الباب الثالث

تكامل الدوال المركبة
Complex Integration

هذا الباب نكتشف سحراً جديداً نظرية ا تغ ا ركب .. وإذا كنا قد تعنـا عادلا كوشي – ر ان ونظريات أخرى كوجود جديد فاهيم الاشتقاق للدوال بعد توسيع مفهومها من ا قيقي إ ا ركب .. فإن سحر النظرية ا قيقي يكمن التكامل ..

٣-١ التكامل ا طي Line Integrals

مازالت الاستمرارية تلعب دوراً ورياً .. فإذا ما كانت $f(z)$ دالة مستمرة علـى كل نقاط ا نحـ C (شكل ٣-١) والذي سنفترض أن له طولاً دوداً وليكن L ولتكن نقطة بدايته $a = z_0$ ونقطة ايته $b = z_n$ بينما النقاط $z_1, \ldots, z_{n-1}$ نقاط اختيارية علـى هـذا ا نحـ .. وإذا ما كوننا التجميع

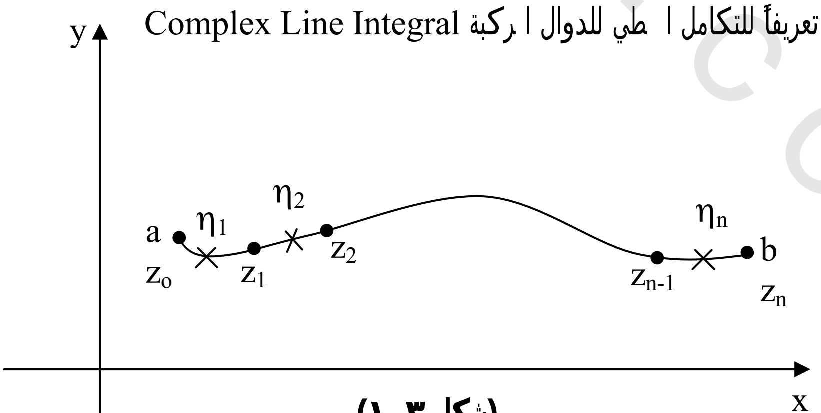
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\Delta z_k$$

حيث $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$

و عل عدد التقسيمات $n \to \infty$ يث $|\Delta z_k| \to 0$ فإن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz$$

يعطى تعريفاً للتكامل ا طي للدوال ا ركبة Complex Line Integral



(شكل ٣-١)

ومازال شرطنا هو الاتصال .. وبالتا فإذا ما كانت الدالة دالة ليلية فهو شرط أكـ مـ ن ا طلوب.

والآن إذا ما كانت $f(z)= u + iv$ فإن

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy)$$

$$= \int_C (udx - vdy) + i\int_C vdx + udy$$

أي أن التكامل ا ركب ينقسم إ تكامل خطي معرف على الدوال ا قيقية .. ومن هنـا تدخل بعض النظريات ا فيدة التكامل ا طي ا قيقي لصياغة نظريات جديـدة للتكامـل ا طي ا ركب .. وبناءً على ا واص ذا ا ا قل ا قيقي فإنه كن كتابة ا واص التاليـة للتكامل ا طي ا ركب:

$$\int_C (f(z) \pm g(z))dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)dz \qquad \text{(i)}$$

$$\int_C Af(z)dz = A\int_C f(z), A: \text{ثابت} \qquad \text{(ii)}$$

$$\int_a^b f(z)dz = -\int_b^a f(z)dz \qquad \text{(iii)}$$

$$\int_a^b f(z)dz = \int_a^m f(z)dz + \int_m^b f(z)dz \qquad \text{(iv)}$$

حيث m نقطة على C أيضاً.

(v) وهي خاصية هامة

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le ML$$

حيث $|f(z)| \le M$ .. أي أن M أحد ا دود القصوى لـ f(z) على C و L هو طول ا نحـ C.

الإثبات:

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} f(\eta_k)\Delta z_k$$

$$\left|\int_C f(z)dz\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} f(\eta_k)\Delta z_k\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |f(\eta_k)||\Delta z_k| \quad , \qquad |f(z)| \leq M$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} M\ |\Delta z_k|$$

$$\leq M \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta z_k|$$

$$= M\ L$$

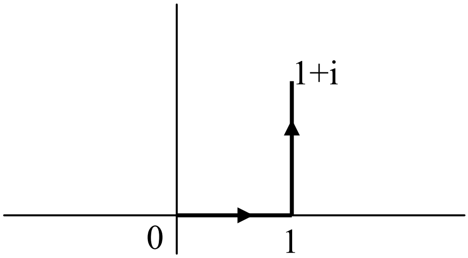
وهذا الأسلوب ساب القيمة العددية سوف نستعمله كث ا هذا الباب و مواضع تلفة فيجب على القارئ فهمه فهماً جيداً .. وكنتيجة لذلك فإن علاقة ذات أ ية كب ة ب الالتفات إليها كالتا :

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)||dz|$$

مثال ٣-١

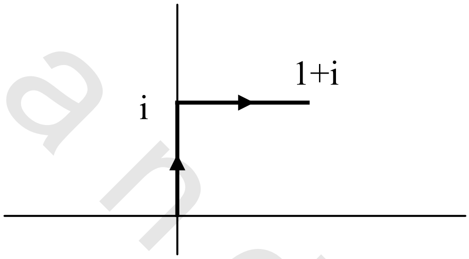
أحسب $\int_0^{1+i} z\ dz$ على

(i) ا سار من z=0 إ z=1 ا سار من z=1 إ z=1+i (شكل ٣-٢)



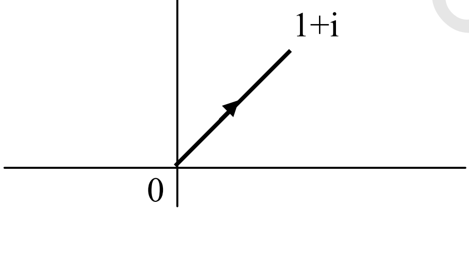
(شكل ٣-٢)

(ii) ا سار من z=0 إ z=i ا سار من z=i إ z=1+i (شكل ٣-٣)



(شكل ٣-٣)

(iii) ا سار ا باشر من z=0 إ z=1+i كما هو مب بشكل ٣-٤.



(شكل ٣-٤)

ا ل

(i) بالنسبة للمسار الأول

$$\int_0^{1+i} zdz = \int_0^1 \underbrace{zdz}_{y=0} + \int_1^{1+i} \underbrace{zdz}_{x=1}$$

$$= \int_0^1 xdx + \int_0^1 (1+iy)idy \quad , \quad 0 \le y \le 1$$

$$= \frac{1}{2}x^2 {}_0\Big|^1 + iy {}_0\Big|^1 - \frac{1}{2}y^2 {}_0\Big|^1$$

$$= \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2}$$

$$= i$$

(ii) بالنسبة للمسار الثا

$$\int_0^{1+i} zdz = \int_0^i \underbrace{zdz}_{x=0} + \int_i^{1+i} \underbrace{zdz}_{y=1}$$

$$= \int_0^1 iy(idy) + \int_0^1 (x+i)(dx)$$

$$0 \le y \le 1 \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

$$= -\frac{1}{2}y^2 {}_0\Big|^1 + \frac{1}{2}x^2 {}_0\Big|^1 + ix {}_0\Big|^1$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + i$$

$$= i$$

(iii) بالنسبة للمسار الثالث (y=x)

$$\int_0^{1+i} \underbrace{zdz}_{y=x} = \int_0^1 (x+ix)(dx+idx) \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

$$= \int_0^1 (x)(1+i)(1+i)dx$$

$$= (1+i)^2 \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(1+2i-1)$$

$$= i$$

هل هي ـرد مصادفة أن قيم التكامل متساوية على هذه ا سارات ا تعددة؟

مثال ٣-٢

أحسب $\int_0^{1+i} \bar{z}dz$ على نفس ا سارات السابقة

ا ل

(i) بالنسبة للمسار الأول

$$\int_0^{1+i} \bar{z}dz = \int_0^{1+i} \underbrace{\bar{z}dz}_{y=0} + \int_1^{1+i} \underbrace{\bar{z}dz}_{x=1}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 + \int_0^1 (1-iy)(idy)$$

$$= \frac{1}{2} + i(1) + \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + i + \frac{1}{2}$$

$$= 1+i$$

(ii) بالنسبة للمسار الثا

$$\int_0^{1+i} \bar{z}dz = \int_0^{i} \underbrace{\bar{z}dz}_{x=0} + \int_i^{1+i} \underbrace{\bar{z}dz}_{y=1}$$

$$= \int_0^1 (-iy)(idy) + \int_0^1 (x-i)dx$$

$$= \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 - ix \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - i$$
$$= 1 - i \quad ?$$

(iii) بالنسبة للمسار الثالث

$$\int_0^{1+i} \bar{z}dz = \int_0^{1+i} \underbrace{\bar{z}dz}_{y=x}$$
$$= \int_0^1 (x - ix)(dx + idx)$$
$$= \int_0^1 x(1-i)(1+i)dx$$
$$= 2\int_0^1 xdx$$
$$= 2\frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1$$
$$= 1??$$

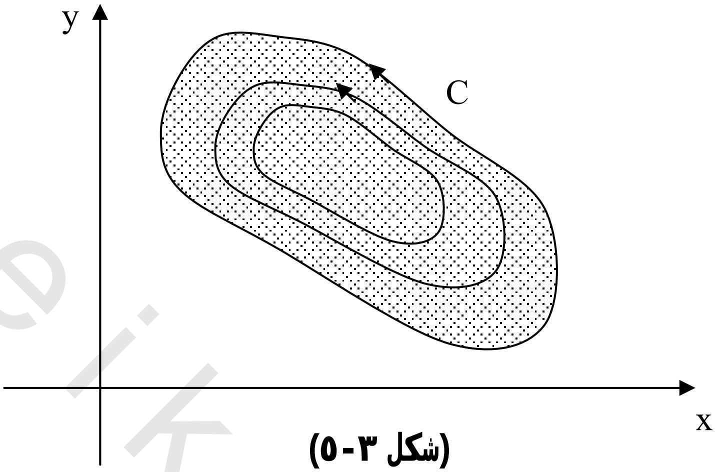
التكامل غ فريد ويعتمد على ا سار .. اذا ؟؟

لابد أن ا ثال السابقة يث ان الاهتمام بشكل كب .. فبعض الدوال تكاملا ا لا تعتمد على ا سار بينما يعتمد الآخر على مسار التكامل .. فهل نستطيع سـ أغوار هذه ا سألة ؟! .. الواقع نستطيع.

<u>تعريف:</u> ا نطقة يس ة التوصيل وا نطقة عديدة التوصيل

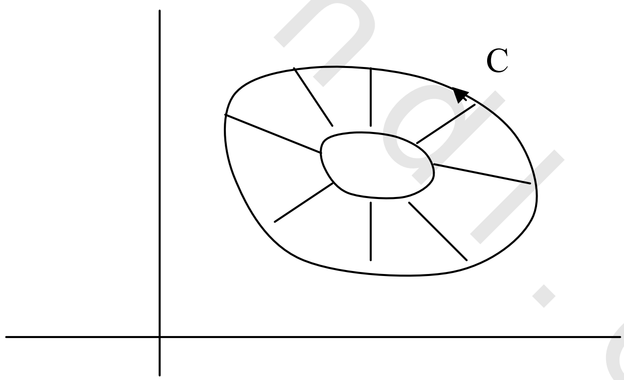
Simply-Connected and Multiply-Connected Regions

يطلق على منطقة أ ا يس ة التوصيل Simply-Connected إذا كان أي منحـ مغلق يس Simple closed curve داخل ا نطقة كن تقليصه إ نقطة بدون مغادرة ا نطقة ذا ا (شكل ٣-٥)



(شكل ٣-٥)

وإذا يكن من ا مكن إجراء ذا ـك فا نطقـة تـسمى بعديـدة الاتـصال multiply connected .. وعادةً ما يوجد فجوات داخل هذه ا ناطق (شكل ٣-٦)



(شكل ٣-٦)

وبالطبع وجود فجوة واحدة على الأقل لا كننا من تقليص أي منحـ مغلق يسـ داخل هذه ا ناطق إ نقطة إلا إذا غادرنا ا نطقة إ الفجوة وهي توي نقاط ليست من ا نطقة ذا ا.

وسوف لا تم بتعقيدات الأشكال هذه النقطة .. فا نحنيات الـ ستعتمدها دائما يـسـ ة وا ناطق الـ يط ا إما يسـ ة أو متعددة.

وإذا كان ا سار على ا نحـ ا غلق اليسـ عكس ا اه عقارب الساعة counter clock wise فإن هذا الا اه يعتـ موجباً والعكس يعتـ ا اهاً سالباً .. والتكامل على أمثال هذه ا نحنيات يسمى بالتكامل ا ساري Contour integral.

٣-٢ نظرية كوشي Cauchy's Theorem

نظرية ٣-١

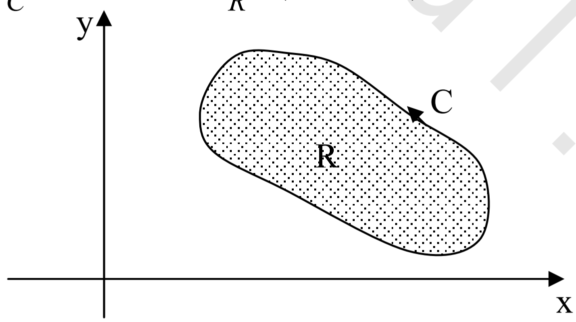
إذا كانت f(z) دالة ليلية منطقة R وعلى حدودها ا نحـ ا غلق C فإن

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

الإثبات

ب التمهيد أولاً إ نظرية شهـ ة ا تغـ ا قيقي وتسمى بنظرية جرين Green's Theorem ا ستوى وتنص على أنه إذا كانت P(x, y) و Q(x, y) دوال متصلة و ا تفاضلات جزئية متصلة منطقة R وعلى حدودها C (أنظر شكل ٣-٧) فإن

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$



(شكل ٣-٧)

فالتكامل ا طي يتحول إ تكامل على مساحة – نرجو الانتباه لذلك.

وبالنسبة للنظرية فبما أن f(z)=u+iv دالة ليلية فإن u و v تكون متصلة طبعاً وكذلك مشتقا ا ا زئية داخل ا نطقة R وعلى حدود ا نطقة ا نحـ C مع ملاحظة أن

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy)$$
$$= (udx - vdy) + i(vdx + udy)$$

فإن
$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy)$$

وبتطبيق نظرية جرين على كل من التكاملا فإن

$$\oint_C f(z)dz = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

ولكن $f(z)$ دالة ليلية فهي قق معادلا كوشي – ر ان .. أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

وباستخدام هات ا عادلة فإن

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

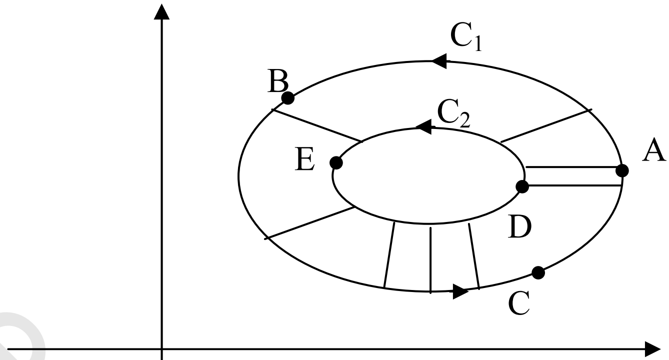
ملاحظات:

(i) طا أن $f(z)$ دالة ليلية على ا نحن ا غلق C اليس وداخله inside and on فإن التكامل يساوي صفر بغض النظر عما دث للدالة من نقاط شاذة تسبب عدم التحليلية ا خارج هذا النطاق .. فمثلاً

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{1}{z}dz = 0$$

لأن الدائرة $|z-2| = 1$ لا توي على النقطة الشاذة $z=0$.

(ii) كن تطبيق هذه النظرية على ا ناطق ا تعددة الاتصال وذلك بعمل قطع (أو عدة قطوع) بـ الفجوات ال تويها هذه ا نطقة .. فمثلا بالنسبة للمنطقة ا وضحة بشكل ٣-٨



(شكل ٣-٨)

فهي دودة با نحـ C_1 من ا ارج وا نحـ C_2 من الداخل وهي بذلك منطقة متعددة الاتصال فإذا ما جئنا عند نقط D, A وتصورنا وجود قطع من A إ D وأكملنا ا سار من A إ B إ C إ A إ D إ E (بعكس ا اه ا نحـ) إ D إ A مرة أخرى فإننا بذلك صل على منطقة يسـ ة الاتصال (لأننا نبنا وجود الفجوة) وبذلك كن تطبيق نظرية كوشي فيكون

$$\oint_{ABCADEDA} f(z)dz = 0$$

بتقسيم ا سار مرة أخرى فأننا صل على

$$\int_{ABCA} f(z)dz + \int_{A}^{D} f(z)dz + \int_{DED} f(z)dz + \int_{D}^{A} f(z)dz = 0$$

(C_1 اه ا) (بعكس ا اه C_2)

والتكامل الثا والرابع متساويان عددياً ويتضادان الإشارة ..فبالتا

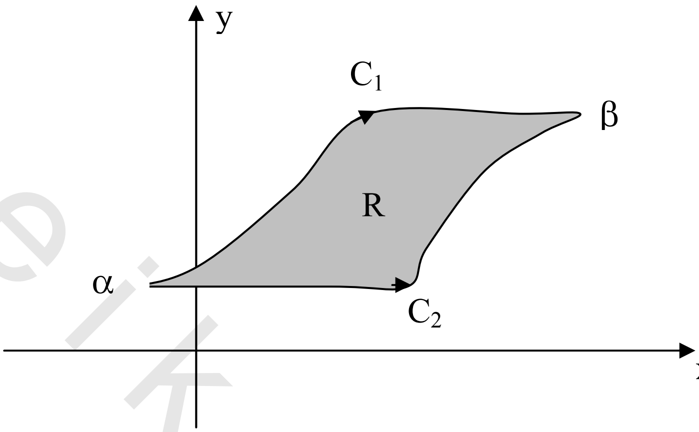
$$\oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz = 0$$

أي أن

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

وهي نتيجة هامة جداً لنظرية كوشي.

(iii) والآن نأ إ نتيجة هامة جداً جداً من نتائج نظرية كوشي .. فإذا أخذنا ا سار ا بـ بشكل (٣-٩)



(شكل ٣-٩)

وا طلوب إ اد التكامل $\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz$ على ا سار C_1 أو ا سار C_2 وكانت $f(z)$ دالة ليلية على كل من C_1 و C_2 وداخل النقاط ا R دود ما .. فإن

حيث C د ا نطقة R ، $\oint_C f(z)dz = 0$

$$\int_{C_2} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz = 0$$

أى أن
$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

أي أن التكامل للدوال التحليلية منطقة R لا يعتمد على ا سار بـ النقطت R .. وعلى ذلك فالدوال ا عروفة إ ا ليلية كل مكان كن تكاملها مباشرة بغض النظر عن ا سار بـ حدود التكامل. كذلك بالنسبة للدوال ا عروفة إ ا ليلية منطقة R فإن التكامل بـ أي نقطت R لا يعتمد على ا سار بـ النقطت .. وبذلك د أن التحليلية مرة أخرى هـي الكلمة السحرية ال تيسر الأمور.

(iv) نظرية موريرا Morera's Theorem

إذا كانت $f(z)$ دالة متصلة R ا نطقة اليس ة التوصيل وأن $\oint_C f(z)dz = 0$

على أي منحـ مغلق يس R .. فأن $f(z)$ دالة ليلية R.

وهذا ا نطوق هو عكس منطوق نظرية كوشي .. والإثبات يس بشكل عكسي مع تغيـ طفيف.

٣-٣ التكامل غ ا دود Indefinite Integrals

دعونا نتقدم خطوة كبـ ة ا اه حساب بعض تكاملات الدوال ا ركبة .. خاصةً عندما تكون هذه الدوال ليلية.

نظرية ٣-٢

دع $f(z)$ دالة ليلية منطقة يس ة الاتصال R ودع a و z نقطتان هذه ا نطقة فإن

$$F(z) = \int_a^z f(u)du \qquad \text{(a)}$$

$$F'(z) = f(z) \qquad \text{(b)}$$

الإثبات

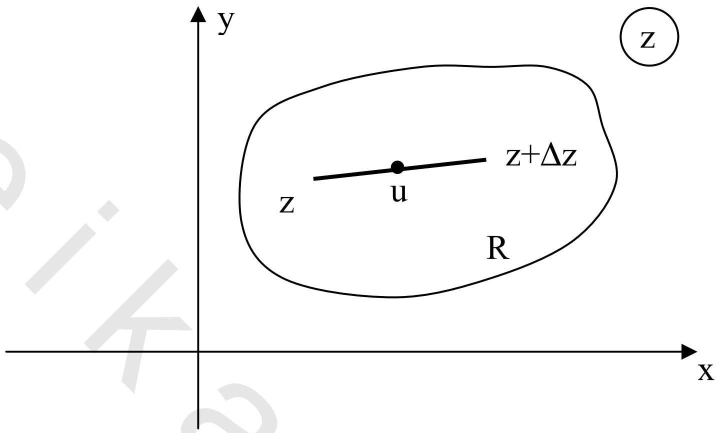
دعنا نكون ا قدار

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\left[\int_a^{z+\Delta z} f(u)du - \int_a^z f(u)du\right] - f(z)$$

$$= \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(u)du - f(z) \qquad \text{(اذا؟)}$$

$$= \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} \left(f(u)-f(z)\right)du \qquad \text{(اذا؟)} \quad (1)$$

ولكن الدالة $(f(u) - f(z))$ دالة لميلية R وبالتالي فتكاملها غ معتمد على المسار ب z و $z+\Delta z$ طالما كانتا النقطتان R .. فإذا أخذنا المسار طى المباشـر بـ z و z+Δz (أنظر شكل ٣-١٠).



(شكل ٣-١٠)

وطبقا لاستمرار الدالـة f(z) R فـإن |f(u)-f(z)|<∈ طالمـا |u-z|<δ أي |Δz|<δ .. وبالتالي

$$\left|\int_{z}^{z+\Delta z}\left(f(u)-f(z)\right)du\right| < \in \left|\Delta z\right| \qquad (2)$$

أي أن من (1) و (2):

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| = \frac{1}{\left|\Delta z\right|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}\left(f(u)-f(z)\right)du\right| < \in$$

أي أن

$$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

أي أن $F(z)$ على صور ا $\int_a^z f(u)du$ دالة لميلية ويكون $F`(z) = f(z)$.

هذه النظريـة تعـ أن التكامـل $\int f(z)dz$ سـيكون مـساوياً لـ ـ $F(z)+C$ .. لأن $(F(z)+C)`=f(z)$ حسب منطوق النظرية السابقة .. وهذه النتيجة بالنسبة إلينا عادية لأنه سبق استعما ا الدوال ا قيقية ..

أي أن

$$\int f(z)dz = F(z) + C$$

وعلى هذا الأساس فجدول التفاضلات ا وجود ص ٥٤ كن عكسه للحصول على جـدول آخر للتكاملات .. أنظر جدول ٣-١.

ودعونا الآن نلخص ا قائق ال حصلنا عليها حـ الآن:

(i) إذا كانت f(z) دالة لميلية منطقة R وكان النقطتان z, a R فإن $\int_a^z f(z)dz$ يكون مستقلا عن ا سار بـ النقطة z, a.

(ii) أيضا فإن $F(z) = \int_a^z f(z)dz$ تكـون دالـة لميليـة أيـضا R ويكـون $F`(z) = f(z)$

(iii) ويكون أيضا $\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$ وذلك لأن

$$\int_a^b f(z)dz = F(z)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ولننتبه لذلك جيداً .. إننا كننا التكامل بشكل مباشر الآن وبكافة الطـرق الـ تعودنا عليها وباستخدام ا دول ٣-١ فقط إذا قق الشرط السحري وهـو أن $f(z)$ دالـة لميلية منطقة R تتوي حدود ومسار التكامل..

مثال ٣-٣

$$\int_{0}^{1+i} z dz = \frac{1}{2} z^2 \Big|_{0}^{1+i} = \frac{1}{2}(1+i)^2$$

$$= \frac{1}{2}(1+2i-1) = i$$

لأن الدالة $f(z) = z$ دالة ليلية كل مكان.

و الواقع فإن الوصول إ هذه النتيجة أمر مدهش ومهم .. لأننا الآن كننا إجراء تكاملات كثـ ة وعديدة واستخدام بنك معلوماتنا السابقة من طرق التكامل لتكامل الدوال ا ركبة وال هي ليلية.

(iv) لا ننسى أبداً النظرية الأم .. نظرية كوشي وال تقول أن

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

طا ا كانت $f(z)$ دالة ليلية ا نطقة اليس ة الاتصال (وحـ ا تعـددة الاتـصال بتصرف خاص كما بيننا) وا اطة با نحـ ا غلق اليس C.

مثال ٣-٤

$$\oint_{|z|=3} z\, dz = 0$$

بدون عناء الإثبات لأن الدالة $f(z) = z$ دالة ليلية كل مكان .. وليس داخل وعلـى الدائرة $|z| = 3$ فقط.

ويبدو أن معركتنا ا قيقية ستكون مع هذه الدوال ال توي نقاط شـاذة ا نطقـة R .. كيف كن حساب التكامل لأمثال هذه الدوال (الدوال غ التحليلية عنـد نقـاط شـاذة دودة)...

1. $\int z^n\,dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1} \qquad n \neq -1$

2. $\int \dfrac{dz}{z} = \ln z$

3. $\int e^z\,dz = e^z$

4. $\int a^z\,dz = \dfrac{a^z}{\ln a}$

5. $\int \sin z\,dz = -\cos z$

6. $\int \cos z\,dz = \sin z$

7. $\int \tan z\,dz = \ln \sec z = -\ln \cos z$

8. $\int \cot z\,dz = \ln \sin z$

9. $\int \sec z\,dz = \ln(\sec z + \tan z) = \ln \tan(z/2 + \pi/4)$

10. $\int \csc z\,dz = \ln(\csc z - \cot z) = \ln \tan(z/2)$

11. $\int \sec^2 z\,dz = \tan z$

12. $\int \csc^2 z\,dz = -\cot z$

13. $\int \sec z \tan z\,dz = \sec z$

14. $\int \csc z \cot z\,dz = -\csc z$

15. $\int \sinh z\,dz = \cosh z$

16. $\int \cosh z\,dz = \sinh z$

17. $\int \tanh z\,dz = \ln \cosh z$

18. $\int \coth z\,dz = \ln \sinh z$

19. $\int \operatorname{sech} z\,dz = \tan^{-1}(\sinh z)$

20. $\int \operatorname{csch} z\,dz = -\coth^{-1}(\cosh z)$

21. $\int \operatorname{sech}^2 z\,dz = \tanh z$

22. $\int \operatorname{csch}^2 z\,dz = -\coth z$

23. $\int \operatorname{sech} z \tanh z\,dz = -\operatorname{sech} z$

24. $\int \operatorname{csch} z \coth z\,dz = -\operatorname{csch} z$

25. $\int \dfrac{dz}{\sqrt{z^2 \pm a^2}} = \ln\left(z + \sqrt{z^2 \pm a^2}\right)$

26. $\int \dfrac{dz}{z^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{z}{a} \text{ or } -\dfrac{1}{a}\cot^{-1}\dfrac{z}{a}$

27. $\int \dfrac{dz}{z^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{z-a}{z+a}\right)$

28. $\int \dfrac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \sin^{-1}\dfrac{z}{a} \text{ or } -\cos^{-1}\dfrac{z}{a}$

29. $\int \dfrac{dz}{z\sqrt{a^2 \pm z^2}} = \dfrac{1}{a}\ln\left(\dfrac{z}{a + \sqrt{a^2 \pm z^2}}\right)$

30. $\int \dfrac{dz}{z\sqrt{z^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\cos^{-1}\dfrac{a}{z} \text{ or } \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\dfrac{z}{a}$

31. $\int \sqrt{z^2 \pm a^2}\,dz = \dfrac{z}{2}\sqrt{z^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln\left(z + \sqrt{z^2 \pm a^2}\right)$

32. $\int \sqrt{a^2 - z^2}\,dz = \dfrac{z}{2}\sqrt{a^2 - z^2} + \dfrac{a^2}{2}\sin^{-1}\dfrac{z}{a}$

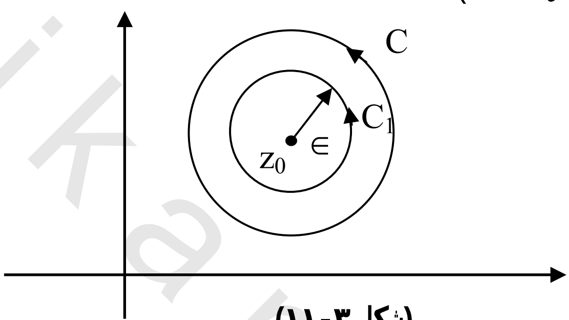
33. $\int e^{az}\sin bz\,dz = \dfrac{e^{az}(a\sin bz - b\cos bz)}{a^2 + b^2}$

34. $\int e^{az}\cos bz\,dz = \dfrac{e^{az}(a\cos bz + b\sin bz)}{a^2 + b^2}$

(v) ولا ننسى أيضا النتيجة ا امة للنظرية الأم وهي أنه إذا كانت $f(z)$ دالة ليلية منطقـة دودة نحنيـ مغلقة يسـ ين C_1, C_2 وعلى ا نحنيـ أيضا .. فإن

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

ونرجو أن ننتبه أيضا إ هذه النتيجة ا دهشة .. فهي تعطي حلاً سألة تواجد النقـاط الشاذة ا نطقة R إذ كننا عزل هذه النقطة الشـاذة بدائرة تكون نصف قطرهـا ∈ ومركزها هو النقطة الشـاذة نفسها أي أن $|z\text{-}z_0|=\in$ حيث $z=z_0$ هي النقطة الشاذة فإذا ما حدث ذلك فإننا كننا استخدام النتيجة السابقة لإجراء التكامل على الدائرة ذا ا .. (أنظر شكل ٣-١١) ..



(شكل ٣-١١)

أي أن

$$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{|z-z_0|=\in} f(z)dz$$

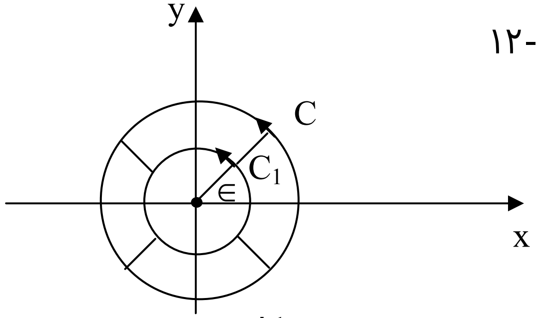
الواقع هذه النتيجة تعطينا نقطة الانطلاق حساب أمثال هذه التكاملات ..

<u>مثال ٣-٥</u> $\oint_C \frac{dz}{z}$

حيث C منحـ مغلق يسـ توي النقطة $z = 0$

<u>ا ل</u>

انظر شكل ٣-١٢



(شكل ٣-١٢)

وبالتا

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z} = \oint_{|z|=\in} \frac{dz}{z}$$

لاحـظ أن كـل النقـاط الواقعـة علـى الـدائرة $|z| = \in$ تكتـب بـصورة $z = \in e^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$ وبالتا فإن $dz = \in i\, e^{i\theta}\, d\theta$

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \oint_{|z|=C} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta}d\theta}{\in e^{i\theta}}$$

$$= i\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi i$$

وهي قيمة يلية لتكامل لا نستطيع إجراءه بالطرق العادية لأن $f(z)$ هذه ا الة دالة غـ ليلية R .. فلا كننا أن سب التكامل على أنه $\ln z+C$ .. هذا خطأ فادح .. وهنـا يظهر التأث الكب لكون الدالة مركبة أولاً وثانياً أن ا نقاط شاذة ا نطقة R ا دودة بـ C.

و كن توسيع استعمال هذه النتيجة ا ميلة حالة وجود أكثر من نقطة شـاذة .. وذلـك باستخدام أساليب ج ية مثل الكسور ا زئية كما يوضح ا ثال التا .

<u>مثال ٣-٦</u>

$$\oint_C \frac{dz}{z(z-1)}$$

حيث C توى النقاط الشاذة $z = 0$ و $z = 1$

<u>ا ل</u>

كن استخدام الكسور ا زئية ليكون

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}$$

حيث $A = -1$ و $B = 1$ (كن الرجوع لأي كتاب ج ا رحلة ا امعية)

أي أن $$\oint_C \frac{dz}{z(z-1)} = -\oint_C \frac{dz}{z} + \oint_C \frac{dz}{z-1}$$

وبالتا فكل تكامل الآن مشكلته هو وجود نقطة شاذة واحدة فقط كن عز ا والتعامل معها كما سبق مثال ٣-٥ (أنظر شكل ٣-١٣)

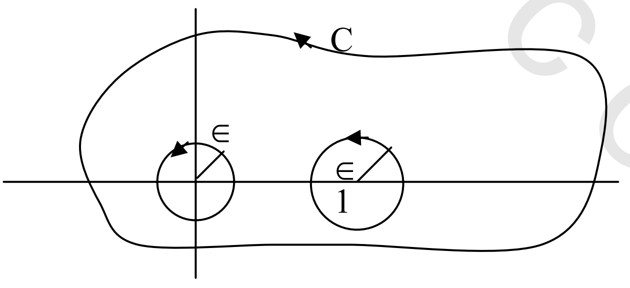
$$\oint_C \frac{dz}{z} = \oint_{\substack{|z|=\in \\ z=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta}}{\in e^{i\theta}} = 2\pi i$$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-1)} = \oint_{\substack{|z-1|=\in \\ z-1=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z-1} = \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta}d\theta}{\in e^{i\theta}} = 2\pi i$$

وبالتا فإن التكامل

$$\oint_C \frac{dz}{z(z-1)} = -2\pi i + 2\pi i$$
$$= 0$$

وهذا ليس معناه أن الدالة $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ دالة ليلية باستخدام نظرية موريرا لأن شرط أن f(z) دالة متصلة R غ متواجد .. نرجو الانتباه لذلك .. فمن ا مكن للتكامل أن يساوي صفر بغض النظر عن تطبيق نظرية كوشي .. فالتكامل كنه أخذ أي قيمة C.

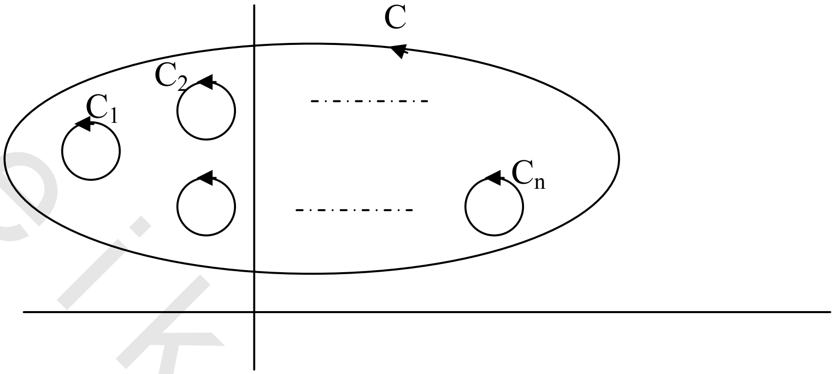


(شكل ٣-١٣)

بذلك نكون قد مهدنا للنظرية العامة التالية:

٣-٤ تكامل دالة غ ليلية عند عدد دود من النقاط الشاذة

نظرية ٣-٣ دع $f(z)$ دالة ليلية منطقـة R ـدودة با نحنيـات ا غلقـة اليـس ة $C,C_1,C_2,..,C_n$ (أنظر شكل ٣-١٤).



(شكل ٣-١٤)

فإن
$$\oint_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)dz$$

الإثبات: بتعميم القطوع Cuts ال سبق واستعملناها إثبات النتيجة ا دودة بوجود نقطة شاذة واحدة (انظر ص ١١٠) وبذلك صل على

$$\oint_C f(z)dz - \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz \ldots - \oint_{C_n} f(z)dz = 0$$

وبالتا يثبت منطوق النظرية.

ملاحظة: هذه النظرية تعمم ما سبق قوله (v) ص ١١٨ .. وبالتا مع اسـتعمال واسـع لنظرية الكسور ا زئية كننا تطبيق هذه النظرية بنجاح ولكن على النقاط الـشاذة الداخليـة فقط .. وإ ال النقاط ال هي خارج R.

مثال ٣-٧

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2-1)}$$

حيث

(i) C توي كل النقاط الشاذة للدالة.

(ii) C توي z = 1 و z = -1 فقط.

(iii) C توي z = 0 و z = 1 فقط.

ا ل

أولا باستخدام الكسور ا زئية فإن

$$\frac{1}{z\left(z^2-1\right)}=\frac{1}{z(z-1)(z+1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z+1}$$

وبالطرق ا عتادة فإن $C=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2}, A=-1$

أي أن

$$\frac{1}{z\left(z^2-1\right)}=\frac{-1}{z}+\frac{\frac{1}{2}}{z-1}+\frac{\frac{1}{2}}{z+1}$$

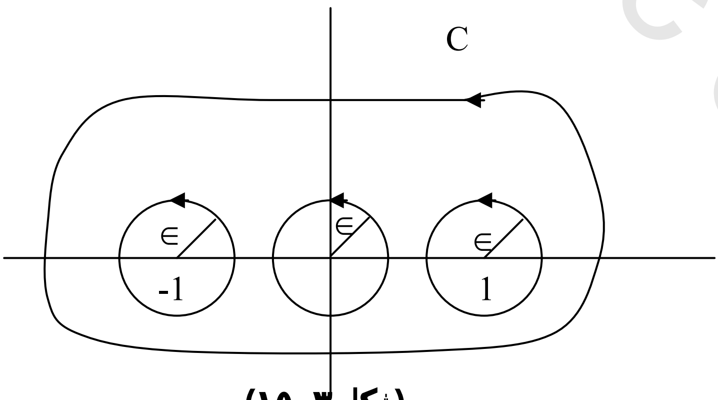
(i) وبالتا طبقاً للنظرية ٣-٣ فإن (أنظر شكل ٣-١٥)

$$\oint_C \frac{dz}{z(z^2-1)}=-\oint_C \frac{dz}{z}+\frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z-1}+\frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z+1}$$

$$=-\oint_{\substack{|z|=\in \\ z=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z}+\frac{1}{2}\oint_{\substack{|z-1|=\in \\ z-1=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z-1}+\frac{1}{2}\oint_{\substack{|z+1|=\in \\ z+1=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z+1}$$

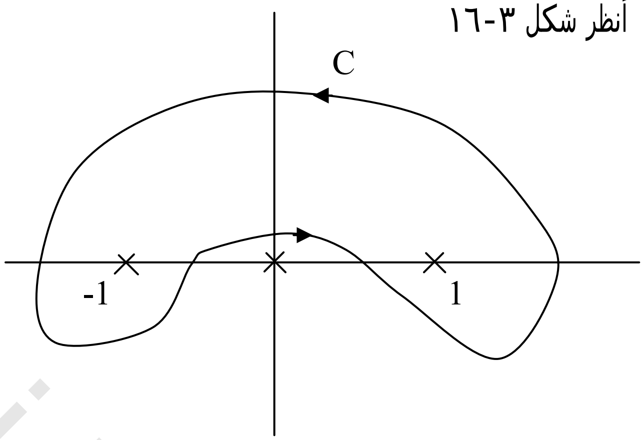
$$=-2\pi i+\frac{1}{2}2\pi i+\frac{1}{2}2\pi i$$

$$=0$$



(شكل ٣-١٥)

(ii) أنظر شكل ٣-١٦



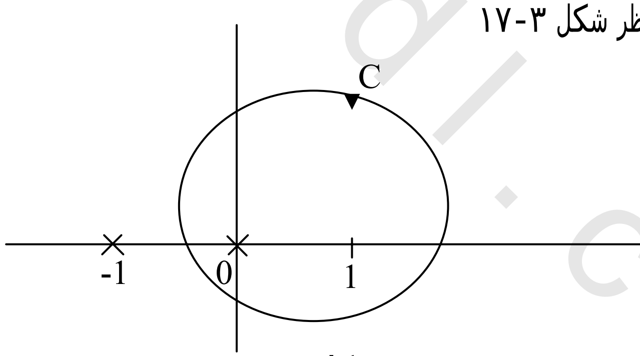
(شكل ٣-١٦)

$$\oint_C \frac{dz}{z(z^2-1)} = -\oint_C \frac{dz}{z} + \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z-1}$$

$$= 0\ (\text{لماذا؟}) + \frac{1}{2}(2\pi i) + \frac{1}{2}(2\pi i)$$

$$= 2\pi i$$

(iii) أنظر شكل ٣-١٧



(شكل ٣-١٧)

$$\oint_C \frac{dz}{z(z^2-1)} = -\oint_C \frac{dz}{z} + \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z+1}$$

$$= -2\pi i + \frac{1}{2}(2\pi i) + 0\ (\text{لماذا؟})$$

$$= -\pi i$$

ملاحظة: أليس وجود الثابت (2πi) لافتاً للنظر ؟!

٣-٥ أمثلة محلولة (١) Solved Examples:

مثال ٣-٨

أحسب التكامل $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}, n=1,2,3,...$ حيث z=a نقطة داخل المنطقة المحدودة بـ C.

الحل:

حالة n = 1

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \oint_{\substack{|z-a|=\in \\ z-a=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta}}{\in e^{i\theta}} d\theta$$

$$= 2\pi i$$

والآن حالة n ≥ 2

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{\substack{|z-a|=\in \\ z-a=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{(z-a)^n}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta} d\theta}{\in^n e^{in\theta}} = \frac{i}{\in^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta, n \ge 2$$

$$= \frac{i}{\in^{n-1}} \frac{e^{i(1-n)\theta}}{i(1-n)}\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{i}{\in^{n-1} i(1-n)} \left[e^{i(1-n)2\pi} - 1\right]$$

ولكن n ≥ 2 فإن $e^{i(1-n)2\pi}=1$ وبالتالي

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 0 \quad , \qquad n \geq 2$$

أي أن

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$$

ونلاحظ عدم اعتماد التكامل على قيمة النقطة الشاذة الداخلية $z = a$.

مثال ٣-٩

احسب $\int_{z=1}^{z=1+i} z \cos z \, dz$

ا ل

حيث أن دالة التكامل $f(z) = z \cos z$ دالة ليلية كل مكان فقطعاً هناك دائما منطقة توى حدود ومسار التكامل .. وبالتا فالتكامل لا يعتمد على ا سار ب النقطـة $z = 1$ و $z = 1+i$ والتا

$$\int_{z=1}^{z=1+i} z \cos z dz = \int_{1}^{1+i} z d(\sin z)$$

$$= z \sin z\Big|_1^{1+i} - \int_1^{1+i} \sin z dz$$

$$= (1+i)\cos(1+i) - \sin 1 + \cos z\Big|_1^{1+i}$$

$$= (2+i)\cos(1+i) - \sin(1) - \cos(1)$$

ملاحظة:

كن للقارئ اختبار النتيجة بأخـذ أي مسـار ب النقطة $z = 1$ و $z = 1+i$ ومقارنـة النتيجة ..كذلك لاحظ أننا استعملنا التكامل بالتجزيء By parts .. وهـذا كن .. وكذلك كل طرق التكامل ا تعارف عليها هذا الباب طا ا أن f(z) دالة ليلية.

مثال ٣-١٠

احسب التكامل $\int_C \frac{dz}{z^2+a^2}$ ا الات التالية:

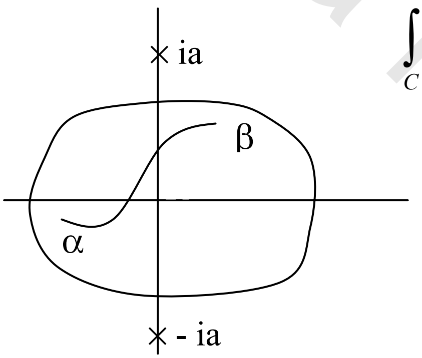
(i) حالة C موجود منطقة R لا توي النقاط $z = \pm ai$

(ii) حالة C موجود منطقة R توي $z = ai$ ولا توي على $z = -ai$

(iii) حالة C موجود منطقة R توي النقطتان $z = \pm ai$

ا ل

(i) ا الة الأو فإن الدالة $f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$ دالة ليلية R وبالتا



$$\int_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \int_\alpha^\beta \frac{dz}{z^2+a^2}$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{z}{a}\Big|_\alpha^\beta$$

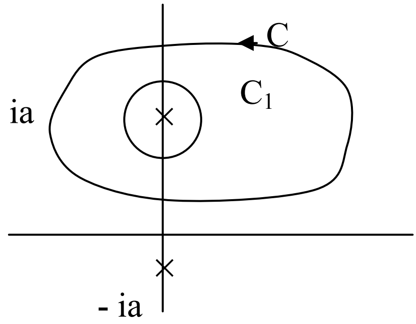
$$= \frac{1}{a}\left[\tan^{-1}\frac{\beta}{a} - \tan^{-1}\frac{\alpha}{a}\right]$$

وإذا كان C منحـ مغلقا فإن

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = 0$$

طبقاً لنظرية كوشي.

(ii) حالة احتواء النقطة $z = ai$ وعدم احتواء الأخرى فإن التكامل يعتمد على ا سار
بـ النقطة α و β(اذا؟) فإذا كان ا سار C مغلقاً فإن :



$$\oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \oint_C \frac{dz}{(z+ai)(z-ai)}$$

$$= \frac{1}{2ai}\oint_C \left(\frac{1}{z-ai} - \frac{1}{z+ai}\right)dz \qquad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \frac{1}{2ai}\oint_{\substack{|z-ai|=\in \\ z-ai=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z-ai} - \frac{1}{2ai}\oint_C \frac{dz}{z+ai}$$

$$= \frac{1}{2ai}(2\pi i) - 0 \qquad \text{(لماذا؟)}$$

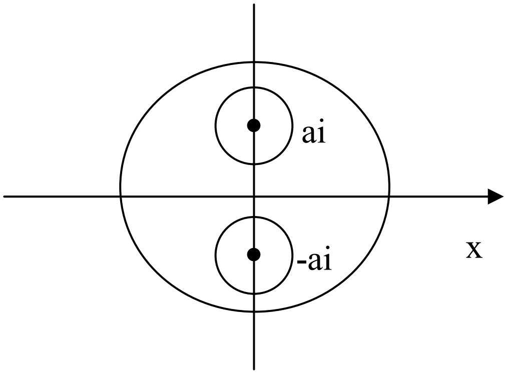
$$= \frac{\pi}{a}$$

أي أن $\oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{\pi}{a}$: pure real

(iii) و حالة احتواء النقطة $z = \pm ai$ فإن التكامل يعتمد على ا سار ب α و β ..
أما حالة كون C منحـ مغلقاً فإن

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{2ai}\left[\oint_C \frac{dz}{z-ai} - \oint_C \frac{dz}{z+ai}\right]$$

$$= 0$$



أو استعمال النظرية العامة

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \oint_{\substack{|z-ai|=\in \\ z-ai=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z^2+a^2} + \oint_{\substack{|z+ai|=\in \\ z=-ai+\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z^2+a^2} dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta} d\theta}{\underbrace{\in e^{i\theta}}_{z-ai}.\underbrace{(2ai+\in e^{i\theta})}_{z+ai}} + \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta}}{\underbrace{\in e^{i\theta}}_{z+ai}.\underbrace{(-2ai+\in e^{i\theta})}_{z-ai}}$$

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2ai+\in e^{i\theta}} + i\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(-2ai+\in e^{i\theta}\right)}$$

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta} d\theta}{2ai\, e^{-i\theta}+\in} + i\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta} d\theta}{\left(-2ai\, e^{-i\theta}+\in\right)}$$ (لماذا؟)

$$= \frac{-1}{2ai}\left[\ln\left(\in +2aie^{-i\theta}\right)\Big|_0^{2\pi} + \ln\left(-2aie^{-i\theta}+\in\right)\Big|_0^{2\pi} \right]$$

$$= -\frac{1}{2ai}\left[\ln(\in +2ai) - \ln(\in +2ai) + \ln(-2ai+\in) - \ln(-2ai+\in)\right]$$

$$= 0$$

وواضح أن استعمال الكسور ا زئية ييسر ا سألة تيس أ كب أ.

والآن كننا التقدم خطوة أخرى حسابات تكامل الدوال ا ركبة.

٣-٦ صيغة كوشي للتكامل Cauchy’s integral formulae

نظرية ٣-٤

إذا كانت $f(z)$ دالة ليلية داخل وعلى منحـ مغلق يسـ C وكانت النقطة $z = a$ داخل C فإن

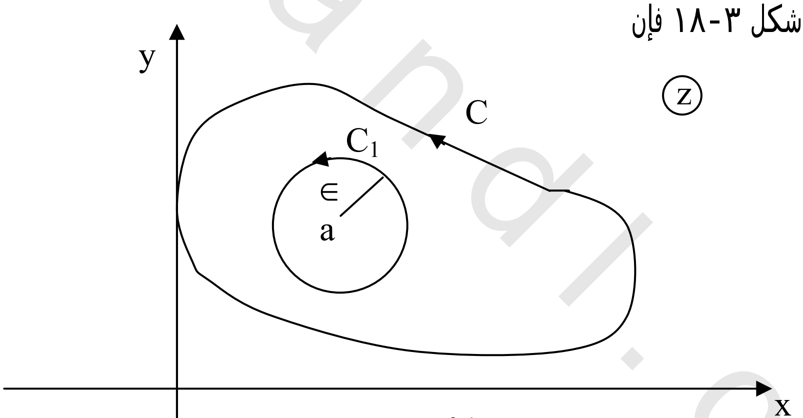
$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

وبشكل عام فإن

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \qquad n=1,2,\ldots$$

الإثبات

لإثبات ا الة n = 0 فإننا نستخدم نفس الأسلوب الذي تعلمناه الفصل السابق .. فمن شكل ٣-١٨ فإن



(شكل ٣-١٨)

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz=\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\oint_{|z-a|=\in}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{f\left(a+\in e^{i\theta}\right)}{\in e^{i\theta}}\in i\,e^{i\theta}d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi} f\left(a+\in e^{i\theta}\right)d\theta \qquad (1)$$

ولكن $f(z)$ دالة تحليلية فهي متصلة وبالتالي فإن $\lim_{\in\to 0} f\left(a+\in e^{i\theta}\right)=f(a)$

وبأخذ النهاية عندما $\in\to 0$ لـ (١) فإن

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = i(f(a))2\pi$$

أي أن
$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

وهذا يثبت الحالة n = 0.

وعند n = 1 فإننا نأخذ القيمة

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{h}\left[\frac{1}{z-(a+h)}-\frac{1}{z-a}\right]f(z)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{h}\frac{z-a-z+a+h}{(z-a)(z-(a+h))}f(z)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)(z-(a+h))}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(z-a)f(z)}{(z-a)^2(z-(a+h))}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(z-a-h+h)f(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{[(z-a-h)+(h)]f(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^2}+\frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a-h)(z-a)^2}dz$$

وواضح أنه في حالة $h\to 0$ فإن الطرف الأيسر يصبح $\bar{f}(a)$ ويأخذ الطرف الأيمن الصورة المطلوب إثباتها .. ولذلك فبأخذ الحد الثاني في الطرف الأيمن:

$$\frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^2(z-a-h)}=\frac{h}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)dz}{(z-a)^2(z-a-h)}$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\in} \frac{f(z)dz}{(z-a)^2(z-a-h)}$$

وباختيار h صغ ة جداً يث أن $z = a + h$ يكون داخل ا سار C_1 أيضاً و يث يكون $|h| < \frac{\in}{2}$ .. أي أن (وباستخدام ا تباينة $|a - b| \geq |a| - |b|$):

$$|z-a-h| \geq |z-a| - |h| > \in - \frac{\in}{2} = \frac{\in}{2}$$

كذلك فلأن $f(z)$ دالة ليلية فهي دودة أي أن $|f(z)| < M$

حيث M عدد موجب .. والآن كننا عمل هذه ا سابات

$$\left| \frac{h}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)dz}{(z-a)^2(z-a-h)} \right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \oint_{C_1} \frac{|f(z)|}{|(z-a)^2||z-a-h|} |dz|$$

$$\leq \frac{|h| M \in}{2\pi \left(\in^2\right)\left(\frac{\in}{2}\right)} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{2|h| M}{\in^2}$$

وعندما نأخذ النهاية $h \to 0$ فإن التكامل ينعدم وبالتا

فإن $$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^2}$$

ومشياً على هذا ا نوال فإن

$$\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(z-a-h)^2} - \frac{1}{(z-a)^2} \right] f(z)dz$$

$$= \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz + \frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{3(z-a) - 2h}{(z-a-h)^2 (z-a)^3} f(z)dz$$

وبأخذ النهاية $h \to 0$ فإننا نصل للمطلوب عند $n = 2$ بإثبات أن ا د الثا ينعدم عنـدما يتم التكامل على الدائرة $|z-a| = \in$ .. فبملاحظة أن

$$\left|\left(3(z-a)-2h\right)f(z)\right| = \left|3(z-a)-2h\right|\left|f(z)\right|$$
$$\le \left(3|z-a|+2|h|\right)M$$
$$\le \left(3\in +2\frac{\in}{2}\right)\text{M}$$
$$\le 4\in M$$

كذلك

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{3(z-a)-2h}{(z-a-h)^2(z-a)^3}f(z)dz\right| \le \frac{|h|}{2\pi}\frac{(4\in M)}{\left(\frac{\in}{2}\right)^2\in^3} = \frac{|h|16M}{\in^3}$$

وواضح أ ا تنعدم عندما $h\to 0$ .. أي أن ا د الثا ينعدم وبالتا فإن

$$f''(a) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^3}dz$$

وهكذا بالاستنتاج نستطيع إثبات أن

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

ولإثبات النظرية إثباتاً كاملا فلابد من استخدام الاستنتاج الرياضي mathematical induction.

ملاحظة هامة:

(i) كننا ملاحظة أن الصورة

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

هي مكافئة للصورة

$$f'(a) = \frac{d}{da}f(a) = \frac{d}{da}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\partial}{\partial a}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz$$

وكذلك

$$f''(a) = \frac{d}{da}f'(a) = \frac{d}{da}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\partial}{\partial a}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C (2)\frac{f(z)}{(z-a)^3}\,dz$$

وكذلك

$$f'''(a) = \frac{d}{da}f''(a) = \frac{d}{da}\left[\frac{2}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^3}\right]$$
$$= \frac{2}{2\pi i}\oint_C \frac{\partial}{\partial a}\frac{f(z)}{(z-a)^3}\,dz$$
$$= \frac{2}{2\pi i}\oint_C (3)\frac{f(z)}{(z-a)^4}\,dz$$

وهكذا .. فهي امتداد لنظرية ليبنتز لتكامل الدوال ا قيقية والـ كننا من التفاضل ـت علامة التكامل.

(ii) من نتائج النظرية السابقة وطريقة إثبا ا فإنه إذا كانت $f(z)$ دالة ليلية منطقـة R فإن $f`(z)$ دالة ليلية أيضا وكذلك $f''(z)$ .. وبـشكل عـام فـإن $f^{(n)}(z)$ ليلية R.

مثال ٣-١١

أوجد التكامل $\oint_C \frac{e^{5z}}{(z-1)^5}\,dz$ حيث C تـوي النقطة $z = 1$

ا ل:

من صيغة كوشي للتكامل مباشرة فإن

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a)$$

ولكن $f(z) = e^{5z}$ دالة ليلية كل مكان ومشتقا ا النونية $f^{(n)}(z) = (5)^n e^{5z}$ فإن

$$\oint_C \frac{e^{5z}}{(z-1)^5}dz = \frac{2\pi i}{4!} f^{(4)}(1)$$

$$= \frac{2\pi i}{4!} (5)^4 e^5.$$

مثال ٣-١٢

أوجد التكامل $\oint_C \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz$ حيث C يط النقطة $z = 1, 2$.

ا ل:

باستخدام الكسور ا زئية فإن

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

حيث A = - 1 و B = 1

أي أن

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz = -\oint_C \frac{\sin z}{z-1}dz + \oint_C \frac{\sin z}{z-2}dz$$

و كننا هنا استعمال صيغة تكامل كوشي بيسر تام حيث

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i \ f(a)$$

أي أن

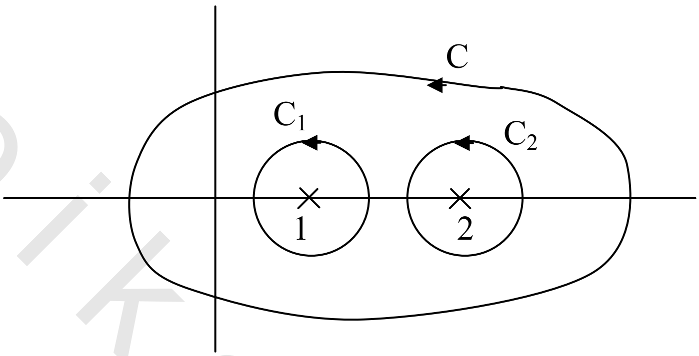
$$\oint_C \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz = -2\pi i \sin(1) + 2\pi i \sin(2)$$

$$= 2\pi i[\sin(2) - \sin(1)]$$

مرة أخرى يظهر لنا أ ية الإ ام بالكسور ا زئية.

حل أخر

(انظر شكل ٣-١٩)



(شكل ٣-١٩)

(اذا؟)

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz = \oint_{C_1} \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz + \oint_{C_2} \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\left(\frac{\sin z}{z-2}\right)}{z-1}dz + \oint_{C_2} \frac{\left(\frac{\sin z}{z-1}\right)}{z-2}dz$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\sin z}{z-2}\right)\Bigg|_{z=1} + 2\pi i\left(\frac{\sin z}{z-1}\right)\Bigg|_{z=2} \quad \text{(اذا؟)}$$

$$= -2\pi i \ \sin(1) + 2\pi i \ \sin(2)$$

وهى نفس النتيجة السابقة ..

لاحظ أننا نستعمل الكسور ا زئية واستخدمنا النظرية العامة ٣-٣ اسـتخدمنا صـيغة كوشي للتكامل على كل منحـ على حدة مع كون الدالة $\frac{\sin z}{z-2}$ دالة ليليـة علـى C_1 وداخل C_1 وكذلك الدالة $\frac{\sin z}{z-1}$ دالة ليلية على C_2 وداخل C_2.

مثال ٣-١٣

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على الدائرة C وداخلها والتي نصف قطرها r ومركزها عند $z = a$ .. اثبت متباينة كوشي Cauchy's inequality:

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{M.n!}{r^n} \qquad , \qquad n = 0,1,2,...$$

حيث $|f(z)| < M$.

الإثبات

يأتي الإثبات مباشرة من استعمال صيغة كوشي للتكامل

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \qquad , \qquad n = 0,1,2,...$$

وبالتالي فإن

$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right|$$

$$= \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right|$$

$$\le \frac{n!}{2\pi}\oint_{|z-a|=r} \frac{|f(z)||dz|}{|z-a|^{n+1}} \quad , \quad z = a + re^{i\theta} \quad , \quad dz = ire^{i\theta}d\theta$$

$$\le \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{M\,r\,d\theta}{\mathrm{r}^{\mathrm{n+1}}}$$

$$= \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^n}(2\pi)$$

$$= \frac{n!\ M}{r^n}$$

وبالتا فإن

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{M.n!}{r^n} \qquad , \qquad n = 0,1,2,...$$

نظرية ٣-٥: نظرية ليوفيل Liouville's theorem

إذا كانت

(i) $f(z)$دالة ليلية كل z مستوى z

و (ii) $f(z)$ دودة $|f(z)| < M$;

فإن $f(z)$ ب أن تكون ثابتة.

الإثبات

بوضع $n = 1$ ا ثال السابق (متباينة كوشي) فإن

$$\left|f'(a)\right| \le \frac{M}{r}$$

ولكن $f(z)$ دالة ليلية كل مكان فإننا كننا جعل $r \to \infty$ وبالتا $|f'(a)| \le 0$ .. أي أن $|f'(a)| = 0$ فإذا كانت a نقطة عامة z فان $|f'(z)| = 0$ أي أن

$$f'(z) = 0$$

وهذا لا دث إلا إذا كانت $f(z)$ دالة ثابتة.

ملاحظة هامة:

النتيجة السابقة كننا من إثبات النظرية الأساسية للجـ fundamental theorem of algebra .. وال تقول أن ا دودية $p(z)$ من درجة n ا عادلة

$$p(z) = a_0 + a_1 z + .. + a^n z^n = 0$$

يكون ا n من ا ذور قق ا عادلة .. وذلك لأننا كننا إثبات أولا أن ا جذراً واحداً على الأقل .. فإن كانت $p(z) = 0$ ليس ا جذور فإن $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ تكون دالة ليليـة كل مكان (اذا) وبالتا فإن $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ تكون دودة (اذا؟) وبالتا طبقاً لنظريـة ليوفيل فإن $f(z)$ وبالتا $p(z)$ ب أن تكون ثابتة .. وهذا يعارض الواقع .. وبالتا فإن ا جذراً واحداً على الأقل قق $p(z) = 0$ ..

والآن إذا افترضنا أن هذا ا ذر هو α فإننا صل علـى أن $p(z) = (z-a)Q(z)$ حيـث $Q(z)$ حدودية من درجة (n-1) وبالتا فإن ا أيضاً جذراً واحداً على الأقـل .. هكـذا نستطيع إثبات أن $p(z)$ سيكون ا n من ا ذور.

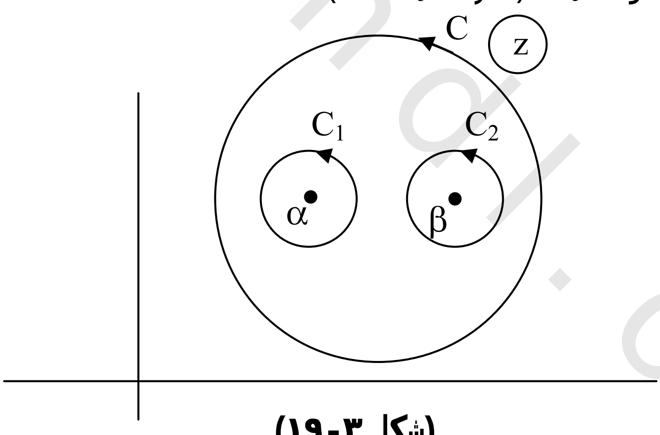
نظرية ٣-٦ نظرية السعة The Argument Theorem

إذا كانت $f(z)$ دالة ليلية على منحـ مغلق يسـ C وداخله باستثناء نقطة $z = \alpha$ داخل C وال هي قطب من رتبة p .. وكذلك $f(z)$ ا صفر وحيد عند $z = \beta$ داخـل C برتبة n (أي أن $\frac{1}{f(z)}$ ا قطب من رتبة n عند $z = \beta$) .. (أنظر شكل (٣-١٩)) فإن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (n-p)\,2\pi i$$

الإثبات

برسم الدائرتـ C_1 و C_2 مركز ا $z = \alpha$ و $z = \beta$ على الترتيب يث لا يتقاطعان مع C أو داخل C (أنظر شكل ٣-١٩).



(شكل ٣-١٩)

أيضا إذا كانت $f(z)$ ا أصفار وأقطاب معلومة فأنه بأخذ لوغـاريتم الطـرفـ التفاضـل سنلاحظ أن $\frac{f'(z)}{f(z)}$ سيصبح ا أقطاباً هي الأقطاب السابقة مضافاً إليها الأصفار .. أي أن الأصفار والأقطاب القد ة أصبحت هي أقطاباً للدالة ا ديدة $\frac{f'(z)}{f(z)}$.

وبالتا فإن $$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \oint_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

والآن .. ا أن $f(z)$ ا قطب وحيد من رتبة p فإ ا كن كتابتها على صورة

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-\alpha)^p}$$ وبالتا فإن

$$\ln f(z) = \ln F(z) - p \ln (z-\alpha)$$

وبالاشتقاق بالنسبة ا z فإن $$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{p}{z-\alpha}$$

وبالتا فإن $$\oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \oint_{C_1} \frac{F'(z)}{F(z)}dz - P\oint_{C_1} \frac{dz}{z-\alpha}$$

ولكن $F(z)$ دالة ليلية وغ صفرية على C_1 وداخل C_1 (اذا؟)

فإن $\oint_{C_1} \frac{F'(z)}{F(z)}dz = 0$ (اذا؟) .. كذلك $\oint_{C_1} \frac{dz}{z-\alpha} = 2\pi i$ (اذا؟)

وبالتا فإن

$$\oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -p(2\pi i) \qquad \ldots. \qquad (1)$$

والآن ا أن $f(z)$ ا صفر وحيد من رتبة n فإنه كن كتابتها على صورة $f(z)=(z-\beta)^n\, G(z)$ وبنفس الطريقة

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{G'(z)}{G(z)} + \frac{n}{z-\beta}$$

ولكن $G(z)$ دالة ليلية وغ صفرية على C_2 وداخل C_2 فإن

$$\oint_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \oint_{C_2} \frac{G'(z)}{G(z)}dz + n\oint_{C_2} \frac{n}{z-\beta}dz$$

$$= 0 + n(2\pi i) \qquad \ldots. \qquad (2)$$ (لماذا؟)

من (1) ، (2) فإن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = (n-p)(2\pi i)$$

مثال ٣-١٤

إذا كان $f(z) = \dfrac{z-1}{(z-2)^2}$ فاثبت أن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -2\pi i$$

حيث $f(z)$ دالة ليلية على C وداخل C باستثناء القطب z = 2 وأن z = 1 نقطة داخل C.

الإثبات:

من النظرية السابقة فإن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = (n-p)(2\pi i)$$

حيث $f(z)$ ا قطب وحيد من رتبة p و ا صفر وحيد من رتبة n وكلا ـا داخـل C ..

وحيث أن الشروط متوفرة و p = 2 و n = 1 وكلا ا داخل C فإن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(n-p)$$

$$= 2\pi i(1-2)$$

$$= -2\pi i$$

ملاحظة:

أنظر كم هي مدهشة ومر ة هذه النظرية للسعة .. وتغنينا عن إجراءات مطولة هي طول إثبات النظرية ذا ا .. و يل معي لو أن

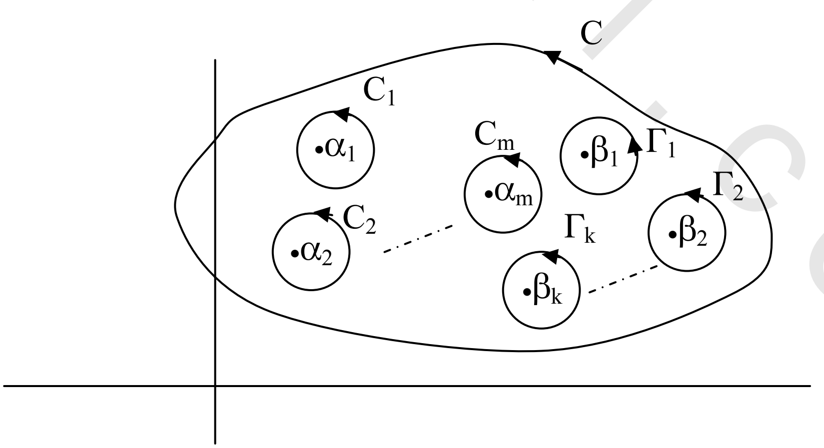
$$f(z) = \frac{(z-1)^2}{(z-2)^3(z-4)^4}$$

حيث C توي النقاط z = 1 و z = 2 فقط وبالتا فإن p = 3 و n = 2 وبيسر تام فإن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(n-p)$$
$$= -2\pi i$$

كذلك لاحظ أن قيمة التكامل على هيئة $\ln f(z)$ قد استبعدناها من فكرنا اماً (ـاذا؟) .. والآن أصبحت النظريات ال ص الدوال ا ركبة أكثر يزاً وأكثر وضوحاً وهـي إضـافة جديدة اماً لعلم التكامل .. لاحظ أيضاً وجود الثابت $(2\pi i)$ .. وهو مازال سراً من أسرار حساب هذه التكاملات .. والأهم من ذلك أن قيمة هذه التكاملات يلية فهـي خيـال خيال .. ولكن أ كن ذا ا يال أن ينتج شيئاً واقعياً .. دعنا نري.

و كننا تعميم النظرية السابقة إذا كانت $f(z)$ دالة ليلية على C وداخل C باسـتثناء عـدد دود من الأقطاب $\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_m$ وال رتبها $p_1,p_2,..,p_m$ داخل C .. وإذا كانت للدالة $f(z)$ عدد دود من الأصفار $\beta_1,\beta_2,..,\beta_k$ وال رتبها $n_1,\ n_2,\ ..,\ n_k$ فإنه بعـزل كـل الأقطاب والأصفار بدوائر C_i و Γ_j بالترتيب (أنظر شكل (٣-٢٠).



(شكل ٣ – ٢٠)

فإن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{m} \oint_{C_i} \underbrace{\frac{f'(z)}{f(z)}dz}_{\text{الأقطاب}} + \sum_{j=1}^{k} \oint_{\Gamma_j} \underbrace{\frac{f'(z)}{f(z)}dz}_{\text{الأصفار}}$$

$$= -2\pi \mathrm{i}\left(\sum_{i=1}^{m} P_i\right) + 2\pi \mathrm{i}\left(\sum_{j=1}^{k} n_k\right)$$

$$= (-P + N)2\pi i$$

$$= (N - P)2\pi i$$

حيث N و p هي   موع رتب الأصفار والأقطاب للدالة $f(z)$.

ملاحظة هامة:

لاحظ أن نقطة الصفر نفسها أو القطب غ داخلة   ا سابات .. فقيمة التكامل لا تعتمد على موضع الأصفار أو الأقطاب فقط تعتمد على رتب هذه الأصفار والأقطاب.

مثال ٣-١٥

إذا كانت $f(z) = \dfrac{(z-1)^3(z-i)^4}{(z+5)^2(z+i)^6(z^2+1)^3}$

فأوجد $\oint_C \dfrac{f'(z)}{f(z)}dz$ .. حيث كل الأصفار والأقطاب داخل C.

ا ــ ـل:

لاحظ أولا الآ :

$$f(z) = \frac{(z-1)^3(z-i)^4}{(z+5)^2(z+i)^6(z+i)^3(z-i)^3}$$

$$= \frac{(z-1)^3(z-i)}{(z+5)^2(z+i)^9}$$

وبالتا   فأصفار الدالة عند $z = 1$ و $z = i$ برتب 3 و 1 على الترتيب وكذلك أقطاب الدالة عند $z = -5$ و $z = -i$ برتب 2 و 9 على الترتيب .

أي أن $P_1 = 2 , P_2 = 9$ و $n_1 = 3 , n_2 = 1$

وبالتا فإن

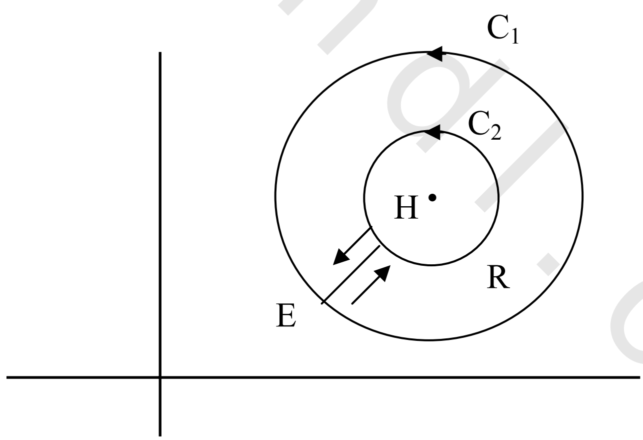
$$N = n_1 + n_2 = 3 + 1 = 4$$
$$P = P_1 + P_2 = 2 + 9 = 11$$

وبالتا وبيسر تام فإن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (N - P)$$
$$= 2\pi i (4 - 11)$$
$$= -14\pi i$$

مثال ٣-١٦

إذا كانت $f(z)$ دالة ليلية منطقة R دودة بدائرة متحدتا ا ركز concentric circles، C_1 و C_2 (أنظر شكل ٣-٢١) .. وكذلك $f(z)$ دالة ليلية على C_1 وعلى C_2 فإذا كانت $z_o \in R$ فإن



(شكل ٣-٢١)

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_o} dz - \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_o} dz\right]$$

الإثبات

كما فعلنا سابقاً فبعمل القطع E-H كما هو مب بالشكل فإننا كننا تطبيق صيغة تكامل كوشي على $f(z)$ على ا سار $M : C_1' - EH - (-C_2') - HE$ وبالتا فإن

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \oint_M \frac{f(z)}{z - z_o} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1'} \frac{f(z)}{z - z_o} dz + \int_{EH} \frac{f(z)}{z - z_o} dz + \int_{-C_2'} \frac{f(z)}{z - z_o} dz + \int_{HE} \frac{f(z)}{z - z_o} dz \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_o} dz - \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_o} dz \right]..$$

وذلك لأن

$$\int_{EH} \frac{f(z)}{z - z_o} dz = -\int_{HE} \frac{f(z)}{z - z_o} dz$$

مثال ٣-١٧

أوجد قيمة التكامل $\oint_C \frac{dz}{z^n}, n = 1,2,3,...$ باستخدام صيغة تكامل كوشي،

حيث C منح مغلق يس توي $z = 0$.

ا ل

باستخدام صيغة تكامل كوشي

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n \geq 0$$

فإنه عندما $a = 0$ و $f(z) = 1$ و $n = 0$ فإن

$$\oint_C \frac{dz}{(z)} = \frac{2\pi i}{0!}(1) \Rightarrow \oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

كذلك فإن: (اذا؟) $\oint_C \frac{dz}{z^n} = \frac{2\pi i}{n!}(0)$

$$= 0$$

مثال ٣-١٨

أوجد تكامل $\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta \; d\theta$ باستخدام صيغة تكامل كوشي.

ا ل:

يبدو هذا الطلب غريباً .. فهذا تكامل حقيقي فكيف سنستعمل تكامل كوشي؟! .. دعنا نرى ذلك

نعلم أن $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$ فإذا أخذنا دائرة الوحدة وعليهـا $z = e^{i\theta}$ فـإن $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ وبالتا وتعميماً للدوال ا ركبة فإن

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = \oint_{|z|=1} \left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]^{2n}\left(\frac{dz}{iz}\right) \quad , \quad dz = ie^{i\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2^{2n} i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\left[z^{2n} + {}^{2n}C_1 z^{2n-1}\left(\frac{1}{z}\right) + \dots + {}^{2n}C_k \left(z^{2n-k}\right)\left(\frac{1}{z}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{z}\right)^{2n}\right]dz$$

فإذا نظرنا للتكاملات الطرف الأ ن فكلها تتلاشى ما عدا اا على صورة $\oint_C \frac{dz}{z}$ وتساوي حينئذ $2\pi i$ (أنظر ا ثال السابق) .. ومعامل هذا ا د هو ${}^{2n}C_n$ (اذا؟) .. وبالتا فإن (لاحظ اختفاء القيمة التخيلية) ..

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = \frac{1}{2^{2n} i}\, {}^{2n}C_n . (2\pi i)$$

$$= \frac{2\pi}{2^{2n}} \frac{2n!}{n!(n!)}$$

(من تعريف التوافيق)

$$= \frac{2\pi}{2^{2n}} \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\ .....\ n(n-1)....\times 2\times 1}{n!\ (n!)}$$

$$= \frac{2\pi}{2^n n!} \cdot \frac{(2n)(2n-1)(2n-2).....(n+1)n\ .....2\times 1}{2^n\ \ n!}$$

$$= \frac{2\pi}{2^n n!} \cdot \frac{(2n)(2n-2)...4\times 2}{2^n\ \ n!} \cdot \frac{(2n-1)...\times 5\times 3\times 1}{1}$$ (بإعادة الترتيب)

$$= \frac{2\pi}{2^n n!} \cdot \frac{n(n-1)...\times 2\times 1}{n!}[(2n-1)...\times 5\times 3\times 1]$$

(اذا؟)

$$= 2\pi \frac{1\times 3\times 5...\times(2n-1)}{2\times 4\times 6...\times 2n}$$

أي أن قيمة التكامل استنتاجها فعلاً يث يكون

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = \frac{2\pi}{2^{2n}}\ {}^{2n}C_n$$

أما الصورة الأخ ة فلإثبات الصورة ا فوظة ا تكامل الدوال ا قيقية أي أننـا كننـا باستخدام نظريات التكامل للدوال ا ركبة أن نثبت تكاملات حقيقية .. هل كن ذلـك؟ .. نعم .

٣-٧ هيد لنظرية البافي Residue theorem

٣-١ البافي Residue عارض

إذا كانت f(z) دالة ليلية على وداخل منحـ مغلق يسـ C باستثناء قطب من رتبة m عند z = a داخل C فإن

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\ \ R$$

حيث

$$R = \lim_{z\to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)$$

الإثبات:

يمكن كتابة $f(z)$ كما اعتدنا على صورة

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

حيث $g(z)$ دالة تحليلية على وداخل C وأيضاً $g(a)\neq 0$. وبالتالي فباستخدام صيغة كوشي للتكامل فإن

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \oint_C \frac{g(z)}{(z-a)^m}dz \\ &= \frac{2\pi i}{(m-1)!}\, g^{(m-1)}(a) \\ &= \frac{2\pi i}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)\Big|_{z=a} \\ &= 2\pi i\left[\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)\right] \\ &= 2\pi i \quad R.\end{aligned}$$

ملاحظة:

لأسباب سنعلمها فيما بعد فإن R تسمى بالباقي .. باقي ماذا ؟! سنعلم آنفاً.

عارض ٣-٢

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل C باستثناء القطبين $z = a$ و $z = b$ داخل C فإن

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i[R_1+R_2]$$

حيث $R_{1,2}$ هما الباقيان عند نقط القطبين $z = a$ و $z = b$ على الترتيب.

الإثبات:

بعزل القطبين عند $z = a$ و $z = b$ بدائرتين C_2, C_1 فإنه وكما تعودنا فإن

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$$

فإذا كررنا أسلوب الإثبات الذي أجريناه عارض ٣-١ على كل من التكـاملا الطرف الثا فإننا نصل إ

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i[R_1 + R_2]$$

حيث

$$R_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)$$

و

$$R_2 = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to b} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z-b)^k f(z)$$

بافتراض أن $z = a$ قطب من رتبة m و $z = b$ قطب من رتبة k.

تعميم:

الواقع كننا وبنفس الأسلوب السابق عارض ٣ – ١ وعارض ٣ – ٢ أن نعمم هذه ا سألة يث إذا كانت $f(z)$ ا أقطاب عند $a_1, a_2, \ldots, a_l$ من رتبة $m_1, m_2, \ldots, m_l$ على الترتيب فإن

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{\ell} R_i$$

يث يكون

$$R_i = \frac{1}{(m_i-1)!} \lim_{z\to a_i} \frac{d^{m_i-1}}{dz^{m_i-1}}(z-a_i)^{m_i} f(z)$$

وهذه النظرية تسمي نظرية الباقي .. ولكن ليست هذه نظرية الباقي ذا ا ولكن هيد ـا .. لأن النقاط الشاذة الوحيدة ا سموح ا للدالة حـ الآن هو الأقطاب فماذا عن بقيـة أنـواع النقاط الشاذة من نقاط تفرع وأساسية .. وهل كن أن توجد نظرية شبيهة عامة لكل النقاط الشاذة؟!.

والآن فقط انكشف لنا سر العامل التخيلي (2πi) .. فإن التكامل للدالة f(z) على ا ـسار ا غلق اليس C الذي تـوي أقطاب الدالة f(z) هو 2πi مضروباً ميع البـواقي لكـل الأقطاب .. يا ا من نظرية رائعة .. وهذه النظرية ا تطبيقات كثـ ة سوف نتعرض ـا باب منفصل لاحق من هذا الكتاب.

مثال ٣-١٩

أحسب التكامل $\oint_C \frac{z-1}{(z-2)(z+i)}dz$ حيث C تـوي النقطة z = -i ولا تـوى z = 2 .

ا ل

كن ا ل بأكثر من أسلوب

(i) باستخدام صيغة تكامل كوشي مع تصرف يسـ كالآ :

$$\oint_C \frac{z-1}{(z-2)(z+i)}dz = \oint_C \frac{\left(\frac{z-1}{z-2}\right)}{(z+i)}dz$$

$$= \frac{2\pi i}{0!}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)\Bigg|_{z=-i}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-i-1}{-i-2}\right)$$

$$= 2\pi i\frac{i+1}{i+2}$$

$$= 2\pi i\frac{1}{3}(2+1+i)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{3+i}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi(-1+3i)$$

(ii) بأسلوب نظرية الباقي ويوجد باقي واحد R_1 لقطب يس (m=0): وبالتا :

(اذا)

$$R_1 = \frac{1}{0!}\lim_{z\to -i}(z+i).\frac{z-1}{(z-2)(z+i)}$$

$$= \frac{-i-1}{-i-2} = \frac{1+i}{2+i}$$

$$= \frac{1}{3}(1+i)(2-i)$$

$$= \frac{1}{3}(3+i)$$

وبالتا فإن

$$\oint_C \frac{z-1}{(z-2)(z+i)}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{3}\right)(3+i)$$

$$= \frac{2\pi}{3}(-1+3i)$$

أي أسلوب تفضل ساب هذا التكامل .. وماذا إذا تعددت الأقطاب .. هـذه ا الـة لا كننا تطبيق تكامل كوشي مباشرة وأحياناً لا نستطيع تطبيقها .. بينما كننا تطبيـق نظريـة الباقي ..

رينات ٣

١. احسب $\int_{1+i}^{1-i} |z|^2 \, dz$ على ا سارات التالية

(i) ا سار الأفقي ا سار الرأسي

(ii) ا سار الرأسي ا سار الأفقي

(iii) ا ط الواصل ب النقطت

وما هو تعليقك على قيمة التكامل.

٢. احسب $\oint_C (x+2y)dx+(y-2x)dy$ حول القطع الناقص C ا عرف بـ

$0 \le \theta < 2y$, $y = 3 \sin \theta$, $x = 4 \cos \theta$

(الإجابة: -48π)

٣. احسب $\int_C \left(x^2 - iy^2\right)dz$ على القطع ا كافئ $y = 2x^2$ مـن النقطـة (1,1) إ النقطة (2,8) (z)

(الإجابة: $\frac{511}{3} - \frac{49}{5}i$)

٤. اثبت أن $\int_C e^{-2z} dz$ مستقلة عن ا سار الذي يربط ب النقطت $1-\pi i$ و $2+3\pi i$ وأوجد قيمة التكامل.

(الإجابة: $\frac{1}{2}e^{-2}\left(1-e^{-2}\right)$)

٥. إذا كانت $G(z) = \int_{1+i}^{z} \sin z^2 \, dz$ فأثبـت أن G(z) دالـة ليليـة z وأن $G'(z) = \sin z^2$.

٦. احسب $\int_C \frac{dz}{z^2+4}$ ء ا ط $x + y = 1$ ا اه زيادة x (الإجابة: $\left(\frac{\pi}{2}\right)$)

٧. هل كنك تطبيق نظرية كوشي على الدالة $w=\sqrt{z}$ حيث C هو دائـرة الوحـدة $|z| = 1$. وضح.

٨. إذا كانت C يث $|z| = R$ اثبت ان

$$\lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{z^2+2z-5}{(z^2+4)(z^2+2z+2)}dz = 0$$

٩. اثبت نظرية متوسط القيمة اوس Gauss mean value theorem: إذا كانت $f(z)$ دالة ليلية على وداخل الدائرة C ال مركزها عند $z = a$ ونصف قطرها r فإن $f(a)$ هو القيمة توسطة لـ $f(z)$ .. أي أن

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+re^{i\theta}\right)d\theta$$

١٠. احسب

$$\oint_{\substack{C\\|z|=3}} \frac{\sin \pi z^2+\cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}\, dz \qquad \text{(i)}$$

((الإجابة $4\pi i$))

$$\oint_{\substack{C\\|z|=3}} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\, dz \qquad \text{(ii)}$$

(الإجابة: $8\pi i\, e^{-2/3}$)

١١. إذا كانت $f(z)$ دالة ليلية على وداخل الدائرة $C: |z| = R$ وكان

$$f\left(re^{i\theta}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2} f\left(\text{R}e^{i\phi}\right)d\phi \quad ، \quad r<R$$

حيث يتم التكامل على C فاثبت أن ا زء ا قيقي $u(r, \theta)$ والتخيلي $v(r, \theta)$ لـ $f(r\, e^{i\theta})$ ا

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(R^2-r^2\right)u(R,\phi)d\phi}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2} \qquad (i)$$

$$v(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(R^2-r^2\right)v(R,\phi)d\phi}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2} \qquad (ii)$$

يطلق على هذا التكامل $\oint_C f(z)dz$ بتكامل بواسون. ولإثباته لابد من الرجـوع

ا [ ].

١٢. احسـب $\oint\limits_{\substack{C\\|z|=4}}\frac{e^z}{\left(z^2+\pi^2\right)^2}\,dz$

الإجابة $\left(\frac{i}{\pi}\right)$.

١٣. احسب التكامل $\oint\limits_{\substack{C\\|z|=2}}\frac{dz}{z+1}$ ومن اثبت أن

$$\oint_C\frac{(x+1)dx+ydy}{(x+1)^2+y^2}=0,\qquad \oint_C\frac{(x+1)dy-ydx}{(x+1)^2+y^2}=2\pi$$

١٤. إذا كانت $f(z)$ دالة ليلية على وداخل ا نحـ ا غلق اليسـ C .. فاثبت أن

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i\theta}f\left(a+e^{i\theta}\right)d\theta \qquad (i)$$

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{in\theta}f\left(a+e^{i\theta}\right)d\theta \qquad (ii)$$

مساعدة:

كنك أخذ التكامل على الدائرة |z| = a .. واستعمال صيغة تكامل كوشي.

١٥. إذا كانت $g(z)$ دالة تحليلية على وداخل C وكانت $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل C باستثناء أن لها أقطاباً عند النقاط $b_1,b_2,..,b_n$ داخل C وكذلك لها أصفار عند النقاط $a_1,a_2,..,a_m$ داخل C أيضاً وبرتبة $p_1,p_2,..,p_n$ للأقطاب و $q_1,q_2,..,q_m$ للأصفار .. على ضوء إثبات نظرية السعة argument theorem اثبت أن

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{n} P_k g(a_k)-\sum_{k=1}^{m} q_k g(b_k)$$

١٦. على ضوء تمرين (١٥) .. وإذا كانت

$f(z) = a_o z^n + a_1 z^{n-1} + .. + a_n \quad , \quad a_i \in C \ \forall_i$

وكان C منحنى مغلق بسيط يحتوي كل أصفار الدالة الحدودية $f(z)$ فاثبت أن

$$\oint_C z\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\left(-\frac{a_1}{a_o}\right)(2\pi i)$$

$$\oint_C z^2\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\left(\frac{a_1^2-2a_oa_2}{a_o^2}\right)(2\pi i)$$
