر هنا أنه كننا القيام بالعكس، أي أنه كننا فك $\cos^n\theta$ و $\sin^n\theta$ بدلالة $\cos m\theta$ و $\sin m\theta$ حيث $1\le m\le n$. فمثلاً إذا وضعنا

$$x = \cos\theta + i\sin\theta$$

فإن

$$\frac{1}{x} = \cos\theta - i\sin\theta$$

(اذا؟) وبالتا تكون:

$$x^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$\frac{1}{x^n} = (\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

أي أنه كننا ا صول على الآ :

$$2\cos\theta = x + \frac{1}{x} \quad , \quad 2\cos n\theta = x^n + \frac{1}{x^n}$$

$$2i\sin\theta = x - \frac{1}{x} \quad , \quad 2i\sin n\theta = x^n - \frac{1}{x^n}$$

وبالتا   إذا طلب مفكوك $\cos^5\theta$ فإن:

$$(2\cos\theta)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^5$$

وباستخدام مفكوك ذات ا دين:

$$(2\cos\theta)^5 = x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}$$

وبإعادة التجميع:

$$\begin{aligned}(2\cos\theta)^5 &= \left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right) + 5\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)10\left(x + \frac{1}{x}\right)\\ &= (2\cos 5\theta) + 5(2\cos 3\theta) + 10(2\cos\theta)\\ &= 2\cos 5\theta + 10\cos 3\theta + 20\cos\theta\end{aligned}$$

وبالقسمة على 2^5 فإننا صل على:

$$\cos^5\theta = \frac{1}{16}\cos 5\theta + \frac{5}{16}\cos 3\theta + \frac{5}{8}\cos\theta$$

وهذا ا فكوك يفيد جدا   تكامل أمثال هذه الدوال على الأقل.

رينات ٢

(١) أثبت أن $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

(٢) أوجد $\sin^3\theta$, $\cos^3\theta$ بدلالة $\cos m\theta$, $\sin m\theta$ حيث $1 \le m \le 2$ وبالتا أوجـد $\int \sin^3\theta d\theta$ بشكل عام.

(٣) أوجد $\sin 3\theta, \cos 3\theta$ بدلالة قوى $\sin\theta, \cos\theta$.

(٤) كرر السؤال (٢) بالنسبة لـ $\sin^6\theta$.

(٥) كرر السؤال (٣) بالنسبة لـ $\sin 6\theta$.

إ اد ا ذور النونية للأعداد ا ركبة

THE n^th ROOT OF THE COMPLEX NUMBERS

دع $z = r\, e^{i\theta} = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

فإن
$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \left(re^{i\theta}\right)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(e^{i(\theta+2\pi k)}\right)^{\frac{1}{n}} \quad , \quad k = 0,1,2,\dots,n-1$$
$$= r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right]$$

وعندما تكون $k = 0$ فإن القيمة تسمى بالقيمة الأساسية Principal Value، نـضع $k = 1$ $k = 2$ .. إ وذلك للحصول على ا ذور ا ختلفة.

ملاحظات:

ملحوظة (١):

لا كننا ا صول على ا ذور باستخدام التعب الكرتيزي .. لذا لابد من التحويل إ الصورة القطبية.

ملحوظة (٢):

إضافة $2\pi k$ إ θ سعة العدد ا ركب تعطي يع الاحتمالات ا مكنة لإعطاء جذور، حيث أن إضافة هذا العدد الزوجي من π عل العدد ا ركب يعود إ قيمته ولكن القسمة على n تعدد القيم فنحصل على ا ذور. فمثلاً كننا إ اد $\sqrt{1+i}$ كالتا :

حيث أن: $1+i=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

إذن:

$$\sqrt{1+i}=\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi/4+2\pi k}{2}\right)},\quad k=0,1$$
$$=2^{\frac{1}{4}}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi k\right)}\quad,\quad k=0,1$$

وبالتا   يكون ا ذران كالتا :

$$z_1=2^{\frac{1}{4}}e^{i\left(\frac{\pi}{8}\right)}=2^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]\quad,\quad(\mathrm{k}=0)$$

$$2^{\frac{1}{4}}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)}=2^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right]\quad,\quad(\mathrm{k}=1)$$

ملحوظة (٣):

كننا ا صول على جذور الواحد الصحيح كالآ :

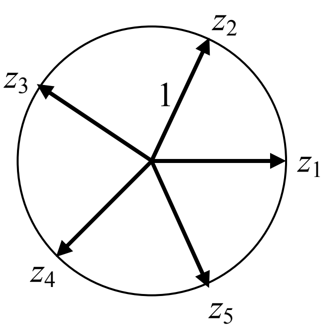
حيث أن: $1=1\,e^{i(0)}$

إذن $(1)^{\frac{1}{n}}=1^{\frac{1}{n}}\left(e^{i(0+2\pi k)}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{i\left(\frac{2\pi k}{n}\right)}\quad,\quad k=0,1,2,\ldots,n-1$

فمثلاً $(1)^{\frac{1}{5}}=e^{i\left(\frac{2\pi k}{5}\right)}\quad,\quad k=0,1,2,3,4$

فيكون

$$z_1=1\quad,\quad z_2=e^{i\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$$
$$z_3=e^{i\left(\frac{4\pi}{5}\right)}\quad,\quad z_4=e^{i\left(\frac{6\pi}{5}\right)}$$
$$z_5=e^{i\left(\frac{8\pi}{5}\right)}$$



وكأننا قسمنا دائرة نصف قطرها الوحدة إ   سة أقسام متساوية كما هو مب   بالشكل.

ملحوظة (٤):

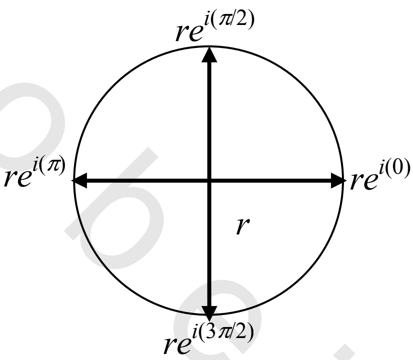
أي عدد حقيقي موجب كن كتابته كالآ : $r = re^{i(0)}$

وأي عدد يلي موجب كن كتابته كالآ : $ri = re^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

وأي عدد حقيقي سالب كن كتابته كالآ : $r = |r|e^{i(\pi)}$

وأي عدد يلي سالب كن كتابته كالآ : $ri = |r|e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$

و كن تصور الوضع كما الشكل ا قابل.



رينات ٣

(١) أوجد ا ذور الآتية:

$(a)\ \sqrt[4]{1-i}$ $(b)\ \sqrt{1+2i}$ $(c)\ \sqrt[4]{i}$ $(d)\ \sqrt[3]{5}$

(٢) أثبت أن

$$x^n - (a+ib) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x - r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right]\right)$$

حيث: $r = \sqrt{a^2+b^2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

(٣) أوجد حل ا عادلة: $x^4 + a^4 = 0$

(٤) أوجد: $S = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^k}\cos kx\right)$

مساعدة: كنك تعريف متسلسلة لا ائية أخرى هي: $C = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^k}\sin kx\right)$

إ اد الكمية $S+iC$.

الإجابة: $S = \dfrac{9-3\cos x}{10-6\cos x}$

رينات عامـة

(١) أثبت أن: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$

(٢) أثبت أن: $\dfrac{a+ib}{a-ib} - \dfrac{a-ib}{a+ib} = \dfrac{4abi}{a^2+b^2}$

(٣) إذا كان $(x+iy)^4 = a+ib$

اثبت أن: $a^2 + b^2 = (x^2+y^2)^4$

(٤) أوجد $\mathrm{Re}\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ حيث n عدد صحيح موجب.

(٥) أوجد $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\cos k\theta$ **الإجابة:** $e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$

(٦) أثبت أن $\left|\dfrac{4+\cos\phi - i\sin\theta}{4+\cos\phi + i\sin\theta}\right| = 1$

(٧) أوجد جذور ا عادلة: $1 + x^3 + x^4 + x^7 = 0$

(٨) أثبت أن: $$\frac{\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{11}{2}}}{\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{2}}} = -1$$

مد ا

المراجع

1. E.G. Phillips, Functions of a complex variable, Oliver and Boyd, London, 1958.

2. M.J. Ablowitz and A.S. Fokas, Complex variables Introduction and applications, 2nd ed., Cambridge Univ. press, 2003.

3. R.V. Churchill and J.W. Brown, Complex Variables and applications, 5th ed., McGraw-Hill, N.Y., 1990.

4. M.R. Spiegel, Complex Variables, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, N.Y., 1974.