الباب الخامس

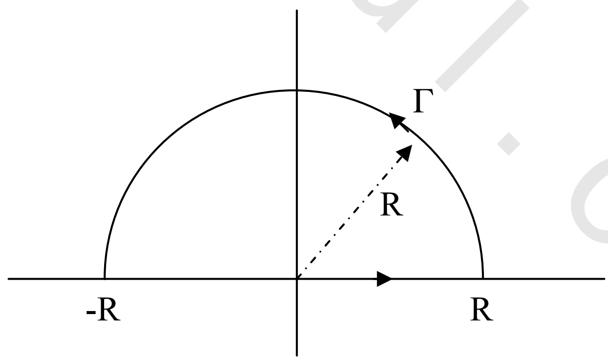
تطبيقات في التكامل المحدود
Applications on Definite Integrals

٥-١ مقدمة

من أهم التطبيقات الـ كن أن نستفيد ـا من نظرية الباقي هو حساب بعض التكاملات الـ ـدودة .. والـ كانت ـثل صعوبة أو حـ مستحيلة الـ ـل R. ويتطلب التطبيق شروطاً خاصة سيتم ذكرها .. ولكن بشكل عام لا بد من تطبيق نظرية الباقي على دالة ـتارة بدقة $f(z)$ وعلى مسار مغلق ـتار بعناية وخـ ـة Contour.

٥-١-١ تكاملات على صورة $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$, $F(x)$ دالة نسبية rational

هذه الـ ـال احسب التكامل $\oint_C F(z)dz$ على الـ ـسار الـ ـغلق الـ ـبـ شكل (٥-١)



(شكل ٥-١)

ويتطلب الأمر بالنسبة لشكل (٥-١) حذقاً ومهارة لإ ـاد التكامل على الـ ـسار Γ عندما $R\to\infty$.

عارض ٥-١

إذا كانت $\left|F(z)\right| \le \dfrac{M}{R^k}$ لـ $z = Re^{i\theta}$ حيث $k > 1$ وM ثابت فإن

$\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\Gamma} F(z)dz = 0$ على نصف الدائرة Γ ا بينة شكل (٥-١).

الإثبات:

$$\left|\int_{\Gamma} F(z)dz\right| \le \int_{\Gamma} \left|F(z)\right|\left|dz\right|$$

$$\le \int_{\Gamma} \frac{M}{R^k}\left|i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\,d\theta\right|$$

$$= \frac{M}{R^k}\pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

فإذا كانت $k > 1$ فإن

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| = 0$$

وبالتا

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

مثال ٥-١ (مثال اختباري)

أحسب $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

ا ل:

من ا عروف لدينا أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x\,\Big|_{o}^{\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \pi$$

فدعنا ﺘ ا سار C شكل (٥-١) ..

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i\left(\sum R_i\right)$$

ولكن $$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^2}$$

ولكن عند $z = Re^{i\theta}$ (على Γ) ، $$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

$$= \frac{1}{1+R^2 e^{2i\theta}}$$

وبالتا فإن

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{1+R^2 e^{2i\theta}}\right| \le \frac{1}{\left|R^2 e^{2i\theta}\right| - |1|} \quad ، \quad |z_1 + z_2| \ge |z_1| - |z_2|$$

$$= \frac{1}{R^2 - 1}$$

ولكن $R\to\infty$ وبأخذ R كبـ ة بشكل كا

وليكن $$\Leftarrow \frac{1}{R^2} < \frac{1}{4} \quad \Leftarrow R^2 > 4 \quad \Leftarrow R > 2$$

$$\frac{R^2}{R^2-1} < \frac{4}{3} \Leftarrow \frac{R^2-1}{R^2} > \frac{3}{4} \Leftarrow 1 - \frac{1}{R^2} > \frac{3}{4} \Leftarrow -\frac{1}{R^2} > -\frac{1}{4}$$

أي أن $$\frac{1}{R^2-1} < \frac{(4/3)}{R^2}$$

وبالتا وطبقا لعارض (٥-١) فإن

$$|F(z)| \le \frac{M}{R^k}$$

حيث $M = \frac{4}{3}$ و $k = 2 > 1$ .. وهذا معناه طبقاً للعارض أن $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)dz = 0$

أي أن $$\lim_{R\to\infty}\oint_C \frac{dz}{1+z^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\pi i\left(\sum R_i\right)$$

والآن فإن $1+z^2=0$ ا جذران ا $z=\pm i$

وبالتا عندنا قطبان يس ان عند $z=\pm i$ أحد ا داخلي والأخر خارجي فيهمل وبالتا :

$$R=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{1+z^2}=\lim_{z\to i}\frac{1}{2z}=\frac{1}{2!}$$

وبالتا فإن $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\pi i\left[\frac{1}{2!}\right]=\pi$$

وهي نفس قيمة التكامل ا سوبة سابقاً.

والآن كننا إجراء تكاملات صعبة بتيس نظرية الباقي وهذا ا سار ا غلق ا دهش .. مثل ..

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4},\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^6}$$

وجدير بالذكر أننا كننا وضع

$$\left|\frac{1}{1+z^4}\right|=\left|\frac{1}{1+R^4e^{i4\theta}}\right|\le\frac{1}{R^4-1}$$

وبأخذ $$1-\frac{1}{R^4}>\frac{15}{16}\Leftarrow\frac{1}{R^4}<\frac{1}{16}\Leftarrow R^4>16\Leftarrow R>2$$

أي أن $$\frac{R^4}{R^4-1}<\frac{16}{15}\Leftarrow\frac{R^4-1}{R^4}>\frac{15}{16}$$

أي أن $$\frac{1}{R^4-1}<\frac{(16/15)}{R^4}$$

وبالتا فإن $$|f(z)|\le\frac{M}{R^4},k=4>1$$

أي أن $$\lim_{0\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz=0$$

وهكذا با ثل لبقية الدوال ا شا ة.

مثال ٥-٢:

أوجد $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$

ا ل:

باستعمال نفس ا سار ا غلق شكل (٥-١) .. فإن

$$\oint_C \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} + \int_{\Gamma} \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2}$$
$$= 2\pi \mathrm{i} \sum R_\mathrm{i}$$

والآن فإنه على Γ $(z = R\, e^{\mathrm{i}\theta})$

$$\left|f(z)\right| = \frac{1}{\left|1+z^2\right|^2} = \frac{1}{\left|1+R^2 e^{2i\theta}\right|} \le \frac{1}{\left(\left|R^2 e^{2i\theta}\right|-1\right)^2}$$
$$= \frac{1}{\left(R^2-1\right)^2}$$

ولكن
$$\frac{1}{R^2-1} < \frac{4/3}{R^2}$$

إذن
$$\frac{1}{\left(R^2-1\right)^2} < \frac{16/9}{R^4} = \frac{M}{R^k}, \quad k>1$$

وبالتا فإن
$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\Gamma} \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2} \right| = 0$$

أي أن
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2} = 0$$

وبالتا فإن
$$\oint_C \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$$
$$= 2\pi i\left[\sum R_i\right]$$

والآن عندما قطب من الرتبة الثانية عند $z = i$ وبالتا فإن

$$R = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}(z-i)^2\frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2}$$

$$= \lim_{z\to i}\ \frac{-2(z+i)}{(z+i)^4}$$

$$= \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-1}{4i(-1)} = \frac{1}{4i}$$

وبالتا فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = 2\pi i\left[\frac{1}{4i}\right] = \frac{\pi}{2}$$

مثال ٥-٣:

أوجد $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^8}$

وهذه مسألة صعبة وليست يس ة .. ولكن دعنا نشاهد كيف تس الأمور ـذا الأسـلوب ا ديد والشيق:

مقدماً فإن (اذا؟) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^8} = 2\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^8}$

كذلك فإنه على Γ:

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{1+z^8}\right| = \frac{1}{\left|z^8+1\right|} \le \frac{1}{R^8e^{i86}-1}$$

$$= \frac{1}{R^8-1}$$

ولكن إذا كانت R كب ة بشكل كا مثلا $R > 2$ فإن

$$1-\frac{1}{R^8}>1-\frac{1}{2^8}\Leftarrow\frac{1}{R^8}<\frac{1}{2^8}\Leftarrow R^8>2^8$$

$$\frac{R^8}{R^8-1}<\frac{2^8}{2^8-1}\Leftarrow\frac{R^8-1}{R^8}>\frac{2^8-1}{2^8}$$

$$\frac{1}{R^8-1}<\frac{M}{R^8}=\frac{M}{R^k}\qquad,\qquad k>1$$

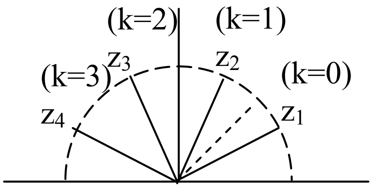
وباستخدام نتيجة العارض ٥-١ فإن

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma\frac{dz}{1+z^8}\right|=0\Rightarrow\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma\frac{dz}{1+z^8}=0$$

وهذا علنا مطمئن إ أن

$$\oint_C\frac{dz}{1+z^8}=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^8}$$
$$=2\pi i\left[\sum R_i\right]$$

والآن ساب البواقي فإن



$$1+z^8=0\Rightarrow z^8=-1=e^{i(\pi+2\pi k)}$$

وبالتا فإن $z=e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}\right)},k=0,1,2,3$ داخل ا سار

وكلها أقطاب يس ة وبالتا فان

$$R_1=\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{8}}}\frac{z-e^{i\frac{\pi}{8}}}{1+z^8}\qquad,\qquad(k=0)$$
$$=\frac{1}{8e^{i7\frac{\pi}{8}}}=\frac{1}{8}\left(\cos\frac{7\pi}{8}-i\sin\frac{7\pi}{8}\right),\alpha=\frac{\pi}{8}$$
$$=\frac{1}{8}(\cos(\pi-\alpha)-i\sin(\pi-\alpha))=\frac{1}{8}(-\cos\alpha-i\sin\alpha)$$

$$R_2 = \lim_{z \to e^{i\frac{3\pi}{8}}} \frac{z - e^{i\frac{3\pi}{8}}}{1+z^8} \quad , \quad (k=1)$$

$$= \frac{1}{8\,e^{i\frac{21\pi}{8}}} = \frac{1}{8} e^{-i\frac{5\pi}{8}} = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{5\pi}{8} - i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cos(\pi - 3\alpha) - i\sin(\pi - 3\alpha)\right)$$

$$R_3 = \lim_{z \to e^{i\frac{5\pi}{8}}} \frac{z - e^{i\frac{5\pi}{8}}}{1+z^8} \quad , \quad (k=2)$$

$$= \lim_{z \to e^{i\frac{5\pi}{8}}} \frac{1}{8\,z^7} = \frac{1}{8e^{i\frac{35\pi}{8}}}$$

$$= \frac{1}{8} e^{-i\frac{3\pi}{8}} = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8} - i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(\cos 3\alpha - i\sin 3\alpha)$$

وأيضا

$$R_4 = \lim_{z \to e^{i7\frac{\pi}{8}}} \frac{z - e^{i7\frac{\pi}{8}}}{1+z^8} \quad , \quad (k=3)$$

$$= \frac{1}{8\,e^{i49\frac{\pi}{8}}} = \frac{1}{8} e^{-i\frac{\pi}{8}}$$

$$= \frac{1}{8}(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

وبالتا فإن

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^8} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^8}$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi i)\left[\frac{1}{8}\right][-\cos\alpha - i\sin\alpha - \cos 3\alpha - i\sin 3\alpha$$

$$+\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha + \cos\alpha - i\sin\alpha]$$

$$= \frac{\pi i}{8}[-2i\sin\alpha]$$

$$= \frac{\pi}{4}\sin\alpha \quad , \quad \alpha = \frac{\pi}{8}$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^8} = \frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{8}}$$

ولا بد أن ننتبه فنحن سب البواقي للأقطاب الداخلية فقط .. ونستعمل نتيجة العارض ٥-١ ذر ولابد أن نثبتها دائما ولا نفترض وجودها ..

مثال ٥-٤:

أحسب $$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}$$

ا ل:

الدالة $$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$$

ا قطب عند i = z من الرتبة الثانية داخـل ا ـسار نـصف الـدائري وكـذلك فـإن z2 + 2z + 2 = 0 تعطي $z = \frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}$ أي أن z = -1±i ومنهما فإن z = -1+i قطب يسـ داخلي و كننا حساب البواقي كالآ :

$$R_1 = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}(z-i)^2\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+2z+2)}$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{(z+i)^2(z^2+2z+2)(2z)-z^2\left[(z+i)^2(2z+2)+(z^2+2z+2)^2(z+i)\right]}{(z+i)^4(z^2+2z+2)^2}$$

$$=\frac{(2i)^2(1+2i)(2i)+\left[(2i)^2\,2(i+1)+(1+2i)2(2i)\right]}{(2i)^4(1+2i)^2}$$

$$=\frac{-8i(1+2i)-8(i+1)+4i(1+2i)}{16(1+4i-4)}$$

$$=\frac{-12i}{16(-3+4i)}\cdot\frac{-3-4i}{-3-4i}=\frac{12i(3+4i)}{16(9+16)}=\frac{1}{100}(-12+9i)$$

$$R_2=\lim_{z\to -1+i}(z+1-i)\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+1+i)(z+1+i)}$$

$$=\frac{(-1+i)^2}{\left[(-1+i)^2+1\right]^2[-1+i+1+i]}$$

$$=\frac{(-2i)}{(-2i+1)^2(2i)}$$

$$=\frac{-1}{1-4i-4}$$

$$=\frac{-1}{-3-4i}$$

$$=\cdot\frac{1}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}$$

$$=\frac{3-4i}{9+16}$$

$$=\frac{3-4i}{25}$$

والآن فإنه علي Γ:

$$|f(z)| = \left|\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\right|$$

$$= \frac{|z|^2}{|z^2+1|^2\,|(z+1-i)|\,|(z+1+i)|}$$

$$= \frac{|R^2e^{2i\theta}|}{|R^2e^{2i\theta}+1|^2\,|R\,e^{i\theta}+(1-i)|\,|R\,e^{i\theta}+(1+i)|}$$

$$\le \frac{R^2}{(R^2-1)^2(R-|1-i|)(R+|1+i|)}$$

$$= \frac{R^2}{(R^2-1)^2(R-2)(R+2)}$$

$$= \frac{R^2}{(R^2-1)^2}\cdot\frac{1}{R^2-4} = \frac{R^4}{(R^2-1)^2}\cdot\frac{R^2}{R^2-4}\cdot\frac{1}{R^2}$$

بأخذ $R > 3$ مثلاً فإن $R^2 > 9$

أي أن (1) $\quad \frac{1}{R^2} < \frac{1}{9}$

أي أن $1-\frac{1}{R^2} > \frac{8}{9}$ أي أن $\frac{R^2-1}{R^2} > \frac{8}{9}$ أي أن

$\frac{R^2}{R^2-1} < \frac{9}{8}$ وبالتربيع فإن

$$\frac{R^4}{(R^2-1)^2} < \frac{81}{64} \qquad (2)$$

كذلك فإن من العلاقة $\frac{1}{9} < \frac{1}{R^2}$ .. أي أن

$$\frac{4}{9} < \frac{4}{R^2} \qquad \text{وبالتالي فإن} \qquad 1 - \frac{4}{R^2} > \frac{5}{9}$$

أي أن $\frac{R^2-4}{R^2} > \frac{5}{9}$ .. أي أن $\frac{R^2}{R^2-4} < \frac{9}{5}$ .. أي أن

$$\frac{1}{R^2-4} < \frac{9/5}{R^2} \qquad (3)$$

من (1), (2), (3) فإن

$$|f(z)| \le \frac{81}{64} \cdot \frac{9/5}{R^2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{M}{R^k}, \qquad k > 1$$

وبالتالي فإن $\lim_{R\to\infty} \left| \int_\Gamma f(z)dz \right| = 0$

أي أن $\int_\Gamma f(z)dz = 0$

وبالتالي فإن

$$\oint_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i[R_1 + R_2]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{100}(-12+9i) + \frac{1}{25}(3-4i)\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{-12}{100} + \frac{9i}{100} + \frac{12}{100} - \frac{16i}{100}\right] = 2\pi i\left(-\frac{7i}{100}\right)$$

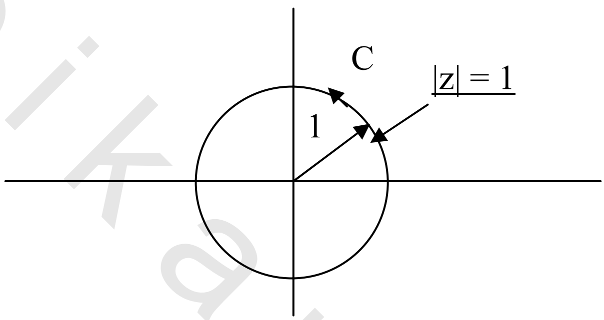
$$= \frac{7\pi}{50}.$$

وأرجو ملاحظة الصعوبة والدقة ال نثبت فيها أن التكامل على Γ مساوياً للصفر .. ونعلم أن

R→∞ ونأخذ القيمة ا ناسبة $R>l$ الـ تناسب ا سألة .. وللعلم فإن $R > 2$ لا تناسـب هذه ا سألة (اذا؟).

٥-١-٢ تكاملات على صورة $\int_0^{2\pi} G(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$ **حيث ( )G دالة نسبية** **sin θ أو cos θ.**

هذه ا الة نستعمل ا سار ا غلق ا وضع بشكل (٥-٢)



(شكل ٥-٢)

وبالتا فإن $z = e^{i\theta}$ وتكون $\sin\theta = \dfrac{z - \frac{1}{z}}{2i}$ وكـذلك $\cos\theta = \dfrac{z + \frac{1}{z}}{2}$ وأيـضا

$dz = i\, z\, d\theta$

وبالتا سب التكامل $\oint_C F(z)\,dz$ بنظرية الباقي.

مثال ٥-٥:

أحسب $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$

ا ل:

كلنا نعلم التعويضات ا شهورة لأمثال هذا التكامل .. ودعنا نرى كيف تسـ الأمور باستعمال نظرية الباقي .. باستعمال ا سار الدائري $|z| = 1$ .. فإن

$$d\theta=\frac{dz}{iz}\qquad,\qquad \sin\theta=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$$

وبالتا فإن

$$\frac{d\theta}{2+\sin\theta}=\frac{\frac{dz}{iz}}{2+\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}}=\frac{2idz}{4i+z-\frac{1}{z}}\frac{1}{iz}$$

$$=\frac{2dz.z}{z^2+4iz-1}.\frac{1}{z}$$

$$=2\frac{dz}{z^2+4iz-1}$$

ولكن $z^2+4iz-1=0$ تعطي ا ذرين $z=\left(-2\pm\sqrt{3}\right)i$ والع ة بالذي داخل ا سار وهو $z=\left(-2+\sqrt{3}\right)i$ حيث $\left|-2+\sqrt{3}\right|<1$ وبالتا فإن

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}=\oint_{\substack{C\\|z|=1}}\frac{2dz}{\left(z^2+4iz-1\right)}$$

$$=2\pi i(R)$$

حيث

$$R=\lim_{z\to\left(-2+\sqrt{3}\right)i}\frac{\left(z-\left(-2+\sqrt{3}\right)i\right)2}{\left(z-\left(-2+\sqrt{3}\right)i\right)\left(z-\left(-2-\sqrt{3}\right)i\right)}$$

$$=\frac{2}{\left(-2+\sqrt{3}\right)i+\left(2+\sqrt{3}\right)i}$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{3}\,i}$$

وبالتا فإن

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta} = 2\pi i \frac{2}{2\sqrt{3}\, i}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

وعلى القارئ أن يعلم أن التكامل

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad , \quad a > |b|.$$

و كنه ﺎولة إثبات ذلك بشكل عام .. ونلاحظ فشلنا إ اد التكامل حالة $a = |b|$ ذه الطريقة (اذا؟).

مثال ٥-٦

أثبت أن

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta + c\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}$$

إذا كان $a^2 > b^2 + c^2$

ا ل:

بأخذ ا سار ا غلق $c: |z| = 1$ فإنه على c يكون

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow \sin\theta = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i},\ \cos\theta = \frac{z+\frac{1}{z}}{2},\ d\theta = \frac{dz}{iz}$$

وبالتا فإن

$$\frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta} = \frac{dz/iz}{a+\frac{b}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{c}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$$

$$= \frac{(dz)2i}{iz\left(2ai+bi\left(\frac{z^2+1}{z}\right)+c\frac{(z^2-1)}{z}\right)}$$

$$= \frac{2dz.z}{z\left((bi+c)z^2+2aiz+(bi-c)\right)}$$

$$= \frac{2dz}{(c+bi)z^2+2aiz+(-c+bi)}$$

ولكن جذور ا عادلة $(c+bi)z^2 + 2aiz + (-c + bi) = 0$ هي

$$z = \frac{-2ai \pm \sqrt{-4a^2 - 4((c+bi)(-c+bi))}}{2(c+bi)}$$

$$= \frac{-ai \pm \sqrt{-a^2 + c^2 + b^2}}{(c+bi)} \cdot \frac{c-bi}{c-bi}$$

$$= \frac{-ai \pm \sqrt{a^2 - \left(c^2 + b^2\right)}\, i}{c^2 + b^2} (c - bi),\ a^2 > c^2 + b^2$$

$$= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - \left(c^2 + b^2\right)}}{c^2 + b^2} (b + ci)$$

بالتا فعندنا قطبان عند

$$z_1 = \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - \left(c^2 + b^2\right)}}{c^2 + b^2} \right) (b + ci)$$

وَ

$$z_2 = \left(\frac{-a - \sqrt{a^2 - \left(c^2 + b^2\right)}}{c^2 + b^2} \right) (b + ci)$$

ولكن

$$|z_1| = \frac{\left|a - \sqrt{a^2 - \left(c^2 + b^2\right)}\right|}{c^2 + b^2} \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$= \left| \frac{a - \sqrt{a^2 - \left(c^2 + b^2\right)}}{\sqrt{c^2 + b^2}} \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 - \left(c^2 + b^2\right)}}{a + \sqrt{a^2 - \left(c^2 + b^2\right)}} \right|$$

$$= \left| \frac{a^2 - \left(a^2 - \left(c^2 + b^2\right)\right)}{\left(\sqrt{c^2 + b^2}\right)\left(a + \sqrt{a^2 - \left(c^2 + b^2\right)}\right)} \right|$$

$$= \left| \frac{\sqrt{c^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2-\left(c^2+b^2\right)}} \right|$$

طالما أن $a^2 > c^2 + b^2$ $\quad < 1$

وبالتالي فإن z_1 قطب داخلي interior pole ولكن z_2 خارجي (لماذا؟).

وبالتالي فإن

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta} = \oint_{\substack{C \\ |z|=1}} \frac{2dz}{(c+bi)z^2+2aiz+(-c+bi)}$$

$$= 2\pi i R$$

$$R = \lim_{z\to z_1} (z-z_1)\cdot \frac{2}{(c+bi)z^2+2aiz+(-c+bi)}$$

$$= \lim_{z\to z_1} \frac{2}{2(c+bi)z+2ai}$$ (بتطبيق قاعدة لوبيتال)

$$= \frac{2}{2(c+bi)z_1+2ai}$$

$$= \frac{2}{2(c+bi)\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-\left(b^2+c^2\right)}}{c^2+b^2}\right)i(c-bi)+2ai}$$

$$= \frac{1}{i\left(\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-\left(b^2+c^2\right)}}{c^2+b^2}\right)\left(c^2+b^2\right)+a\right)}$$

وبالتالي فإن

$$R = \frac{-i}{\sqrt{a^2-\left(b^2+c^2\right)}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta}=2\pi i\frac{-i}{\sqrt{a^2-\left(b^2+c^2\right)}}$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-\left(b^2+c^2\right)}}$$

بشرط أن $a^2 > (b^2 + c^2)$

٥-١-٣ تكاملات على صورة $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\begin{matrix}\cos mx\\ or\\ \sin mx\end{matrix}\right).F(x)dx$ حيث $F(x)$ دالة نسبية

هذه ا الة نأخذ ا سار c الذي شكل (٥-١) ونكامل الدالة $F(z)e^{imz}dz$ على c. وننتظر طبعاً مشكلة التكامل على Γ .. والعارض القادم يواجه هذه ا شكلة.

عارض ٥-٢

إذا كانت $|F(z)|\le \frac{M}{R^k}, \mathrm{k}>0$ على $z = R\,e^{i\theta}$, M ثابت فإن

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} F(z)e^{imz}dz=0$$

الإثبات:

على Γ فإن $z = R\,e^{i\theta}$ وبالتا

وبالتا

$$\int_{\Gamma} e^{imz}F(z)dz=\int_0^{\pi} e^{im\mathrm{Re}^{i\theta}}F\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\,d\theta$$

$$\left|\int_0^{\pi} e^{im\mathrm{Re}^{i\theta}}F\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\,d\theta\right|\le\int_0^{\pi}\left|e^{im\mathrm{Re}^{i\theta}}\right|\left|F\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right|\left|i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\right|d\theta$$

$$\le\frac{M}{R^k}\int_0^{\pi}\left|e^{imR\,(\cos\theta+i\sin\theta)}\right|Rd\,\theta$$

$$=\frac{M}{R^k}\int_0^{\pi}\underbrace{\left|e^{imR\cos\theta}\right|}_{1}\left|e^{-mR\sin\theta}\right|Rd\theta$$

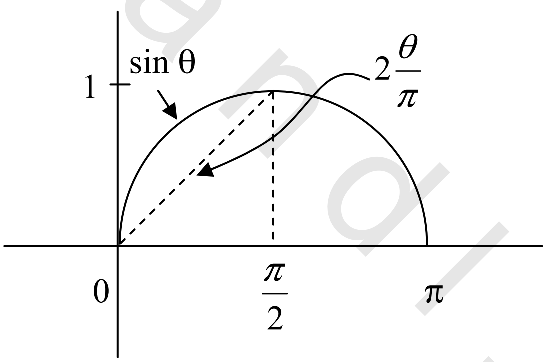
$$= \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta}\, d\theta$$

وذلك لأن $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ متماثلة حول $\frac{\pi}{2}$.

وبالنظر للشكل (٥-٣) فإن

$$\frac{2\theta}{\pi} \le \sin\theta \qquad , \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$



شكل (٥-٣)

وبالتا فإن

$$\frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta} d\theta \le \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\left(2\frac{\theta}{\pi}\right)} d\theta$$

(اذا؟)

$$= \frac{2M}{R^{k-1}} \frac{-\pi}{2mR} e^{-2mR\frac{\theta}{\pi}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{-M\pi}{mR^k}\left(e^{-mR} - 1\right)$$

$$= \frac{M\pi\left(1 - e^{-mR}\right)}{mR^k}$$

والآن عندما $R\to\infty$ فإن

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma e^{imz}F(z)dz\right| = 0$$

وبالتا فإن

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma e^{imz}F(z)dz = 0$$

لاحظ أنه للاستفادة من العارض ٥-٢ فلابد من إثبات أن $k > 0$, $|F(z)| \le \frac{M}{R^k}$ على Γ.

مثال ٥-٧

أثبت أن $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx = \pi e^{-m}$

الإثبات

لإ اد $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx$ .. نلاحظ أن $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ التعامـل معهـا

سابقاً مثال (٥-١) .. وبالتا فإن

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} F(z)e^{imz}\,dz = 0$$

وبالتا فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\oint_{C}\frac{e^{imz}}{1+z^2}dz$$

$$= 2\pi i\left[\sum R_i\right]$$

ويوجد قطبان للدالة F(z) عند z = +i وعند z = -i والع ة بالأول فقط (اذا؟) ..

وبالتا فإن

$$R = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{imz}}{(z-i)(z+i)}$$

$$= \frac{e^{-m}}{2i}$$

وبالتا

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{imx}}{1+x^2}dx + \int_{\Gamma}\underbrace{\frac{e^{imz}}{1+z^2}dz}_{0} = \frac{e^{-m}}{2i}(2\pi i)$$

وبأخذ R→∞ فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mx}{1+x^2}dx = \pi\, e^{-m}$$

وبالتا صل على

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx = \pi\, e^{-m}$$

وأيضاً:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mx}{1+x^2}dx = 0$$

مثال ٥-٨

أوجد $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos \pi x}{x^2+2x+5}dx$

ا ل

بأخذ ا سار ا غلق النصف دائرى (شكل ٥-١) .. فإننا سب التكامل

$\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz$ ولكن $z^2+2z+5=0$ ا ا ذران

$$z=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=-1\pm 2i$$

وتعة فقط القطب الداخلي $z=-1+2i$ وبالتا فإن

$$R=\lim_{z\to -1+2i}(z+1-2i)\frac{ze^{i\pi z}}{(z+1-2i)(z+1+2i)}$$

$$=\frac{(-1+2i)e^{i\pi(-1+2i)}}{(4i)}$$

$$=\frac{(-1+2i)e^{-2\pi}e^{-i\pi}}{4i}$$

$$=\frac{(-1+2i)e^{-2\pi}(\cos\pi - i\sin\pi)}{4i}$$

$$=\frac{(1-2i)e^{-2\pi}}{4i}$$

وبالتا فإن

$$\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz=2\pi i\,\frac{(1-2i)e^{-2\pi}}{4i}$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-2\pi}(1-2i)$$

ولكن

$$\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz=\int_{-R}^{R}\frac{x\,e^{i\pi x}}{x^2+2x+5}+\int_{\Gamma}\frac{ze^{imz}}{z^2+2z+5}dz$$

ولكن على Γ

$$F(z)=\frac{z}{z^2+2z+5}=\frac{\mathrm{R}e^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+2\,\mathrm{R}e^{i\theta}+5}=\frac{\mathrm{R}e^{i\theta}}{\left(\mathrm{R}e^{i\theta}+1-2i\right)\left(\mathrm{R}e^{i\theta}+1+2i\right)}$$

وبالتا فإن

$$|F(z)|=\frac{R}{\left|\mathrm{R}e^{i\theta}+(1-2i)\right|\left|\mathrm{R}e^{i\theta}+(1+2i)\right|}\le\frac{R}{(R-|1-2i|)(R-|1+2i|)}$$

$$=\frac{R}{(R-\sqrt{5})(R-\sqrt{5})}=\frac{R}{R-\sqrt{5}}\cdot\frac{R}{R-\sqrt{5}}$$

الآن بأخذ $R>6$ فإن $\frac{1}{R}<\frac{1}{6}$ وكذلك $\frac{\sqrt{5}}{R}<\frac{\sqrt{5}}{6}$ .. أي أن

$$-\frac{\sqrt{5}}{R}>-\frac{\sqrt{5}}{6}$$

وبالتا $1-\frac{\sqrt{5}}{R}>1-\frac{\sqrt{5}}{6}$ .. أي أن $1-\frac{\sqrt{5}}{R}>1-\frac{\sqrt{5}}{6}=d$ أي أن

$\frac{R-\sqrt{5}}{R}>\frac{1}{d}$ وبالتا $\frac{R}{R-\sqrt{5}}<\frac{1}{d}$

وبالتا فإن

$$\left|F(z)\right|_{\Gamma}=\frac{R}{R-\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{R-\sqrt{5}}<\frac{1}{d}\cdot\frac{1}{dR}=\frac{1/d^{2}}{R}=\frac{M}{R^{k}},\ k>0$$

وبالتا فعندما R→∞ فإن

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{ze^{imz}}{z^{2}+2z+5}dz=0$$

تبعاً لعارض (٥-٢). وبالتا فإن

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{xe^{i\pi x}}{x^{2}+2x+5}dx=\frac{\pi}{2}e^{-2\pi}(1-2i)$$

أي أن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos\pi x}{x^{2}+2x+5}dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\pi x}{x^{2}+2x+5}=\frac{\pi}{2}e^{-2\pi}(1-2i)$$

أي أن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos\pi x}{x^{2}+2x+5}dx=\frac{\pi}{2}e^{-2\pi}$$

وأيضا

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\pi x}{x^{2}+2x+5}dx=-\pi e^{-2\pi}.$$

ملاحظة:

نلاحظ أنه لو أخذنا

$$\left|F(z)\right|_{\Gamma}=\frac{R}{\left(R-\sqrt{5}\right)^{2}}=\left(\frac{R}{R-\sqrt{5}}\right)^{2}\frac{1}{R}$$

$$<\frac{1}{d^{2}}\cdot\frac{1}{6}$$

ولفشلنا إثبات أن $k>0$ ، $\left|F(z)\right|_{\Gamma}<\frac{M}{R^{k}}$..

ولكننا قمنا بتصرف أخر سليم أيضا وهو

$$|F(z)|_{\Gamma} = \frac{R}{R-\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{R-\sqrt{5}} < \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{dR}$$

$$= \frac{1/d^2}{R}$$

$$= \frac{M}{R}, \qquad k = 1 > 0$$

ولا ب افتراض انعدام التكامل على Γ.

٥-١-٤ تكاملات ومسارات مغلقة مشهورة

مثال ٥-٩

أوجد تكامل $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

ا ل:

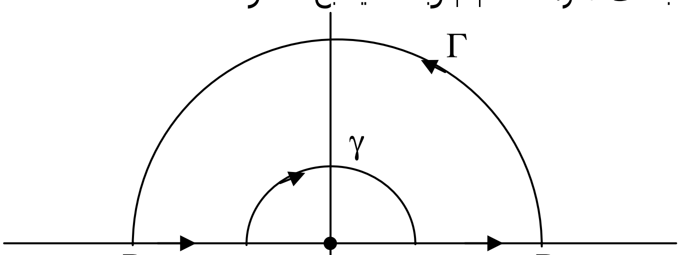
لاحظ أن ا سار لا ائي وأن $\frac{\sin x}{x}$ دالة زوجية وبالتا

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

أي أن

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x} dx$$

وبالتا فا سار النصف دائري يصلح لذلك ولكن هناك مشكلة تواجه تطبيق هذا ا سار وهو أن النقطة الشاذة (ا زالة) $z = 0$ تقع على ا سار ا قيقي من $-R$ إ R .. لذلك يتم عزل هذه النقطة بنصف دائرة $|z| = \in$ وبالتا يصبح ا سار كالتا



شكل (٥-٤)

وبالتا فإن $\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$ لأن z = 0 نقطة خارج ا سار ا غلق C.

وبالتا

$$\int_{-R}^{-\in} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\in}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

ولكن

$$\int_{-R}^{-\in} \frac{e^{ix}}{x} dx \bigg|_{x \to -x} = +\int_{R}^{\in} \frac{e^{-ix}}{x} dx = -\int_{\in}^{R} \frac{e^{-ix}}{x} dx$$

وبالتا فإن

$$\int_{\in}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

أي أن

$$2i \int_{\in}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \frac{1}{x} dx + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

أي أن

$$2i \int_{\in}^{R} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \qquad (1)$$

ولكن

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

لأن

$$|F(z)| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{R}$$

والآن على نصف الدائرة الصغرى $|z| = \in$ .. أي أن $z = \in e^{i\theta}$ فإن

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\pi}^{0} \frac{e^{i \in e^{i\theta}}}{\in e^{i\theta}} \in i e^{i\theta} d\theta$$

وبأخذ النهاية عندما $\in \to 0$ فإن

$$\lim_{\in\to 0}\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}dz = \lim_{\in\to 0}\int_{\pi}^{0} \frac{e^{i\in e^{i\theta}}}{1} id\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{0} (1)d\theta$$

$$= i(0-\pi)$$

$$= -i\pi$$

وبالتا   صل على (بالتعويض   (١) وأخذ $0\to\in$ و $R\to\infty$)

$$2i\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx - \pi i + 0 = 0$$

أي أن

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

ملاحظة:

هذا ا ثال ا شهور يعطينا فكرة عن كيفية التصرف إذا وجدت نقاط شاذة على ا ور ا قيقي .. فنقوم بعز ا بأنصاف دوائر   اول إ اد قيمة التكامل على هذه ا سارات الفرعية ونأخذ النهاية عندما تؤول أنصاف الأقطار إ   الصفر.

مثال ٥-١٠

أثبت أن

$$\int_{0}^{\infty} \frac{(\ln u)}{1+u^2}du = \frac{\pi^3}{8}$$

الإثبات: باعتبار التكامل

$$\oint_{C} \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}dz$$

حيث c هو نفسه ا سار السابق   مثال (٥-١٠) وبالتا   يتم عزل النقطة الشاذة z = 0 (اذا؟) .. ونلاحظ هنا أنه يوجد قطب داخلي عند z = i.

وبالتا   فإن

$$\oint_C \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\,dz = 2\pi i R \;,$$

$$R = \lim_{z\to i}(z-i)\cdot\frac{(\ln z)^2}{(z+i)(z-i)}$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\ln i)^2$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(i\frac{\pi}{2}\right)^2 \qquad \text{(لماذا؟)}$$

$$= -\frac{\pi^2}{8\mathrm{i}}$$

وبالتا فإن

$$\oint_C \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\,dz = 2\pi i\left(\frac{-\pi^2}{8i}\right)$$

$$= \frac{-\pi^3}{4}$$

والآن

$$\oint_C \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\,dz = \int_{-R}^{-\in} \frac{(\ln u)^2}{1+u^2}\,du + \int_\gamma \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\,dz$$

$$+\int_{\in}^{R} \frac{(\ln u)^2}{1+u^2}\,du + \int_\Gamma \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\,dz = \frac{-\pi^3}{4}$$

والآن على γ:

$$\int_\gamma \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\,dz = \int_\pi^0 \frac{\left(\ln \in e^{i\theta}\right)^2}{1+\in^2 e^{2i\theta}} \in ie^{i\theta}\,d\theta$$

وبأخذ $\in \to 0$ فإن:

$$\lim_{\in\to0}\int_{\gamma} \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\,dz = i\int_{\pi}^{0} \lim_{\in\to0} \in e^{i\theta}\cdot\left(\ln \in e^{i\theta}\right)^2 d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{0} \lim_{\in\to0} \frac{e^{i\theta}\left(\ln \in e^{i\theta}\right)^2}{\left(\frac{1}{\in}\right)}\,d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{0} \lim_{\in\to0} \frac{e^{i\theta}\,2\ln\left(\in e^{i\theta}\right)\cdot\frac{1}{e^{i\theta}\in}\cdot e^{i\theta}}{-\frac{1}{\in^2}}\,d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{0} \lim_{\in\to0} \frac{2e^{i\theta}\ln\left(\in e^{i\theta}\right)}{-\frac{1}{\in}}\,d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{0} \lim_{\in\to0} \frac{2e^{i\theta}\,\frac{1}{\in e^{i\theta}}\cdot e^{i\theta}}{\frac{1}{\in^2}}\,d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{0} \lim_{\in\to0} \frac{2e^{i\theta}}{1}(\in)\,d\theta$$

$$= 0$$

و عل $R\to\infty$ فإن

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} \frac{\left(\ln \mathrm{Re}^{i\theta}\right)^2}{1+R^2e^{2i\theta}}\,i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\,d\theta$$

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} \frac{(\ln R+i\theta)^2}{1+R^2e^{2i\theta}}R\,d\theta\right| = \lim_{R\to\infty}\left|\int_{\Gamma} \frac{(\ln R+i\theta)^2}{1+R^2e^{2i\theta}}R\,d\theta\right|$$

$$\le \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} \frac{\left|\ln R+i\theta\right|^2}{\left|1+R^2e^{2i\theta}\right|}R\,d\theta$$

$$\le \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} \frac{(\ln R)^2 + \theta^2}{R^2 - 1} R\, d\theta, \qquad |z_2 + z_1| \ge |z_2| - |z_1|$$

ولكن

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R}{R^2 - 1} = 0$$

وكذلك

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R(\ln R)^2}{R^2 - 1} = \lim_{R\to\infty} \frac{R2(\ln R)\cdot \frac{1}{R} + (\ln R)^2}{2R}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{\ln R}{R} + \lim_{R\to\infty} \frac{(\ln R)^2}{2R}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} + \lim_{R\to\infty} \frac{2\ln R \cdot \frac{1}{R}}{2}$$

$$= 0 + \lim_{R\to\infty} \frac{\ln R}{R}$$

$$= 0 + 0$$

وبالتا فإن

$$\lim_{\substack{\in\to 0\\ R\to\infty}} \left(\int_{-R}^{-\in} \frac{(\ln v)^2}{1+v^2} dv + \int_{\in}^{R} \frac{(\ln u)^2}{1+u^2} du \right) = -\frac{\pi^3}{4} \qquad (2)$$

والآن بوضع $v = -u$ التكامل الأول.

وبالتا فإن $\ln v = \ln(-u) = \ln u + \ln(-1)$

(اذا؟) $= \ln u + \pi i$

وبالتا فإن (2) تصبح

$$\lim_{\substack{\in\to 0\\ R\to\infty}} \left(-\int_{R}^{\in} \frac{(\ln u + \pi i)^2}{1+u^2} du + \int_{\in}^{R} \frac{(\ln u)^2}{1+u^2} du \right) = -\frac{\pi^3}{4}$$

$$\lim_{\substack{\in\to 0\\ R\to\infty}}\left(\int_{\in}^{R}\frac{\left((\ln u)^2+2\pi i\ln u-\pi^2\right)}{1+u^2}du+\int_{\in}^{R}\frac{(\ln u)^2}{1+u^2}du\right)=-\frac{\pi^3}{4}$$

وبالتا فإن

$$2\int_0^\infty\frac{(\ln u)^2}{1+u^2}du-\pi^2\int_0^\infty\frac{du}{1+u^2}+i(2\pi)\int_0^\infty\frac{\ln u}{1+u^2}du=-\frac{\pi^3}{4}$$

ولكن
$$\int_0^\infty\frac{du}{1+u^2}=\tan^{-1}u\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}$$

أي أن
$$2\int_0^\infty\frac{(\ln u)^2}{1+u^2}du+i(2\pi)\int_0^\infty\frac{\ln u}{1+u^2}du=-\frac{\pi^3}{4}+\frac{\pi^3}{2}=\frac{\pi^3}{4}$$

وبالتا صل على
$$\int_0^\infty\frac{(\ln u)^2}{1+u^2}du=\frac{\pi^3}{8}$$

وجانبيا أيضا فإن
$$\int_0^\infty\frac{\ln u}{1+u^2}du=0$$

مثال ٥-١١

أحسب
$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)}dx$$

ا ل:

بأخذ ا سار نفسه شكل ٥-٤ .. مع ملاحظة أن هناك قطب يس داخل ا سار عند $z=ia$ فإن

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz = 2\pi i R$$

حيث

$$R = \lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{e^{iz}}{z(z+ai)(z-ai)}$$

$$= \frac{e^{-a}}{ai(2ai)} = \frac{-1}{2}\frac{e^{-a}}{a^2}$$

وبالتا فإن

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)} = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\frac{e^{-a}}{a^2}\right)$$

$$= -\frac{\pi\, i\, e^{-a}}{a^2} \qquad (1)$$

والآن فإن

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz = \int_{-R}^{-\in} \frac{e^{ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx + \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz$$

$$+\int_{\in}^{R} \frac{e^{ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx + \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz$$

وبوضع $x = -u$ التكامل الأول الطرف الأ ن فإن:

$$\int_{-R}^{-\in} \frac{e^{ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx = \int_{R}^{\in} \frac{e^{-iu}}{u\left(u^2+a^2\right)}du = -\int_{\in}^{R} \frac{e^{-iu}}{u\left(u^2+a^2\right)}du$$

وبالتا فإن

$$\int_{-R}^{-\in} \frac{e^{ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx + \int_{\in}^{R} \frac{e^{ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx = \int_{\in}^{R} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx$$

$$= 2i\int_{\in}^{R} \frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)}dx$$

وبالتا فإن

$$2i\int_{\in}^{R}\frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)}dx+\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz+\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz=-\frac{\pi i e^{-a}}{a^2} \qquad (2)$$

والآن .. بالتكامل على γ : $z=\in e^{i\theta}$ فإن

$$\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz=\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\in e^{i\theta}}}{\in e^{i\theta}\left(\in^2 e^{2i\theta}+a^2\right)}i\in e^{i\theta}d\theta$$

وبأخذ النهاية $\in\rightarrow 0$ فإن:

$$\lim_{\in\rightarrow 0}\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz=i\int_{\pi}^{0}\frac{1}{a^2}d\theta$$

$$=-\frac{\pi i}{a^2} \qquad (3)$$

كذلك على Γ: $z=R\,e^{i\theta}$

$$\left|F(z)\right|_{\Gamma}=\left|\frac{1}{R\left(R^2e^{2i\theta}+a^2\right)}\right|\leq\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\left(R^2-a^2\right)}$$

ولكن بأخذ $R>\sqrt{a^2+1}$ فإن $\frac{1}{R}<\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ وبالتالي $\frac{a^2}{R^2}<\frac{a^2}{1+a^2}$

أي أن $1-\frac{a^2}{R^2}>1-\frac{a^2}{1+a^2}=\frac{1}{1+a^2}$

أي أن $\frac{R^2-a^2}{R^2}>\frac{1}{1+a^2}$

وبالتالي فإن $\frac{R^2}{R^2-a^2}<1+a^2$

أي أن $\frac{1}{R^2-a^2}<\frac{1+a^2}{R^2}$

أي أن
$$|F(z)|_{\Gamma} \leq \frac{1}{\sqrt{1+a2}} \cdot \frac{1+a^2}{R^2} = \frac{M}{R^k} \quad , \qquad k > 0$$

فإنه بتطبيق نتيجة العارض ٥-٢ فإن

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)} dz = 0$$

وبالتا (2) تصبح (0←∈ و R→∞):

$$2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)} dx - \frac{\pi i}{a^2} + 0 = \frac{-\pi i e^{-a}}{a^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)} dx = \frac{\pi}{2a^2} - \frac{\pi e^{-a}}{2a^2}$$
$$= \frac{\pi}{2a^2}\left(1-e^{-a}\right)$$

أي أن

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)} dx = \frac{\pi}{2a^2}\left(1-e^{-a}\right)}$$

ملاحظة هامة

لا نستطيع حساب $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x\left(x^2+u^2\right)} dx$ ذا الأسلوب. (اذا؟!).

مثال ٥-١٢

أثبت أن $\int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2} dx = \frac{k\pi}{2}$

ا ل

باستخدام $\sin^2 kx = \frac{1}{2}(1-\cos 2kx)$

وباستخدام الدالة $1-e^{2kiz}$ فإن صورة التكامل تصبح كالآ :

$$\frac{1}{2}\oint_C \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz$$

وباستخدام ا سار ا غلق نصف الدائري شكل (٥-٤) فإن

(اذا؟)
$$\frac{1}{2}\oint_C \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz=0$$

وبالتا فإن

$$\frac{1}{2}\oint_C \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz=\frac{1}{2}\int_{-R}^{-\in}\frac{1-e^{2kix}}{x^2}dx+\frac{1}{2}\int_{\gamma}\frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\in}^{R}\frac{1-e^{2kix}}{x^2}dx+\frac{1}{2}\int_{\Gamma}\frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz=0 \qquad (1)$$

وبوضع $x=-u$ التكامل الأول فإن

$$\frac{1}{2}\int_{-R}^{-\in}\frac{1-e^{2kix}}{x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_{R}^{\in}\frac{1-e^{-2kiu}}{u^2}du$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\in}^{R}\frac{1-(\cos 2ku-i\sin 2ku)}{u^2}du$$
$$=\int_{\in}^{R}\frac{\sin^2 ku}{u^2}du+\frac{i}{2}\int_{\in}^{R}\frac{\sin 2ku}{u^2}du \qquad (2)$$

كذلك فإن التكامل الثالث:

$$\frac{1}{2}\int_{\in}^{R}\frac{1-e^{2kix}}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{\in}^{R}\frac{1-(\cos 2kx+i\sin 2kx)}{x^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\in}^{R}\frac{1-\cos 2kx}{x^2}dx-\frac{i}{2}\int_{\in}^{R}\frac{\sin 2kx}{x^2}dx$$
$$=\int_{\in}^{R}\frac{\sin^2 kx}{x^2}dx-\frac{i}{2}\int_{\in}^{R}\frac{\sin 2kx}{x^2}dx \qquad (3)$$

وكذلك فإن التكامل على γ: $z = \in e^{i\theta}$ يصبح

$$\frac{1}{2}\int_{\gamma} \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{0} \frac{1-e^{2ki\in e^{i\theta}}}{\in^2 e^{2i\theta}}\in ie^{i\theta}d\theta$$

$$= \frac{i}{2}\int_{\pi}^{0} \frac{1-e^{2kie^{i\theta}\in}}{\in e^{i\theta}}d\theta$$

وبأخذ النهاية عندما $\in \to 0$ فإن

$$\frac{1}{2}\lim_{\in\to 0}\int_{\gamma} \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz = \frac{i}{2}\lim_{\in\to 0}\int_{\in}^{0} \frac{1-e^{2kie^{i\theta}\in}}{\in e^{i\theta}}d\theta$$

$$= \frac{i}{2}\int_{\pi}^{0} \lim_{\in\to 0}\frac{-e^{2kie^{i\theta}\in}(2ki)e^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta$$

$$= +\frac{1}{2}(2k)\int_{\pi}^{0} d\theta = -\pi k \qquad (4)$$

وكذلك فإن التكامل على Γ: يصبح

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma} \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{1-e^{2ki\,\mathrm{Re}^{i\theta}}}{R^2e^{2i\theta}}i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{i}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{1-e^{2kiR(\cos\theta+i\sin\theta)}}{R\,e^{i\theta}}d\theta$$

$$= \frac{i}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{1-e^{-2kR\sin\theta}\cdot e^{i(2kR\cos\theta)}}{R\,e^{i\theta}}d\theta$$

$$= \frac{i}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{1-e^{-2kR\sin\theta}(\cos(2kR\cos\theta)+i\sin(2kR\cos\theta))}{R\,e^{i\theta}}d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{1-e^{-2kR\sin\theta}\sin(2kR\cos\theta)}{R\,e^{i\theta}}d\theta$$

$$+\frac{i}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{1-e^{-2kR\sin\theta}\cos(2kR\cos\theta)}{R\,e^{i\theta}}d\theta$$

وبأخذ النهاية عندما R→∞ و علومية أن $\lim\limits_{R\to\infty} \sin R(-) = l_1$ وأن

$\lim\limits_{R\to\infty} \cos R(-) = l_2$ حيث l_2, l_1 كميات ـدودة بـ 1- و 1 فإن

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}\,dz = 0 \tag{5}$$

وباستعمال النتائج (2), (3), (4), (5) فإن (1) تصبح بعد جعل ∈→0 و R→∞:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2}\,dx + \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2kx}{x^2}\,dx$$

$$+\int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2}\,dx - \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2kx}{x^2}\,dx \;-\pi\; k + 0 = 0$$

أي أن

$$2\int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2}\,dx = \pi\, k$$

أي أن

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2}\,dx = \pi \frac{k}{2}$$

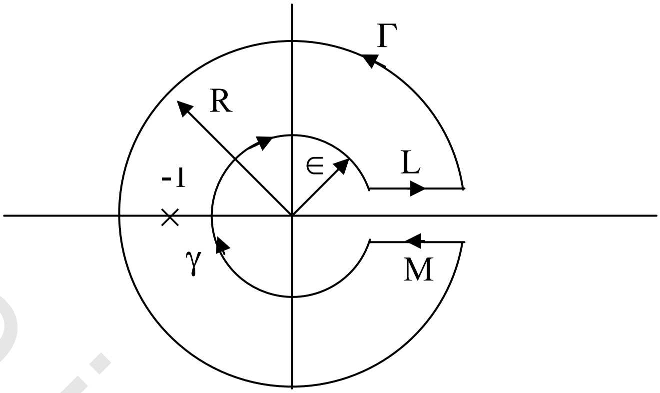
مثال ٥-١٣

أثبت أن

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad , \quad 0 < p < 1$$

الإثبات:

نلاحظ أننا لك نقطتان شاذتان .. الأو عند z = 0 وهي نقطة تفرع والأخرى عند z = -1 وهي قطب يسـ . ولذلك نقوم باستعمال ا سار ا غلق ا وضح بشكل (٥-٤)



(شكل ٥-٥)

ونعة التكامل $\oint_C \frac{z^{P-1}}{1+z}dz = 2\pi i R$

حيث $R = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^{p-1}}{(z+1)} = (-1)^{p-1} = e^{i\pi(p-1)}$

وبالتا فإن $\oint_C \frac{z^{P-1}}{1+z}dz = e^{i\pi(p-1)}(2\pi i)$ (1)

ولكن $\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = \int_\Gamma \frac{z^{p-1}}{1+z}dz + \int_M \frac{z^{p-1}}{1+z}dz$

$$+\int_\gamma \frac{z^{p-1}}{1+z}dz + \int_L \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = e^{i\pi(p-1)}(2\pi i) \quad (2)$$

مع ملاحظة أن L, M ينطبقان على ور x عند أخذ النهاية $\in\to 0$ .. فإن

$$\int_L \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = \int_\in^R \frac{x^{p-1}}{1+x}dx, \quad z = xe^{i0}$$

$$\int_M \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = \int_R^\in \frac{\left(xe^{2\pi i}\right)^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}}dx, \quad z = xe^{i2\pi}$$

والآن:
$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz=\lim_{R\to\infty} i\int_0^{2\pi}\frac{\left(R\,e^{i\theta}\right)^{p-1}}{R\,e^{i\theta}+1}R\,e^{i\theta}d\theta$$

ولكن
$$\left|\int_0^{2\pi}\frac{R^p\,e^{ip\theta}}{R\,e^{i\theta}+1}d\theta\right|\le\int_0^{2\pi}\frac{R^p}{\left|R\,e^{i\theta}+1\right|}d\theta$$

$$\le\int_0^{2\pi}\frac{R^p}{R-1}d\theta$$

$$=\frac{2\pi R^p}{R-1}=\frac{2\pi}{R^{1-p}-R^{-p}}$$

وبالتا فإنه عند أخذ النهاية $R\to\infty$ فإن

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\Gamma}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz\right|\le\lim_{R\to\infty}\frac{2\pi}{R^{1-p}-R^{-p}}=0$$ (لماذا؟)

أي أن
$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz=0$$

والآن بالنسبة للتكامل على $z=\in e^{i\theta}$ فإن

وبالتا فإن

$$\int_{\gamma}\frac{z^{p-1}}{z+1}dz=i\int_0^{2\pi}\frac{\left(\in e^{i\theta}\right)^{p-1}\in e^{i\theta}d\theta}{1+\in e^{i\theta}}$$

ولكن
$$\left|\int_{\gamma}\frac{z^{p-1}}{z+1}dz\right|\le\int_0^{2\pi}\frac{(\in)^p}{\left|1+\in e^{i\theta}\right|}d\theta$$

$$\le\int_0^{2\pi}\frac{(\in)^p}{\in-1}d\theta$$

$$=\frac{\in^p}{\in-1}(2\pi)$$

وبأخذ النهاية $\in \to 0$ فإن

$$\lim_{\in \to 0}\left|\int_{\gamma} \frac{z^{p-1}}{z+1}dz\right| = 0$$

أي أن

$$\int_{\gamma} \frac{z^{p-1}}{z+1}dz = 0$$

وبالتا بأخذ $\in \to 0$ و $R \to \infty$ للعلاقة (2) فإن:

$$\int_{\infty}^{0} \frac{e^{2\pi i(p-1)}x^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}}dx - \int_{\infty}^{0} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = 2\pi i\left(e^{i\pi(p-1)}\right)$$

وبوضع $e^{2\pi i} = 1$ مقام التكامل الأول فإن:

$$e^{2\pi i(p-1)}\int_{\infty}^{0} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$$

أي أن

$$\left(1-e^{2\pi(p-1)i}\right)\int_{0}^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$$

إذن النهاية فإن تكاملنا يساوي الآ :

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{2\pi i e^{p\pi i}e^{-\pi i}}{1-e^{2\pi ip}e^{-2\pi i}}$$

$$= \frac{2\pi i e^{p\pi i}(-1)}{1-e^{2\pi pi}}$$

$$= \pi\frac{e^{p\pi i}}{\left(e^{2\pi pi}-1\right)/2i}$$

$$= \pi\frac{1}{\left(e^{\pi pi}-e^{-\pi pi}\right)/2i}$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

إذن

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \qquad 0 < p < 1}$$

رينات ٥

١. أوجد التكامل $\oint_C f(z)dz$ إذا كانت C هـي ا ـسار ا غلـق النـصف دائـري (شكل ٥-١) .. وكانت f(z):

$$(i)\, f(z)=\frac{1}{z^2+a^2}, a\in\Re \qquad (ii)\, f(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+a^2\right)^2}, a\in\Re$$

$$(iii)\, f(z)=\frac{1}{z^4+1} \qquad (iv)\, f(z)=\frac{1}{z^4+a^4}, a\in\Re$$

$$(v)\, f(z)=\frac{1}{z^6+1} \qquad (vi)\, f(z)=\frac{z^2}{z^8+1}$$

$$(vii)\, f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)\left(z^4+1\right)} \qquad (viii)\, f(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+z+1\right)\left(z^2+1\right)}$$

٢. ومن أوجد التكاملات الآتية:

$$(i)\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} \qquad (ii)\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}$$

$$(iii)\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} \qquad (iv)\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+a^4}$$

$$(v)\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6} \qquad (vi)\int_0^\infty \frac{x^2}{x^8+1}$$

$$(vii)\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)} \qquad (viii)\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}$$

٣. أوجد التكامل $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$ الإجابة (π).

٤. اثبت أن $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\frac{\pi}{12}$

٥. اثبت أن $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}$

٦. اثبت أن $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta} d\theta = \frac{3\pi}{8}$

٧. اثبت أن $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{\left(1+x^2\right)^2} dx = \frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4}, \quad m>0$

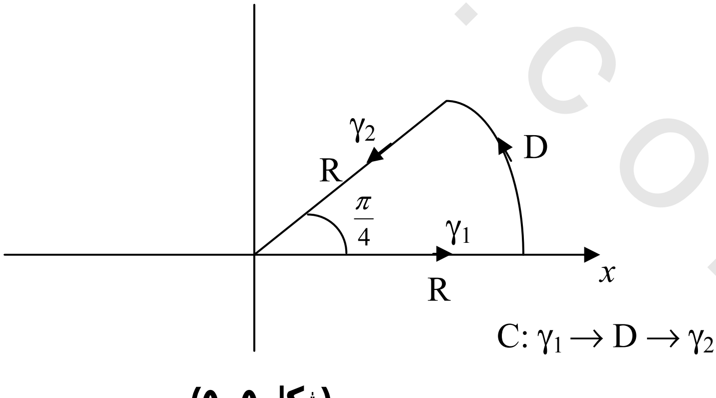
٨. احسب $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\left(1+x^2\right)^5} dx$

٩. اثبت أن $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \pi\frac{\sqrt{3}}{6}$

١٠.اثبت أن $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1} dx = \frac{-\pi}{2\sqrt{3}} e^{-\pi/\sqrt{3}}$

١١.اثبت أن $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

خذ C المسار المغلق الموضح بشكل (٥-٥) .. وكامل $\displaystyle\oint_C e^{iz^2} dz$



(شكل ٥-٥)

١٢. اثبت أن $\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx = \pi \ln 2$

(كامل $\oint_C \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}dz$ وخذ C هو ا سار ا غلق النصف دائري).

١٣. اثبت أن $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi \ln 2}{2a}$

١٤. اثبت أن

$$(i)\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^4}dx = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$$

$$(ii)\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^4+1}dx = \frac{3\pi^3\sqrt{2}}{64}$$

١٥. اثبت أن $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4}\ln 2$

١٦. اثبت أن $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi \ln 2}{2}$

١٧. اثبت أن $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} = \frac{2\pi}{1-r}, \quad 0 \le r < 1$

١٨. اثبت أن $\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}dx = \frac{\pi}{2}, \quad m > 0$

١٩. اثبت أن $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{e}$

٢٠. اثبت أن $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos mx}{\left(x^2+a^2\right)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} e^{-m}(1+ma)$

٢١. اثبت أن $\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2} = \frac{2\pi a}{\sqrt{a^2-b^2}}, \quad a>|b|>0$
