الباب الرابع

نظريـــــة الباقي

The Residue Theorem

٤-١ متسلسلة تايلور ومتسلسلة لورنت Taylor’s and Laurent’s Series:

٤-١-١ نظرية تايلور Taylor’s Theorem

نظرية ٤-١

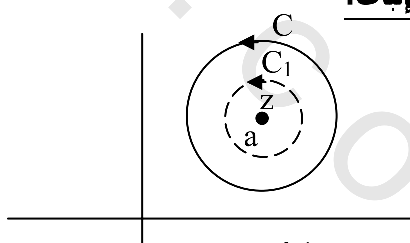
دع $f(z)$ دالة ليلية على وداخل منحـ مغلق يسـ C و دع النقطتان a و a + h داخل C .. فإن

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

أو بوضع z = a + h وبالتا h = z - a فإن

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots$$

الإثبات:



(شكل ٤-١)

لكل z داخل C (أنظر شكل ٤-١) كن أخذ دائرة C_1 مركزها عند نقطة a و توي z .. وبالتا بتطبيق صيغة كوشي للتكامل فإن

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}dw \qquad (1)$$

ولكن

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}=\frac{1}{w-a}\left[\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\right]$$

$$=\frac{1}{w-a}\left[1-\frac{z-a}{w-a}\right]^{-1},\left|\frac{z-a}{w-a}\right|<1$$ (اذا)

$$=\frac{1}{w-a}\left[1+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n-1}+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{\mathrm{n}}\frac{1}{1\text{-}\frac{z\text{-}a}{w\text{-}a}}\right]$$

باستعمال ا فكوك $(1-z)^{-1}=1+z+z^2+..+z^{n-1}+z^n.\frac{1}{1-z}$

وبالتا

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-a}+\frac{z-a}{(w-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(w-a)^3}+\ldots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n}+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\frac{1}{w-z}\quad(2)$$

والآن بضرب (2) f(w) واستعمال الصيغة (1) فإن

$$2\pi i\ f(z)=\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-a}dw+z-a\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^2}dw+\ldots$$

$$+(z-a)^{n-1}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^n}dw+R_n\quad(3)$$

حيث $$R_n=\oint_{C_1}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\frac{f(w)}{w-z}\ dw$$

وباستخدام صيغة تكامل كوشي

$$f_{(a)}^{(n)}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\quad,\quad n=0,1,2,\ldots$$

فإن (3) تصبح

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\dots$$
$$\dots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+U_n$$

حيث $U_n=\dfrac{1}{2\pi i}R_n$

والآن ا أن w على الدائرة C_1 فإن $\left|\dfrac{z-a}{w-a}\right|=\gamma<1$

أيضا فإن $|f(w)|<M$ حيث M ثابت موجب .. كذلك

$$|w-z|=|(w-a)-(z-a)|\geq|w-a|-|z-a|$$
$$=r_1-|z-a|$$

حيث r_1 هي نصف قطر الدائرة C_1 فإن

$$|U_n|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C_1}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\frac{f(w)}{w-z}dw\right|$$
$$\leq\frac{1}{2\pi}\oint_{C_1}\left|\left|\frac{z-a}{w-a}\right|^n\frac{|f(w)|}{|w-z|}|dw|\right|$$
$$\leq\frac{1}{2\pi}\;\frac{\gamma^{\mathrm{n}}M}{r_1-|z-a|}\;2\pi r_1$$
$$=\frac{\gamma^{\mathrm{n}}M\,r_1}{r_1-|z-a|}$$

وبالتا فإن $\lim\limits_{n\to\infty}|U_n|=0$ (اذا؟)

وبذلك نكون قد أثبتنا صيغة متسلسلة تايلور اللا ائية

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots$$

ملاحظات

١- يلاحظ أن متسلسلة تايلور هي المتسلسلة المعتاد عليها فك الدوال الحقيقية و تحت نفس الشروط تقريبا مع الاكتفاء بأن $f(z)$ دالة تحليلية لأن ذلك يعني وجود كل رتب مشتقات هذه الدالة بشكل تلقائي وبالتالي فحساب مفكوك تايلور للدوال المركبة سيكون شبيهاً جداً لنفس الدوال في صورها الحقيقية فمثلاً

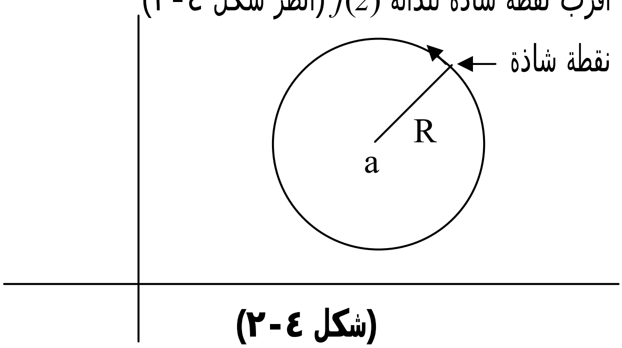
$$1.\ e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + .. + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

$$2.\ \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}\ .. + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + ..$$

$$3.\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots$$

وهذه دوال تحليلية في كل مكان ولذلك فليس هناك قيد على قيمة z طالما كانت $|z| < \infty$.

٢- مثل أي متسلسلة لانهائية لابد أن يكون هناك مشاكل في مجموعها .. فإذا كان محدوداً فهي متقاربة convergent وإذا كان غير محدود (لانهائي) فهي متباعدة .. وهذا يعطي قيد على المنطقة التي يمكننا استعمالها فيها وتسمى هذه المنطقة منطقة التقارب convergence region .. وبالنسبة لمفكوك تايلور فإن منطقة التقارب تعطي بـ $|z - a| < R$ حيث R هو نصف قطر التقارب .. اما مثل مفهوم التقارب لمتسلسلة تايلور أو متسلسلات القوى power series بشكل عام حيث R هي المسافة من النقطة a إلى أقرب نقطة شاذة للدالة $f(z)$ (أنظر شكل ٤-٢)



(شكل ٤-٢)

و در الإشارة أنه على الدائرة $|z-a| = R$ فإنه ر ا تتقارب ا تسلسلة أو لا تتقـارب .. إذ ب ث ذلك على انفراد.

٣- خارج نطاق هذه الدائرة $|z-a| > R$ فإن ا تسلسلة تكون متباعدة ..
وعلى ضوء ذلك فهناك متسلسلات عليها قيود كالآ :

$$4. \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots, \quad |z| < 1$$

$$5. \tan^{-1} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \quad |z| < 1$$

$$6. (1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!}z^2 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}z^n + \ldots, \quad |z| < 1$$

حيث p كمية سالبة أو كسرية.

مثال ٤-١

أثبت أن مفكوك $\ln(1-z)$ و $f(z)=\ln(1+z)$ حول $z = 0$ هو

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} .. + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots$$

حيث $|z| < 1$.

الإثبات

باستعمال صيغة مفكوك تايلور فإن

$$f(z) = \ln(1+z) \qquad f(0) = \ln 1 = 0$$

وبالتا

$$f'(z) = \frac{1}{1+z}, \qquad f'(0) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(z) = \frac{-1}{(1+z)^2}, \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(z) = \frac{2!}{(1+z)^3}, \qquad f'''(0) = 2!$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}$$

وبالتا فإن

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots$$

$$=f(o)+\frac{f'(o)}{1!}(z)+\frac{f''(o)}{2!}z^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(o)}{n!}z^n+\ldots$$

$$=z-\frac{z^2}{2}+\frac{2!z^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}\ z^n+\ldots$$

$$=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\ z^n+\ldots$$

والآن فهناك نقطة شاذة عند $z = -1$ ولذلك فإن نصف قطر التقارب سيكون $R = 1$ (اذا؟) وتكون منطقة التقارب هي

$$|z-0|<1$$

وبالتا فشرط التقارب هو $|z|<1$

مثال ٤-٢:

أثبت أن $\ln\frac{1+z}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\ z^{2n+1}}{2n+1}$ حول $z = 0$.

وأن $|z|<1$ هو شرط التقارب

الإثبات:

كننا إ اد مفكوك ماكلورين $(z = 0)$ للدالة $f(z)=\ln\frac{1+z}{1-z}$

ولكن كن الاستفادة من نتائج ا ثال السابق كالآ :

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n+\ldots,\qquad |z|<1$$

$$\ln(1-z)=-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\ldots-\frac{z^n}{n}-\ldots,\qquad |z|<1$$

لأن ا د العام $(-1)^{n-1}(-1)^{n} = (-1)2^{n-1} = -1$

وبطرح ا تسلسلة وبشرط أن $|z| < 1$ فإن

$$\ln(1+z)-\ln(1-z)=\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$= 2z + 2\frac{z^3}{3} + 2\frac{z^5}{5} + \ldots + 2\frac{z^n}{n} + \ldots$$ حيث n عدد فردي

$$= 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{(2n+1)}}{(2n+1)}$$

وطبعا مازال شرط التقارب هو $|z| < 1$.

مثال ٤-٣:

أوجد مفكوك ماكلورين للدالة $f(z)=\dfrac{1}{1+3z}$

ا ـل:

هذه ا الة فإن

$$f(z)=\frac{1}{1+3z}=(1+3z)^{-1}$$

$$=1-3z+9z^2-27z^3+\ldots+(-1)^{n-1}(3z)^n+\ldots$$

$$=1-3z+9z^2-\ldots+(-1)^{n-1}(3)^n(z)^n+\ldots$$

وشرط التقارب هذه ا الة هو $|3z| < 1$

أي أن $|z| < \dfrac{1}{3}$.

مثال ٤-٤:

أوجد مفكوك ماكلورين للدالة $f(z)=\dfrac{1}{(5-4z)^2}$

ا ـل:

هذه ا الة نستفيد أيضا من مفكوك $(1+z)^p$ ت شرط $|z| < 1$ ولكن مع استبدال z بدالة ا ..

$$\frac{1}{(5-4z)^2}=\frac{1}{25\left(1-\frac{4}{5}z\right)^2}=\frac{1}{25}\left(1+\frac{4}{5}z+\left(\frac{4}{5}\right)^2 z^2+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{4}{5}\right)^n z^n+\ldots\right)$$

وبشرط أن $\quad |\frac{4}{5}z|<1$

أي أن $\quad |z|<|\frac{5}{4}|=\frac{5}{4}$

ونلاحظ هنا أننا طا ا داخل منطقة ا f(z) دالة ليلية فإن كل أساليبنا شبيهة اما لتصرفاتنا مع الدالة ا قيقية .. فالذي فعلناه وغ ه مباح اماً.

٤-١-٢ نظرية لورنت Laurent's Theorem

(نظرية ٤-٢)

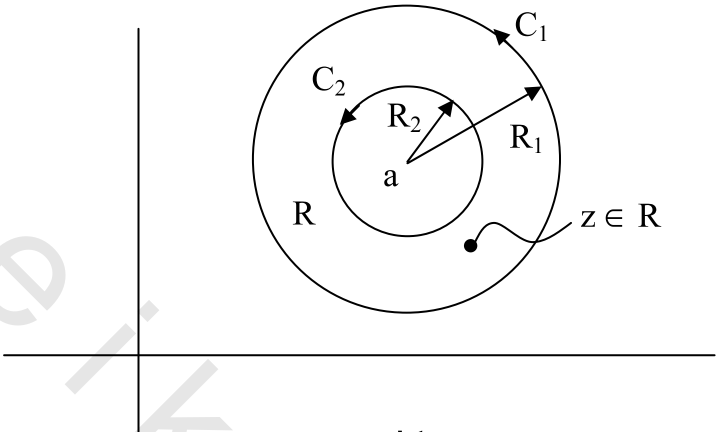
دع f(z) دالة ليلية وذات قيمة وحيدة single-valued على الدائرتا C_1 و C_2 وبينهما R (أنظر شكل ٤-٣) ذو الشكل ا لقي ring-shaped or annulus والذي له ا ركز عند النقطة z = a .. ونصف قطر C_1 هو R_1 ونصف قطر C_2 هو R_2 كما هو مب بالشكل فإنه لكل $z \in R$

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots$$

حيث $\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \quad , \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

وا سار ا غلق اليس C داخل ا نطقة R.

الإثبات:



(شكل ٤-٣)

من مثال ٣-١٦ ص ١٠٣ أثبتنا الآ لكل $z \in R$ أن

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\underbrace{\frac{f(w)}{w-z}}_{C_1 \text{ على } w}dw-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\underbrace{\frac{f(\eta)}{\eta-z}}_{C_2 \text{ على } \eta}d\eta \qquad (1)$$

وهي صيغة كوشي للتكامل مطبقة على هذا الشكل ا لمقي.

وبالنسبة للتكامل الأول الطرف الأ ن من (1) فإن

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}=\frac{1}{(w-a)\left[1-\dfrac{z-a}{w-a}\right]}$$

$$=\left(\frac{1}{w-a}\right)\left[1+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n-1}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{w-a}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{w-a} + \frac{z-a}{(w-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(w-a)^3} + \ldots + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n-1} . \frac{1}{w-z} \quad (2)$$

مع الشرط ا عتاد ذا الفك وهو أن $\left|\frac{z-a}{w-a}\right| < 1$ وهذا حادث فعلا لأن w موجودة علـى الدائرة C_1 و z نقطة R . وبالتا فإن

$$\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-a} dw + (z-a) \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^2} dw + \ldots$$

$$\ldots + (z-a)^{n-1} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^n} dw + R_n$$

حيث $R_n = \oint_{C_1} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{f(w)}{w-z} dw$

وباستعمال صيغة تكامل كوشي فإننا نصل إ الآ :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + U_n \quad (3)$$

حيث

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{j+1}} dw \quad , \quad j = 0,1,2,\ldots,n-1 \quad (4)$$

وكذلك فإن

$$U_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (5)$$

وبأخذ التكامل الثا الطرف الأ ن من (1) فإن:

$$-\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{z-\eta} = \frac{1}{(z-a)-(\eta-a)} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \frac{\eta - a}{z-a}\right)}$$

لاحظ أن $\left|\frac{\eta-a}{z-a}\right|<1$ لأن η تقع على الدائرة C_2

وبالتا كننا استخدام نفس ا فكوك السابق استخدامه التكامل الأول كالآ :

$$-\frac{1}{\eta-z}=\frac{1}{z-a}+\frac{\eta-a}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{(\eta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}+\left(\frac{\eta-a}{z-a}\right)^n\frac{1}{z-\eta}$$

وبالتا فإن

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\eta)}{(\eta-z)}d\eta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\eta)}{z-a}d\eta+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\eta)(\eta-a)}{(z-a)^2}d\eta$$

$$\ldots+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{(\eta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}f(\eta)d\eta+V_n$$

$$=\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+V_n \qquad (6)$$

حيث

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C(\eta-a)^{n-1}f(\eta)d\eta \qquad (7)$$

$$n=1,2,3,\ldots$$

و

$$V_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\left(\frac{\eta-a}{z-a}\right)^n\frac{f(\eta)}{z-\eta}d\eta$$

ومن (3) و (6) فإن

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+\ldots+a_{n-1}(z-a)^{n-1}$$

$$+\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+U_n+V_n \qquad (8)$$

ويبقى أن نثبت أن U_n و V_n يتلاشيان عندما $n\to\infty$ وقليل من الاضافات الصغ ة:

واثبات أن $\lim_{n\to\infty}|U_n| = 0$ شبيه اماً ا قمنا به نظرية تايلور ..

والآن على C_2 فإن $\left|\frac{\eta-a}{z-a}\right| = k < 1$

وكذلك نعلم أن $|f(\eta)| < M$

وأيضاً $|z-\eta| = |z-a-(\eta-a)|$

$\geq |z-a| - R_2$

وبالتا فإن

$$|V_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C_2}\left(\frac{\eta-a}{z-a}\right)^n \frac{f(\eta)}{z-\eta}\,d\eta\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{C_2}\left|\frac{\eta-a}{z-a}\right|^n \frac{|f(\eta)|}{|z-\eta|}\,|d\eta|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{k^n M}{|z-a|-R_2}$$

$$= \frac{k^n M\ R_2}{|z-a|-R_2}$$

وبالتا فإن $\lim_{n\to\infty}|V_n| = 0$

أي أن $V_n = 0$ .. وبالتا يكتمل الإثبات.

ملاحظات:

(1) وجود النقطة الشاذة عند $z = a$ ا ركز هو الذي سبب كل ذلك التغي .. و حالة عدم وجودها فإن مفكوك لورنت يصبح مفكوك تايلور لأن $f(z)$ هذه ا الة تصبح ليلية ا نطقة R وال تد لأسفل لتصبح دائرة واحدة.

(2) كننا التكامل على دائرة C ب الدائرت C_1 و C_2 يث يكون

$$(4)\qquad a_j=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{j+1}}dw\quad,\qquad j=0,1,2,...$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(w)}{(w-a)^{j+1}}dw$$

كذلك

$$(7)\qquad a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}(\eta-a)^{n-1}f(\eta)d\eta\quad,\qquad n=1,2,3,...$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}(\eta-a)^{n-1}f(\eta)\,d\eta$$

وهذا علنا نكتب ا د العام الآ :

$$a_m=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}dz,$$

$$m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

ففي حالة $m = 0,1, 2, \ldots$ تعطي (4)

و حالة $m = -1, -2, \ldots$ تعطي (7)

وبالتا يعتبر هذا حداً عاماً .. وبالتا فإن

$$f(z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j(z-a)^j$$

وهي الصورة العامة فكوك لورنت.

(3) يطلق على ا دود ذات الرتبة ا وجبة، أي

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots$$

با زء التحليلي analytic part فكوك لورنت، بينما يطلق على ا دود ذات الرتبة السالبة، أي

$$\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots$$

با ز الأساسي principal part فكوك لورنت وجدير بالذكر بأنه حالة اختفاء النقطة الشاذة فإن ا زء الأساسي ينعدم ليصبح ا فكوك مفكوك تايلور العادي .. فهذا ا زء يتكون مع تكون الشذوذ.

(4) عند $z = a$ نقطة شـاذة .. هذا الشذوذ دد نوعه .. فهو عام .. فر ا يكون قطباً أو تفرعاً أو كن إزالته .. أو أساسياً.

فعندما تكون $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ فإن $z = a$ تكون قطباً (وليكن رتبته n) وعندئذ د أن ا زء الأساسي من مفكوك لورنت يكون له عدد دود ذه الكيفية

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} \qquad , \qquad a_{-n} \neq 0$$

أما إذا كانت الدالة $f(z)$ دالة وحيدة القيمة وغ معرفة عند $z = a$ ولكن $\exists \lim_{z \to a} f(z)$ فإن $z = a$ تسمى بالنقطة الشاذة ا زالة removable، و هذه ا الة نعيد تعريف الدالة عند $z = a$ بقيمة النهاية .. ونقوم ساب ا فكوك.

فإذا كانت $z = a$ نقطة تفرع للدالة متعددة القيم multi-valued فإ ا تكون نقطة شاذة .. على أن كل فرع للدالة هو دالة ليلية و كن فكه فكوك تايلور والذي له نصف قطر تقارب يقاس با سافة ب نقطة الفك ونقطة التفرع.

وأي نوع من الشذوذ خلاف الأنواع الثلاثة السابقة يسمى بالشذوذ الأساسي essential و هذه ا الة فإن ا زء الأساسي من مفكوك لورنت يصبح لا ائياً حدوده.

ونقطة اللا اية ∞ تنتج نقطة شاذة عند مالا اية ∞ singularity at فمثلا $f(z) = z^2$ ا قطب من الرتبة الثانية عند ∞ لأن $f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^2}$ ا قطب عند $w = 0$ من الرتبة الثانية

وكذلك $f(z) = e^z$ ا نقطة شاذة أساسية عند ∞ لأن $f\left(\frac{1}{w}\right) = e^{\frac{1}{w}}$ ا نقطة شاذة أساسية عند $w = 0$.

والدالة ا هي ليلية كل مكان من مستوى w (ماعدا النقاط عند ∞ طبعاً) تسمى بالدالة الكلية entire function من أمثال الدوال $e^z, \sin z, \cos z$ و $\sinh z$ و $\cosh z$ .. وهي دوال كن فكها فكوك تايلور و ا نصف قطر تقارب لا ائي.

مثال ٤-٥:

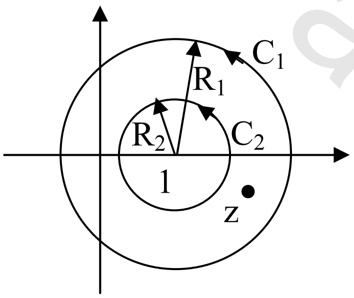
أوجد مفكوك لورنت لـ $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ حول z = 1

ا ل:

دعنا نقدم حلاً تفصيلياً .. فبناءً على نظرية لورنت فإن

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

حيث $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \dfrac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw\,, \qquad n=0,1,2,\ldots$



$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\eta)}{(\eta-a)^{n+1}}\, d\eta \qquad n=1,2,3,..$$

حيث $C_1 \quad : \quad |w-a|=R_1$

$C_2 \quad : \quad |\eta-a|=R_2 \quad R_1>R_2$

هذه ا سألة فإن $a=1$ وهي ثل نقطة شاذة للدالة من نوع القطب Pole من رتبة 2.

وبالتا فإن

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-1)^n}$$

حيث $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \dfrac{e^w}{(w-1)^{n+3}}\, dw,$

ومن صيغة تكامل كوشي

$$f^{(n)}(a)=\frac{(n!)}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dw,$$

أي أن $n=0,1,2,...$

$$a_n=\left.\frac{e^w}{(n+2)!}\right|_{w=1}=\frac{e}{(n+2)!},$$

كذلك

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{e^\eta}{(\eta-1)^2(\eta-1)^{-n+1}}\,d\eta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{e^\eta}{(\eta-1)^{3-n}}\,d\eta$$

والتكامل ينعدم عند $n = 3,4,5,\ldots$ (اذا؟)

ولكن عندما تكون $n = 1$ فإن

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{e^\eta}{(\eta-1)^2}\,d\eta$$

$$=\left.\left(e^\eta\right)'\right|_{\eta=1}=e$$

وعندما تكون $n = 2$ فإن

$$a_{-2}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{e^\eta}{(\eta-1)}\,d\eta$$

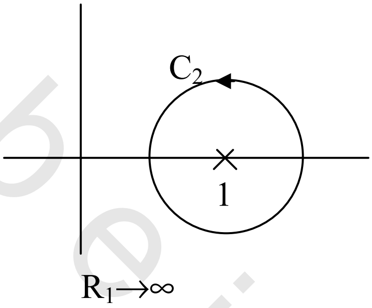
$$=\left.e^\eta\right|_{\eta=1}=e$$

بينما تنعدم بقيمة ا دود ا زء الأساسي من ا فكوك .. وبالتا فإن

$$f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^2}=\underbrace{\frac{e}{z-1}+\frac{e}{(z-1)^2}}_{\text{ا زء الأساسي}}+\underbrace{e\left[\frac{1}{2!}+\frac{(z-1)}{3!}+\frac{(z-1)^2}{4!}+\ldots+\frac{(z-1)^n}{(n+2)!}+..\right]}_{\text{ا زء التحليلي}}$$

والآن نستطيع أن نقدم حلاً تصراً كالآ :

بوضع z – 1 = u



$$\frac{e^z}{(z-1)^2}=\frac{e^{1+u}}{u^2}=\frac{e}{u^2}\left[e^u\right]$$

$$=\frac{e}{u^2}\left[1+u+\frac{u^2}{2!}+\ldots+\frac{u^n}{n!}+\ldots\right]$$

$$=e\left[\underbrace{\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}}+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{u}{3!}+\ldots+\frac{u^{n-2}}{n!}}+\ldots\right]$$

بوضع u = z – 1 مرة أخرى فإن

$$\frac{e^z}{(z-1)^2}=e\left[\underbrace{\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}}+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{z-1}{3!}+\frac{(z-1)^2}{4!}+\ldots+\frac{(z-1)^{n-2}}{n!}}_{n\geq 2}+\ldots\right]$$

وهو بالطبع نفس ا فكوك السابق.

ولاحظ أن ا زء الأساسي به حدان فقط (لأن رتبة القطب 2) وأن ا تسلسلة متقاربة ميع قيم z ما عدا z = 1.

<u>مثال ٤-٦:</u>

و   حالة الدالة $f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ عند z = 1

<u>ا ل:</u>

فإنه بوضع z – 1 = u فإن

$$f(z)=\frac{e^{2(1+u)}}{u^3}=\frac{e^2e^{2u}}{u^3}$$

$$=\frac{e^2}{u^3}\left[1+(2u)+\frac{(2u)^2}{2!}+\frac{(2u)^3}{3!}+\ldots+\frac{(2u)^n}{n!}+\ldots\right]$$

$$=\frac{e^2}{1}\left[\frac{1}{u^3}+\frac{2}{u^2}+\frac{(2)^2}{2!u}+\frac{(2)^3}{3!}+\ldots+\underbrace{\frac{(2)^nU^{n-3}}{n!}}_{n\geq 3}+\ldots\right]$$

وبوضع $u = z - 1$ فإن

$$\frac{e^{2^z}}{(z-1)^3} = e^2\left[\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)} + \frac{(2)^3}{3!} + \ldots + \frac{(2)^n (z-1)^{n-3}}{n!} + \ldots\right]$$

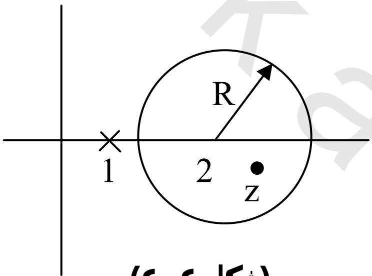
$n \geq 3$

ا ـزء الأساسي   ا ـزء التحليلي

لاحظ أن ا ـزء الأساسي به ثلاثة حدود (لأن القطب من رتبة 3).

مثال ٤-٧:

إذا طلب مفكوك لورنت للدالة $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)}$ حول $z = 2$



(شكل ٤-٤)

فإن الدالة ـليلية عند $z = 2$ ولذلك فإن ا ـفكوك الذي سنحصل عليه هو مفكوك تايلور .. ونصف قطر التقارب هو R ـيث $|z - 2| < R$ هي منطقة التقارب .. أي أن أي نقطة واقعة ـ هذه ا ـنطقة ستؤدي إ ـ تقارب هذه ا ـتسلسلة .. و ـ حالتنا هذه فإن $R = 1$ (ـاذا؟) وبالتا ـ

$$f(z) = \frac{e^{z-2+2}}{(z-2+2-1)} = \frac{e^2 e^{(z-2)}}{(1+(z-2))} = e^2 e^{z-2}(1+(z-2))^{-1}$$

$$= e^2\left(1 + (z-2) + \ldots + \frac{(z-2)^n}{n!} + \ldots\right)\left(1 - (z-2) + (z-2)^2 - \ldots + (-1)^n (z-2)^n + \ldots\right)$$

$$= e^2(1 + (1 + (-1)))(z-2) + (1 - 1 + \frac{1}{2!})(z-2)^2$$

$$+ (-1 + 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!})(z-2)^3 + (1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!})(z-2)^4 + \ldots)$$

$$= e^2\left(1 + \frac{1}{2!}(z-2)^2 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right)(z-2)^3 + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right)(z-2)^4 + \ldots\right)$$

وهو مفكوك تايلور كما نرى ومنطقة التقارب هي $|z-2|<1$ كما هو مب

بالرسم.

ملاحظة:

لإ اد مفكوك تايلور فإن

$$f(z)=\frac{e^z}{z-1}\rightarrow f(2)=\frac{e^2}{1}$$

$$f'(z)=\frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2}$$

$$=\frac{e^z}{z-1}-\frac{e^z}{(z-1)^2}\rightarrow f'(2)=e^2-\frac{e^2}{1}=0$$

$$f''(z)=\frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2}-\frac{(z-1)^2e^z-e^z2(z-1)}{(z-1)^4}$$

$$\rightarrow f''(2)=0-\frac{e^2-2e^2}{1}=+e^2$$

و النهاية

$$f(z)=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(z-2)+\frac{f''(2)}{2!}(z-2)^2+\ldots$$

$$=e^2+0-\frac{e^2}{2!}(z-2)^2+\ldots$$

وتعت الطريقة الأو تصرة ومباشرة ا ل.

مثال ٤-٨

أوجد مفكوك $\sin\frac{1}{z}$ حول $z=0$

ا ل:

$z=0$ نقطة شاذة من النوع الأساسي essential وبالتا فإنه بوضع $\frac{1}{z}=u$

$$\sin u = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad ,$$

وبوضع $u = \frac{1}{z}$ فإن

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \frac{1}{(z)^{2n-1}}$$

لاحظ أنه جزء أساسي فقط وعدد حدوده لا ائي (لأن الشذوذ هنا من النوع الأساسي) ..
وا تسلسلة متقاربة عند z ≠ 0.

<u>مثال ٤-٩:</u>

بالنسبة فكوك $e^{\frac{1}{z}}$ حول z = 0

<u>ا ل:</u>

z = 0 نقطة شاذة من النوع الأساسي وبالتا فان

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}.\frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{1}{n!}.\frac{1}{z^n} + \ldots$$

ونلاحظ هنا أيضا أن عدد حدود ا زء الأساسي لا ائي .. وأن ا زء التحليلي هو (1) فقط ويتم ا صول عليه عند ∞ .. وا تسلسلة متقاربة عند z ≠ 0.

<u>مثال ٤-١٠:</u>

بالنسبة فكوك $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ .. عند z = 0

<u>ا ل:</u>

نلاحظ أن الشذوذ هنا من النوع ا ُزال لأن $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ و ري تعريف الدالة عند z = 0 بأن قيمتها مساوية لـ (1) .. وبالتا ..

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}\ldots\right]$$

$$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots$$

ونلاحظ هنا أ ا جزء ليلي فقط (لأن الشذوذ مزال) وهي متقاربة ميع قيم z.

مثال ٤-١١:

مفكوك لورنت للدالة $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ حول z = -2

ا ل:

z = -2 قطب يس (من رتبة 1) … بوضع u = z + 2 .. أي أن

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{u-2}{(u-1)u} = \frac{2-u}{u}\,\frac{1}{1-u}$$

$$= \frac{2-u}{u}(1-u)^{-1}, \quad \underline{|u|<1}$$

$$= \frac{2-u}{u}\left(1+u+u^2+\ldots\right)$$

$$= (2-u)\left(\frac{1}{u}+1+u+u^2+\ldots\right)$$

$$= \left(\frac{2}{u}+2+2u+2u^2+\ldots-1-u-u^2-\ldots\right)$$

$$= \frac{2}{u}+1+u+u^2+u^3+\ldots$$

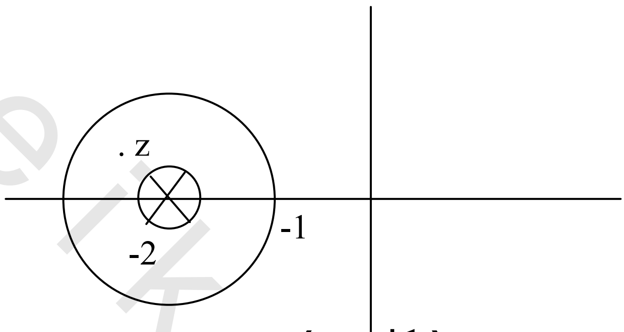
وبوضع u = z + 2 مرة أخرى فإن

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \underbrace{\frac{2}{z+2}}_{\text{ا زء الأساسي}} + 1 + \underbrace{(z+2)+(z+2)^2}_{\text{ا زء التحليلي}} + \ldots$$

ونلاحظ هنا أن ا زء الأساسي مكون من حد واحد لأن الدالة ا قطب يس simple pole عند $z = -2$.

ومن شروط ا فكوك فإن منطقة التقارب هي

$$0 < |z + 2| < 1$$



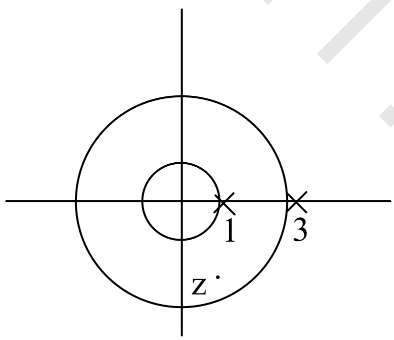
(شكل ٤-٥)

مثال ٤-١٢

فك الدالة $\dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ يث تكون قق ا نطقة $1 < |z| < 3$

ا ل:

هذه ا الة يتم ديد منطقة التقارب كما هو مب بالرسم



(شكل ٤-٦)

ولابد من مراعاة ذلك عند القيام بفك الدالة .. فبإجراء الكسور ا زئية

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+z} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{3+z}$$

لا يمكننا الفك المباشر $(1+z)^{-1}$ إلا إذا كان $|z|<1$ .. وهذا يتعارض مع منطقة التقارب المفروضة علينا .. وبالتالي لابد من إجراء جبري يدخلنا في فترة التقارب وذلك يتم كالآتي :

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-1},\quad \left|\frac{1}{z}\right|<1\Rightarrow |z|>1$$

وهذا يتفق مع شرط التقارب المعطى .. وبالتالي

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\ldots\right) \qquad (1)$$

كذلك فإن فك $\frac{1}{3+z}$ لابد أن يراعى فيه الشرط السابق ..

$$\frac{1}{3+z}=\frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}\right)^{-1},\quad \left|\frac{z}{3}\right|<1\Rightarrow |z|<3$$

وهذا يتفق مع الشرط .. وبالتالي :

$$\frac{1}{3+z}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}-\frac{z^3}{27}-\ldots\right)$$

وبالتالي فإن

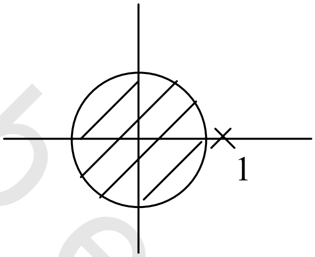
$$\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\ldots\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\frac{z^3}{27}\ldots\right)$$

$$=\ldots-\underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{z}}_{\text{الجزء الأساسي}}\underbrace{-\frac{1}{6}+\frac{z}{18}-\frac{z^2}{45}}_{\text{الجزء التحليلي}}\ldots.$$

لاحظ أن مركز الدائرة $|z| = 1$ و $|z| = 3$ هو $z = 0$ وهي هنا ليست نقطة شاذة (ليست قطباً) وبالتا فإن ا زء الأساسي عدد حدوده لا ائية.



(شكل ٤-٧)

مثال ٤-١٣

بالنسبة للمثال السابق آخذين فترة تقارب $|z| < 1$

ا ل:

هذه ا الة نلاحظ أن الدالة

$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ ليلية بالكامل

وبالتا سنحصل على مفكوك تايلور كالآ

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+z}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{3+z}$$

$$=\frac{1}{2}(1+z)^{-1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}\right)^{-1},\quad |z|<1\quad,\quad |z|<3$$

أي أن $|z| < 1$ و $|z| < 3$ وتقاطع الشرط هو أن $|z| < 1$ فهو قق الأثن معاً ..

وبالتا

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{2}\left(1-z+z^2-z^3-\ldots\right)$$

$$-\frac{1}{6}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}-\frac{z^3}{27}+\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{4}{9}z+\frac{13}{27}z^2-\frac{40}{81}z^3-\ldots$$

أي مفكوك تايلور .. وهو قق لكل z $|z| < 1$.

مثال ٤-١٤

ماذا دث للمثال السابقة إذا جعلنا فترة التقارب $|z| > 3$

ا ل:

لابد وأن تتفق شروط ا فكوك مع ا نطقة ا ديدة ا عطاة ..

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{3}{z}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(1+\frac{3}{z}\right)^{-1}$$

والشرطان ا $|z| > 1$ و $|z| > 3$ (اذا؟)

وبالتا فإن الشرط $|z| > 3$ قق الاثن معا .. وعنده

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-...\right)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(1-\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}-\frac{27}{z^3}-...\right)$$

$$=\underbrace{\frac{1}{z^2}-\frac{4}{z^3}+\frac{13}{z^4}-\frac{40}{z^5}}_{\text{جزء أساسي فقط}}+...$$

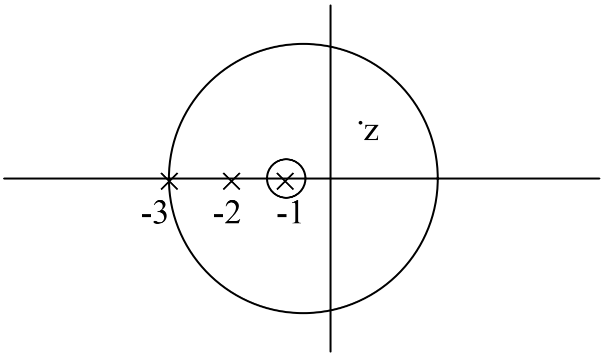
والفك يتم حول أي من القطب

z = - 3 أو z = - 1

وبالتا لا يوجد جزء ليلي وعدد حدود ا زء الأساسي لا ائي.

مثال ٤-١٥

و حالة عزل أحد القطب .. وليكن $0 < |z + 1| < 2$



(شكل ٤-٨)

فأنه بوضع $z + 1 = u$ فإن

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{u(u+2)} = \frac{1}{2u\left(1+\frac{u}{2}\right)} = \frac{1}{2u}\left(1+\frac{u}{2}\right)^{-1},$$

ت شرط أنه $|u| > 0$ وأن $\left|\frac{u}{2}\right| < 1$ أي أن $|u| < 2$

وبالتا كننا إجراء التا :

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2u}[1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} - \ldots$$

$$= \frac{1}{2u} - \frac{1}{4} + \frac{u}{8} - \ldots$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2(1+z)}}_{\text{ا زء الأساسي}} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{(1+z)}{8} - \ldots}_{\text{ا زء التحليلي}}$$

ونلاحظ هنا أنه لأننا عزلنا القطب $z = -1$ فإن ا زء الأساسي يد أنه حد واحد يتفق مع كونه قطباً يس اً .. Simple Pole.

وا لاحظ هنا أنه إذا كان الشذوذ قطبياً والفك حول نقطة القطب فإن عدد حدود ا ـزء الأساسي ـب أن يساوي رتبة هذا القطب وأن الدالة إذا كانت ـليلية منطقة الفك بالكامل فإن مفكوك لورنت ينطبق مع مفكوك تايلور ـذه الدالة .. فإذا كانت ا ـنطقة تعزل نقاط الشذوذ فإننا سنحصل على ا ـزء الأساسي فقط ..

٤-٢ نظرية الباقي The Residue Theorem

٤-٢-١ مقدمة

بالنظر إ مفكوك لورنت للدالة $f(z)$:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

حيث $f(z)$ دالة ـليلية على وداخل الدائرة C الا عند النقطة $z=a$ وال هي مركز الدائرة أيضا وحيث

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \qquad n=0,\pm 1,\pm 2,...$$

فإذا ما أردنا إ ـاد $\oint_C f(z)dz$ .. فإن ا ـزء التحليلي من ا ـفكوك يعطى صفراً (ـاذا؟) ..

أما ا ـزء الأساسي فيعطى تكاملات على صورة

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^m}=\begin{cases} 2\pi i & \mathrm{m}=1 \\ 0 & \mathrm{m}\neq 1 \end{cases}$$

أى لا يتبقى من هذه التكاملات إلا التكامل $\oint_C \frac{dz}{(z-a)}$ .. وهو ا ـاص با ـعامـل a_{-1} ..

ولذلك فمن وجهة نظر التكامل $\oint_C f(z)dz$ .. فإن a_{-1} هي ا ـعامل البـاقي الوحيـد ا ـسابات .. ولذلك يسمى بالباقي residue ويكون التكامل كالآ :

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \; a_{-1}}$$

ويظهر لنا أ ية إ اد مفكوك لورنت للدالة $f(z)$ بغض النظر عن نوع النقطة الشاذة $z = a$ .. فبعد إ اد ا فكوك يلعب الباقي a_{-1} دوراً هاما و وريا إ اد قيمة التكامل

$$\oint_C f(z)dz .$$

فإذا كان الشذوذ من النوع القط فقط أي أن $z = a$ قطب من رتبة m فإن مفكوك لورنت حول نقطة $z = a$ يعطى الصورة الآتية:

$$f(z) = \underbrace{\frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-a)}}_{\text{ا زء الأساسي}} + a_0 + a_1(z-a) + \ldots$$

وهذا شئ أشرنا إليه سابقاً أن عدد ا دود ال تظهر ا زء الأساسي تساوي رتبة هذا القطب. والآن بالضرب $(z-a)^m$ فإن

$$(z-a)^m f(z) = a_{-m} + a_{-(m-1)}(z-a) + .. + a_{-1}(z-a)^{m-1}$$
$$+ a_0(z-a)^m + \ldots . \qquad (1)$$

وهي ثل مفكوك تايلور للدالة التحليلية $(z-a)^m f(z)$ (اذا؟) حول نقطة $z = a$ وبتفاضل العلاقة (1) $(m-1)$ مرة فإننا سنحصل على

$$\frac{d^{m-1}z}{dz^{m-1}}\left((z-a)^m f(z)\right) = (m-1)!\ a_{-1} +$$
$$m(m-1)\ldots 2a_0(z-a) + \ldots$$

وعند أخذ النهاية $z \to a$ فإن

$$\lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}\left((z-a)^m f(z)\right)}{dz^{m-1}} = (m-1)!\, a_{-1}$$

أي أن حالة وجود قطب عند $z = a$ من رتبة m فإن

$$\boxed{a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)}$$

وهذه النتيجة توصلنا إليها سابقا اية الباب الثالث (٣-٧) ولكن بأسلوب تلف وبعيداً عن مفكوك لورنت للدالة اا تكن معروفة حينئذ .. (أنظر ص ١٤٦) ..

والآن نستطيع إ اد $\oint_C f(z)dz$ بشكل عام ولكل أنواع نقاط الشذوذ وذلك باستخدام النظرية التالية.

نظرية ٤-٣ نظرية الباقي

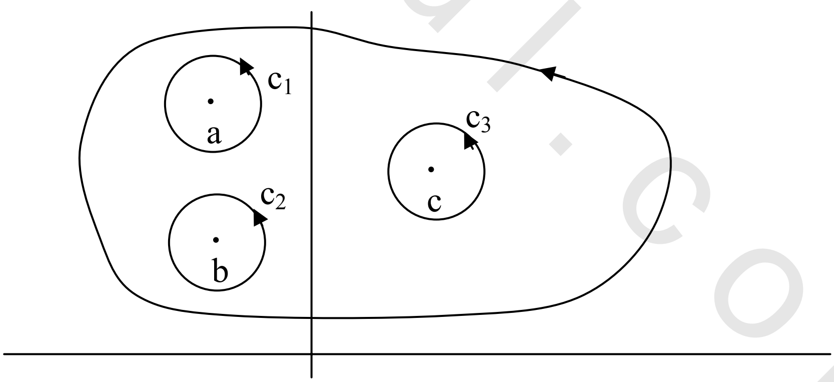
إذا كانت $f(z)$ دالة ليلية على وداخل منح مغلق يس C باستثناء عدد دود من النقاط وليكن ..a,b,c داخل C وال ا البواقي ... a_{-1},b_{-1},c_{-1}, على الترتيب فإن

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i[a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}+...]$$

$$=2\pi i \sum \text{residues of interior singular points}$$

الإثبات

بالنظر إ شكل (٤-٩)



(شكل ٤-٩)

وبأخذ ا سارات الدائرية ... c_1,c_2 وال مركزها هي النقاط الشاذة كمـا هـو موضـح بالشكل فإن

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{C_3} f(z)dz + \ldots \qquad (1)$$

ولكن

$$\oint_{C_1} f(z)dz = 2\pi i \ a_{-1}$$

$$\oint_{C_2} f(z)dz = 2\pi i \ b_{-1}$$

$$\oint_{C_3} f(z)dz = 2\pi i \ c_{-1}$$

وهكذا .. حيث .. a_{-1}, b_{-1}, c_{-1} هي البواقي كما قدمنا للنظرية وبالتا فإن

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\left[a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \ldots\right]$$

$$= 2\pi i\,[\text{sum of residues}].$$

ملاحظة هامة:

كن مد إثبات هذه النظرية لتطبيقها على ا نحنيات العديدة الاتصال multiply-connected وكذلك على عدد لا ائي من النقاط الشاذة ا عزولة infinitely many isolated singularities وا هتم بالإثبات العام كنه الرجوع ا [4] .. وهى ختام يل لأفكار هذا الكتاب.

مثال ٤-١٦

أوجد $\oint_C \dfrac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\,dz$ حيث C توي $z = -1$ و $z = \pm 2i$

ا ل:

طبقا لنظرية الباقي فإن

$$\oint \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\,dz = 2\pi i\left[R_1 + R_2 + R_3\right]$$

حيث (i) يوجد قطب من الرتبة الثانية عند $z = -1$ وبالتا

$$R_1 = \frac{1}{1!} \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz} (z+1)^2 . \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 \left(z^2+4\right)}$$

$$= \lim_{z\to -1} \frac{\left(z^2+4\right)(2z-2) - \left(z^2-2z\right)(2z)}{\left(z^2+4\right)^2}$$

$$= -\frac{14}{25}$$

(ii) يوجد قطب من الرتبة الأو عند $z = +2i$ وبالتا

$$R_2 = \lim_{z\to 2i} (z-2i) \frac{z^2-2z}{(z+1)^2 (z+2i)(z-2i)}$$

$$= \frac{7+i}{25}$$

(iii) يوجد قطب من الرتبة الأو عند $z = -2i$ وبالتا

$$R_3 = \lim_{z\to} (z+2i) \frac{z^2-2z}{(z+1)^2 (z+2i)(z-2i)}$$

$$= \frac{7-i}{25} = \overline{R}_2$$

وبالتا فإن

$$\oint \frac{z^2-2z}{(z+1)^2 \left(z^2+4\right)} dz = 2\pi i \left[-\frac{14}{25} + \frac{7+i}{25} + \frac{7-i}{25} \right]$$

$$= 2\pi i \frac{-14+14}{25}$$

$$= 0$$

ملاحظة:

إذا كان ا طلوب $\oint_C \frac{z^2-2z}{(z+1)^2 \left(z^2+4\right)} dz$ حيث C توي فقط $z = -1$

فإننا سب فقط R_1 ويكون التكامل:

$$\oint_C \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz = 2\pi i\, R_1$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-14}{25}\right)$$

$$= -\frac{28\pi i}{25}$$

وإذا كانت C تحوي النقطة z = ± 2i فقط فإن

$$\oint_C \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz = 2\pi i\,[R_2+R_3]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{14}{25}\right]$$

$$= \frac{28\pi i}{25}$$

وهكذا ب أن يلاحظ القارئ أن العـ ة بالنقاط الشاذة الداخلية فقط.

مثال ٤-١٧

أحسب $\oint_{\substack{C\\|z|=1}} \sin\frac{1}{z}dz$

ا ل:

هذه ا الة فإن $z = 0$ نقطة شاذة من النوع الأساسي essential وهي داخل ا سار |z| = 1 .. وبالتا

$$\oint_C \sin\frac{1}{z}dz = 2\pi i \,.\, R$$

ولإ اد R نقوم ساب مفكوك لورنت للدالة $\sin\frac{1}{z}$ وقد قمنا بذلك أنفاً حيث

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}.\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\ \frac{1}{z^5}\ldots$$

وهي جزء أساسي فقط و د منها أن $R = a_{-1} = 1$

وبالتا فإن
$$\oint_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

مثال ٤-١٨

أوجد $\oint_C (z-3)\sin\frac{1}{z+2}\,dz$ حيث C توي النقطة $z = -2$.

ا ل:

توجد نقطة شاذة أساسية عند z = -2 ا تواه داخل C وبالتا

$$\oint_C (z-3)\sin\frac{1}{z+2}\,dz = 2\pi i\, R$$

ولإ اد R نوجد أولا مفكوك لورنت للدالة $(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ حول نقطة z = -2 كالآ :

بوضع z + 2 = u

$$(z-3)\sin\frac{1}{z+2} = (u-5)\sin\frac{1}{u}$$
$$= (u-5)\left[\frac{1}{u} - \frac{1}{3!}\frac{1}{u^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{u^5} - \dots\right]$$
$$= \left[1 - \frac{1}{3!}\frac{1}{u^2} + \frac{1}{5!}\frac{1}{u^4} - \dots - \frac{5}{u} + \frac{5}{3!}\frac{1}{u^3} - \frac{5}{5!}\frac{1}{u^5} - \dots\right]$$

وبالتا فإن $R = a_{-1} = -5$

أي أن

$$\oint_C (z-3)\sin\frac{1}{z+2}\,dz = 2\pi i(-5)$$
$$= -10\pi i$$

لاحظ أن $\oint\limits_C (z-3)\sin\frac{1}{z+2}dz = 0$ إذا كانت z = -2 خارج C. تذكر ذلك دائما فنظرية كوشي جاهزة للتطبيق دائماً.

مثال ٤-١٩

أوجد $\oint\limits_C \frac{dz}{(z+1)(z+3)}$

حيث (i) c: |z| < 1 (ii) |z| > 3

ا ل:

بالرجوع إ الأمثلة السابقة حساب مفكوك لورنت فإن

(i) حالة C: |z| < 1 تكون الدالة $\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ ليلية ومفكوك لورنت ا (كما حصلنا عليه) هو مفكوك تايلور وبالتا $a_{-1} = 0$ أي أن $\oint\limits_{\substack{C\\|z|<1}} \frac{dz}{(z+1)(z+3)} = 0$

أو بتطبيق نظرية كوشي مباشرة.

(ii) حالة |z| > 3 كان مفكوك لورنت هو كالآ :

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{13}{z^4} - \frac{40}{z^5} + \ldots$$

أي أن $a_{-1} = 0$

وبالتا

$$\oint\limits_{|z|>3} \frac{dz}{(z+1)(z+3)} = 2\pi i(0)$$

$$= 0$$

مثال ٤-٢٠

$\oint_C z^2 \sin\frac{1}{z}\,dz$ حيث C توي $z = 0$.

ا ل:

$$z^2 \sin\frac{1}{z} = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \dots\right)$$

$$= z - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^3} - \dots$$

وبالتا فإن $a_{-1} = -\frac{1}{3!}$

أي أن

$$\oint_C z^2 \sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{3!}\right)$$

$$= -\frac{\pi i}{3}$$

مثال ٤-٢١

$$\oint_{C,\ |z|=\frac{3\pi}{2}} \frac{z}{\sin z}\,dz$$

ا ل:

$\sin z = 0$ عندما تكون $z = 0, \pm\pi, \pm2\pi, ..$ وواضح أن النقاط الشاذة ا تواه داخل $|z| = \frac{3\pi}{2}$ هي $z = 0, \pm\pi$ وبالتا يوجد ثلاثة نقاط شاذة داخل ا سار ..

(i) عند $\underline{z = 0}$: نعلم أن $\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z} = 1$ وبالتا فإن $\lim_{z\to0}\frac{z}{\sin z} = 1$ أي ا ا نقطة شاذة مزالة .. وبذلك فإن مفكوك لورنت

$$\frac{z}{\sin z}=\frac{z}{z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5\ldots}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\ldots}$$

$$=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$$

أي أن

$$a_0-\frac{1}{3!}a_0z^2+\frac{1}{5!}z^4a_0-\ldots$$

$$+a_1z-\frac{1}{3!}a_1z^3+\frac{1}{5!}a_1z^5-\ldots$$

$$+a_2z^2-\frac{1}{3!}a_2z^4+\frac{1}{5!}a_2z^6-\ldots$$

$$=1$$

فبا قارنة بـ معاملات z^n الطرف فإن

$$a_0=1,\quad a_1z=0\Rightarrow a_1=0\quad ,$$

$$\left(-\frac{1}{3!}a_0+a_2\right)=0\Rightarrow a_2=\frac{1}{3!}$$

وهكذا سب بقية ا عاملات .. وبالتا :

$$\frac{z}{\sin z}=1+\frac{1}{3!}z^2+\ldots$$

أي أن $a_{-1}=0$ وبالتا $R_1=0$

(ii) عند $z=\pi$ .. فهذا قطب من ا رتبة الأو (اذا؟) ..

وبالتا

$$R_2=\frac{1}{0!}\lim_{z\to\pi}(z-\pi)\cdot\frac{z}{\sin z}$$

$$=\pi\lim_{z\to\pi}\frac{z-\pi}{\sin z}=\pi\lim_{z\to\pi}\frac{1}{\cos z}=\pi\frac{1}{\cos\pi}=-\pi$$

(iii) عند π- = z .. وهذا أيضا قطب يسـ وبالتا :

$$R_3 = \lim_{z\to -\pi}(z+\pi)\frac{z}{\sin z} = (-\pi)\lim_{z\to -\pi}\frac{z+\pi}{\sin z}$$

$$= (-\pi)\lim_{z\to -\pi}\frac{1}{\cos z}$$

$$= (-\pi)\frac{1}{\cos(-\pi)} = \pi$$

أي أن

$$\oint_{|z|=\frac{3\pi}{2}} \frac{z}{\text{sinz}}\,dz = 2\pi i\left[R_1 + R_2 + R_3\right]$$

$$= 2\pi i\left[0-\pi+\pi\right]$$

$$= 0$$

مثال ٤-٢٢

$$\oint_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{z}{\sin^2 z}\,dz$$

ا ل:

z = 0 هي النقطة الشاذة الوحيدة الداخلية وبالتا :

(i) عند z = 0

$$\frac{z}{\sin z} = 1 + \frac{1}{3!}z^2 + \ldots$$

$$\frac{z^2}{\sin^2 z} = 1 + \left(\frac{2}{3!}\right)z^2 + \ldots$$

وبالقسمة على z:

$$\frac{z}{\sin^2 z} = \frac{1}{z} + \left(\frac{2}{3!}\right)z + \ldots$$

نلاحظ مفكوك لورنت هنا أن $a_{-1} = 1$ (أي أن z = 0 قطب من رتبة يسـ ة) ..

وللتأكد من ذلك فإن $\lim_{z\to 0}(z).\frac{z}{\sin z^2} = 1 \neq 0$

أي أن $z = 0$ قطب فعلا من رتبة واحد.

وبالتا فإن $R_1 = 1$

وبالتا فإن $\oint_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{z}{\sin^2 z} = 2\pi i$

مثال ٤-٢٣

$$\oint_{|z|=\frac{3\pi}{2}} \frac{z}{\sin^2 z}dz$$

ا ل:

هذه ا الة فإن $z = 0, \pm\pi$ ثلاث نقاط شاذة داخلية وبالتا :

(i) عند $z = 0$ فإن $R_1 = 1$ كما ا ثال السابق

(ii) بالنسبة للقطب $z = \pm\pi$ أو $z = m\pi$ حيث $m = \pm 1$ فإنه ر ا يكون من

الأيسر إ اد مفكوك لورنت للدالة $\frac{z}{\sin^2 z}$ دعنا نضع $z - m\pi = u$ وبالتا

$$\frac{z}{\sin^2 z} = \frac{m\pi + u}{(\sin(m\pi + u))^2} = \frac{(m\pi + u)}{\sin^2 u}$$

$$= \frac{m\pi + u}{\left(u - \frac{1}{3!}u^3 + \frac{1}{5!}u^5 - \ldots\right)^2}$$

$$= \frac{m\pi + u}{u^2\left(1 - \frac{u^2}{6} + \frac{u^4}{120}\ldots\right)^2}$$

$$= \frac{m\pi + u}{u^2\left(1 - \frac{u^2}{3} + \frac{2u^4}{45} + \ldots\right)} = \frac{a_{-2}}{(u)^2} + \frac{a_{-1}}{u} + a_0 + a_1 u + \ldots$$

وذلك لأن $z = \pm\pi$ قطبان من الرتبة الثانية .. وبالتا :

$$m\pi + u = \left(1 - \frac{u^2}{3} + \frac{2u^4}{45} + \dots\right)\left(a_{-2} + a_{-1}u + a_0u^2 + a_1u^3 + \dots\right)$$

$$= a_{-2} + a_{-1}u + a_0u^2 + a_1u^3 + \dots$$

$$-\frac{1}{3}a_{-2}u^2 - \frac{1}{3}a_{-1}u^3 + \dots.$$

$$+\frac{2}{45}a_{-2}u^4 - \dots$$

و ساواة ا عاملات الطرف فإن

$$a_{-2} = m\pi, \qquad a_{-1} = 1, \qquad \left(a_0 - \frac{1}{3}a_{-2}\right) = 0$$

أي أن

$$a_0 = \frac{1}{3}a_{-2} = \frac{1}{3}m\pi$$

أي أن

$$\frac{z}{\sin^2 z} = \frac{m\pi}{(z-m\pi)^2} + \frac{1}{(z-m\pi)} + \frac{m\pi}{3} + \dots$$

وهذا يثبت توقعنا أن $z = m\pi$ قطبان من الرتبة الثانية $(m = \pm 1)$

وأن $R_{2,3} = 1$ ا الت :

وبالتا فإن

$$\oint_{|z|=\frac{3\pi}{2}} \frac{z}{\sin^2 z}dz = 2\pi i\left[R_1 + R_2 + R_3\right]$$

$$= 6\pi i$$

مثال ٤-٢٤

أوجد

$$\oint_{|z|=\pi} \sec z\, dz$$

ا ل:

نعلم أن $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$

وأن $\cos z = 0$ تعطى $z = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k = 0,\ \pm 1\ldots$

وبالتا فإن القطب الوحيد ا متوى داخل $|z| = \pi$ هو $z = \frac{\pi}{2}$ وهو قطب يس .. وبالتا :

$$R = \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2} \right) . \frac{1}{\cos z}$$

$$= \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\sin z}$$

$$= -1$$ بتطبيق قاعدة لوبيتال ...

أي أن $$\oint_{|z|=\pi} \sec z \, dz = -2\pi i$$

رينات ٤

١. أوجد مفكوك لورنت للدوال الآتية حول النقطة الشاذة ا وجودة ب قوس

$$(i)\ f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}, \qquad (z=1)$$

$$(ii)\ f(z)=(z-3)\sin\frac{1}{z+2}, \qquad (z=-2)$$

$$(iii)\ f(z)=\frac{z-\sin z}{z^3}, \qquad (z=0)$$

$$(iv)\ f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}, \qquad (z=-1)$$

$$(v)\ f(z)=\frac{1}{z^2(z-3)^3}, \qquad (z=3)$$

٢. أثبت ا فكوكات الآتية:

$$(i)\sin z^2=z^2-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}-\frac{z^{14}}{7!}....,|z|<\infty$$

$$(ii)\tan^{-1}z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}....,|z|<1$$

$$(iii)\tan z=z+\frac{z^3}{3}+\frac{2z^5}{15}+...., \qquad |z|<\frac{\pi}{2}$$

$$(iv)\sec z=1+\frac{z^2}{2}+\frac{5z^4}{24}+...., \qquad |z|<\frac{\pi}{2}$$

$$(v)\csc z=\frac{1}{z}+\frac{z}{6}+\frac{7z^3}{360}...., \qquad |z|<\pi$$

$$(vi)\sin^{-1}z=z+\frac{1}{2}\frac{z^3}{3}+\frac{1\times3}{2\times4}\frac{z^5}{5}+\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\frac{z^7}{7}....,|z|<1$$

(اختار الفرع الذي يعطي عند $\sin^{-1}0=0$)

$$(vii)\ \frac{1}{\sqrt{1+z^3}} = 1 - \frac{1}{2}z^3 + \frac{1\times 3}{2\times 4}z^6 - \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}z^9 + \ldots,\quad |z|<1$$

(اختار الفرع الذي يعطي عند $z=0$,$\sqrt{1+z^3}=1$)

٣. فك الدالة $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ وا قفة للمناطق الآتية

(i) $|z| < 1$
(ii) $1 < |z| < 2$
(iii) $|z| > 2$
(iv) $|z-1| > 1$
(v) $0 < |z-2| < 1$

٤. فك الدوال الآتية حول $z = 0$

$$(i)\quad f(z)=\frac{1-\cos z}{z}$$

$$(ii)\quad f(z)=\frac{e^{z^2}}{z^3}$$

$$(iii)\quad f(z)=\frac{1}{z}\cosh\frac{1}{z}$$

$$(iv)\quad f(z)=z\sinh\sqrt{z}$$

٥. أثبت أن $z=\dfrac{\pi}{2}$ قطب يس للدالة $f(z) = \tan z$ ومن أوجد التكامل

$$\oint_{0<\left|z-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{2}} \tan z\, dz$$

٦. أوجد مفكوك $f(z)=\dfrac{1}{\ln(1+z)}$ حول $z=0$ ومن أوجد

$$\oint_{\substack{C\\ 0<|z|<1}} f(z)\,dz$$

٧. أوجد مفكوك $\frac{\ln(1+z)}{1+z}$ واثبت أن z = - 1 شذوذ مزال، ومن أوجد

$$\oint_{|z|<1} \frac{\ln(1+z)}{1+z}dz$$

٨. اثبت أن مفكوك الدالة $e^{\sin z}$ هو

$$e^{\sin z} = 1+z+\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{8}-\frac{z^5}{15}+\ldots$$

واثبت أن $\oint_C e^{\sin z}\, dz = 0$ لأي مسار مغلق C.

٩. أوجد البواقي للدالة $f(z) = e^z \csc^2 z$

(الإجابة: $R_m = e^{m\pi}, m = 0, \pm 1, \ldots$)

١٠. أوجد باقي الدالة $f(z) = \frac{\cot z \coth z}{z^3}$ عند z = 0

مساعدة:

$$\cosh z = 1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots$$

$$\sinh z = z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots$$

(الإجابة: $-\frac{7}{45}$)

١١. أوجد التكامل $\oint_{C\; |z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}dz$

(الإجابة: $\frac{t-1}{2}+\frac{1}{2}e^{-t}\cos t$)

١٢. أوجد التكامل $\oint\limits_{\substack{C\\|z|=1}} e^{-\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z}\, dz$

(الإجابة: $2\pi i$)

١٣. أوجد التكامل $\oint\limits_{\substack{C\\|z|=5}} \frac{e^z}{\cosh z}\, dz$

(الإجابة: $8\pi i$)

١٤. دع C هو المربع المحدود بـ $x = \pm 2$ و $y = \pm 2$ اثبت أن

$$\oint\limits_C \frac{\sinh 3z}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3} dz = \frac{-9\pi\sqrt{2}}{2}$$

١٥. اثبت أن نظرية كوشي وصيغة تكامل كوشي هما حالتان خاصتان من نظرية الباقي.

١٦. اثبت أن $\oint\limits_{\substack{C\\|z-1|=4}} z^3 e^{\frac{1}{z}}\, dz = \frac{1}{24}$

١٧. اثبت أن $\oint\limits_C \frac{\cosh z}{z^3} dz = \pi i$ إذا كانت C هي المربع الذي رؤوسه ($\pm 2 \pm 2i$).

١٨. اثبت أن $\oint \frac{e^{zt}}{z\left(z^2+1\right)} = 2\pi i(1-\cos t),\, t>0$

إذا كانت C هي المربع الذي رؤوسه ($1 \pm i$, $-1 \pm i$).