الباب الثاني

الاشتقاق Differentiation

٢-١ مقدمة

كما رأينا سابقاً فإن ا فاهيم الأساسية النهاية والاتصال تتغ عن مثيلتها ا تغ ا قيقي وهناك اختلافات يس ة جداً راجعة ا طبيعة ا تغ ا ركب ودواله ال هي ويل من مستوى z ا مستوى w كما إيضاحه الباب الأول .. وبالرغم من أن ا فهوم الأساسي للاشتقاق يتغ أيضا إلا أن النتائج ال سنحصل عليها هذا الباب غ مسبوقة وليس ا نظ للمتغ ا قيقي وهو ما يعرف عادلات كوش – ر ان .. وهى لب هذا الباب الأساسي مادة ا تغ ا ركب.

٢-٢ اشتقاق الدوال ا ركبة Complex function differentiation

إذا كانت $w = f(z)$ دالة وحيدة القيمة منطقة R من مستوى z فإن اشتقاق w يعرف كالآ :

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz} f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

بشرط وجود هذه النهاية مستقلة عن الطريقة ال يؤول فيها Δz إ الصفر.

وا ملة الأخ ة هي صاحبة ا ديد هذا الباب.

ويقال حينئذ أن $\bar{f}(z)$ موجود ∃ لكل نقطة ا نطقة R $\forall\ z \in \Re$ وتسمي $f(z)$ بالدالة التحليلية analytic أو الدالة ا نتظمة regular أو دالة هو ورفيه holomorphic وهذه الاصطلاحات مرادفة لبعضها البعض ام ـ أ .. والدالة $f(z)$ دالة ليلية عند نقطة z_0 طا ـ ا كانت $\bar{f}(z)$ موجودة كل نقاط ا ـ وار neighbourhood $|z-z_0|<\delta$ لأي ع ـ دد موجب δ.

مثال ٢-١

استخدم التعريف لإثبات أن:

$$\frac{d}{dt} z^2 = 2z$$

ا ل: يتشابه أسلوب ا ل هنا اما مع ما سبق فعله للدوال ا قيقية .. فأيضا

$$\bar{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= 2z$$

وبالتا فإن $\frac{d}{dz} z^2 = 2z$

وبالتا كننا إ اد $\bar{f}(1+i) = 2(1+i)$

وهكذا .. و د أن كل ما تعلمناه ذف العامل الصفري هذه النهاية كن تطبيقه بدون تغي ولا مشاكل إطلاقا إذا أمكن ذلك.

مثال ٢-٢:

إذا كانت $w = |z|^2$ فهل يوجد ذه الدالة اشتقاق؟

ا ل:

هذه ا الة $w = z\,\bar{z}$ لأن $|z|^2 = z\,\bar{z}$

وبالتا

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)\left(\overline{z+\Delta z}\right) - (z)(\bar{z})}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)\left(\bar{z}+\overline{\Delta z}\right) - (z)(\bar{z})}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\bar{z} + \bar{z}\Delta z + z\overline{\Delta z} + \Delta z\overline{\Delta z} - z\bar{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left(\bar{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right)$$

هنا ب أن نكون حذرين أخذ النهاية .. فا رافق z وجود جديد للمتغ ا ركب ليس له مثيل دوال ا تغ ا قيقي .. ولذلك ب أن ندرسه بعناية .. فمثلاً هل

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}(\bar{z}+\overline{\Delta z}+z\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z})$ موجود أم غ موجود، ولقد سبق التعامل مع مثل هذه ا فاهيم بل أن أحد التمارين رين ١- يقول أن $\lim\limits_{z\to 0} f(\bar{z})$ غ موجود .. فهل هذه النهاية مثلها؟! .. دعنا نرى ذلك .. إذا ما أخذنا ا سار $\Delta y=0$ و $\Delta x\to 0$ فإن

$$\lim_{\Delta z\to 0}(\bar{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z})=\lim_{\Delta x\to 0}((x-iy)+(\Delta x)+(x+iy)\frac{\Delta x}{\Delta x})=2x$$

وإذا ما أخذنا ا سار $\Delta x=0$ و $\Delta y\to 0$ فإن

$$\lim_{\Delta z\to 0}(\bar{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z})=\lim_{\Delta y\to 0}((x-iy)-i\Delta y+(x+iy)\frac{-i\Delta y}{i\Delta y})$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\left[(-2iy)-i\Delta y\right]$$

$$=-2iy$$

ولا كن أن يتساوى قيمتا النهايتا فأحد ا حقيقية والأخرى يلية .. إذاً يتنا وجود هذه النهاية لأي نقطة ا ستوى z .. وعلى هذا نقول بشكل مطلق أن الاشتقاق غ موجود أي مكان أي أ ا دالة غ ليلية أي مكـان non-analytic anywhere وجـدير با ناقشة هنا أن نقول أنه لإثبات وجود الاشتقاق .. لابد من إثبات أن النهاية ـا قيمـة لا تعتمد على ا سار .. ولكن كيف نثبت ذلك ؟! .. فإذا أخذنا عدد كا من ا سارات وكلها توجد نفس القيمة للنهاية فليس هذا بإثبات كا لوجود النهاية (أي وجـود الاشـتقاق) .. ولكن العكس صحيح فيكفي أن تلف قيمة النهاية عند مسارين .. هذه ا ا ـة نقـول بتأكيد أن النهاية غ موجودة أي أن الاشتقاق غ موجود. فهذه الطريقة لا تصلح لإثبـات وجود الاشتقاق ولكنه ر ا يكون موجوداً ولذلك لا بد من تأكيد الوجود بطريقة أخـرى .. أما إثبات عدم الوجود فمتاح.

كذلك لاحظ أيها القارئ أن سبب ذلك هو وجود الدوال غ ا سبوقة ا ـتغ ا قيقي وهي دوال ا رافق مثل $\bar{z}$ و $\overline{\Delta z}$ و ب التعامل معها ظر شديد.

مثال ٢-٣

أوجد مناطق ليلية الدالة $w = \dfrac{1+z}{1-z}$

ا ل:

كا عتاد فإن

$$\overline{w} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{1+z+\Delta z}{1-z-\Delta} - \dfrac{1+z}{1-z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(1+z+\Delta z)(1-z)-(1+z)(1-z-\Delta z)}{(\Delta z)(1-z-\Delta z)(1-z)}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1-z+z-z^2+\Delta z-\Delta zz-1+z+\Delta z-z+z^2+\Delta zz}{(\Delta z)(1-z-\Delta z)(1-z)}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2}{(1-z)(1-z-\Delta z)}$$

$$= \frac{2}{(1-z)^2}$$

بأي طريقة تؤول فيها $\Delta z \to 0$ فإن هذه هي قيمة الاشتقاق .. وبالطبع لابد أن نستث النقطة $z = 1$. أي أن الاشتقاق موجود كل ا ستوي ما عدا $z = 1$. وهي نتيجة لا تصطدم مع معلوماتنا السابقة.

نظرية ٢-١

إذا كانت الدالة $f(z)$ ليلية عند نقطة z فأ ا أيضا تكون متصلة .. والعكس غ صحيح.

الإثبات

بوضع $\Delta z = h$ فإن

$$f(z+h)-f(z) = \frac{f(z+h)-f(z)}{h}.h \quad , \quad h \neq 0$$

وبالتا فإن $\lim\limits_{h\to 0}\left(f(z+h)-f(z)\right)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}.h$

لأن $\bar{f}(z)\exists$ ، $=\bar{f}(z).(0)$

$=0$

وهذا يعـ أن $\lim\limits_{h\to 0} f(z+h)=f(z)$

أي أن f(z) دالة متصلة.

ولكن الدالة $f(z)=\bar{z}$ هي دالة مستمرة ولكن اشتقاقها غـ موجود (اذا؟) .. وبالتا فإن الاستمرار لا يؤدي إ الاشتقاق ولكن العكس هو الصحيح.

ونلاحظ هنا عدم اصطدمنا ذا ا فهوم فهو يتفق مع معلوماتنا السابقة.

٣-٢ قواعد الاشتقاق Differentiation Rules

لا مفاجآت عندنا ت هذا ا سمى .. فقواعد اشتقاق الدوال التحليلية هي نفسها القواعد ا تعارف عليها ..

$$\frac{d}{dz}\left(f(z)\pm g(z)\right)=\bar{f}(z)\pm\bar{g}(z) \qquad (i)$$

$$\frac{d}{dz}c\,f(z)=c\,\bar{f}(z) \qquad (ii)$$

$$\frac{d}{dz}\left(f(z).g(z)\right)=f(z)\bar{g}(z)+\bar{f}(z)g(z) \qquad (iii)$$

$$\frac{d}{dz}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{g(z)\bar{f}(z)-f(z)\bar{g}(z)}{g^{2}(z)},g(z)\neq 0 \qquad (iv)$$

(v) إذا كان $w=f(z)$ وكان $z=g(\eta)$

فإن قاعدة التسلسل chain rule كا عتاد هي:

$$\frac{dw}{d\eta}=\frac{dw}{dz}.\frac{dz}{d\eta}$$

وهكذا ..

(vi) إذا كان $w=f(z)$ فإنه إذا وجدت $z=f^{-1}(w)$ فإن

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\left(\frac{dz}{dw}\right)}$$

(*vii*) كذلك إذا كان $z = f(t)$ وكان $w = g(t)$ فان

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\bar{g}(t)}{\bar{f}(t)},$$

حيث '–' تشـ ا تفاضل بالنسبة للبارامتر *t*.

(*viii*) نفس القواعد ا عتادة ا يسمى بالتفاضلة تسري هنا على دوال ا تغ ا ركب بلا حذر .. فمثلاً

$$d\left(f(z)\pm g(z)\right)=\left(\bar{f}(z)\pm \bar{g}(z)\right)dz$$

وهكذا.

(*ixx*) الاشتقاق من رتب أعلى higher order derivatives كن إجراءه بتكرار التعريف دون حذر طا ا كانت $f'(z)$ دالة ليلية وهكذا كن ا صول على $f''(z)$, $f'''(z)$ … $f^{(n)}(z)$ إذا أمكن ذلك .. ولكن يوجد يز لدوال ا تغ ا ركب النظرية التالية:

نظرية ٢-٢

إذا كانت f(z) دالة ليلية منطقة R مستوى z فإنه أيضا يكون $f'(z)$, $f''(z)$ لأي رتبة، دوال ليلية ا نطقة ذا ا R. أي أن كل ا شتقات من رتب أعلى تتواجد إذا ما وجدت ا شتقة الأو .

(*xx*) قاعدة لاهوبيتال L'Hosptal's rule الشهـ ة كن تطبيقها أيضا على دوال ا تغ ا ركب فأيضاً إذا كان f(z) , g(z) دوال ليلية منطقة R عند نقطة z_0 وبافتراض أن $f(z_0)=g(z_0)=0$ ولكن $g'(z_0)\neq 0$ فان:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

وتعمل القاعدة طبقا للإضافات والإمتدادات ا عتاد عليها لدوال ا تغ ا قيقي دون تغيـ يذكر

فيمكن تكرار استعما ا كما كن استعما ا الات أخرى غ $\frac{0}{0}$ مثل $\frac{\infty}{\infty}$ ..
وهكذا.
وكما نرى فإنه لا مفاجآت كب ة ح الآن باب الاشتقاق .. ولا يوجد شئ يز جدا لاشتقاق دوال ا تغ ا ركب ح الآن.

٢-٤ معادل كوشي-ر ان Cauchy-Riemann Equations

بتدقيق أك اعتماد النهاية على ا سار .. اثبت كوشي ومعه ر ان هذه النظرية الشه ة .. وهي التمييز الأك باب الاشتقاق للدوال ا ركبة عنها للدوال ا قيقية إذ لا يوجد نظرية اثلة هذا الفرع ..

نظرية (٢-٣) كوشي-ر ان

الشرط الضروري necessary condition للدالة $w = f(z) = u + iv$ ح تكون دالة ليلية منطقة R مستوى z هي أن قق كل من v, u هذان الشرطان (ويعرفان عادل كوشي-ر ان):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

الإثبات:

ن الآن نثبت وجود النهاية $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

ولذلك دعونا نكتب $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ بشكل عام ونأخذ ا سارين ا عتادين اليس ين و ا ($\Delta y = 0$ و $\Delta x \to 0$) و ($\Delta x = 0$ و $\Delta y \to 0$) ونرى ما النتائج ا سنحصل عليها.

دع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ وبالتا فإن:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y)] - [u(x,y) + iv(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y}$$

و حالة ا سار الأول Pass 1 ($\Delta x=0$ و $\Delta y\to 0$):

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{i\Delta y}[u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)]$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{i\Delta y}(u(x,y+\Delta y)-u(x,y))$$

$$+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{i}{i\Delta y}(v(x,y+\Delta y)-v(x,y))$$

و الواقع فإن كميات مثل $\lim_{\Delta y\to 0}\frac{g(x,y+\Delta y)-g(x,y+\Delta y)}{\Delta y}$ سبق التعامل معها وتعريفا على أ ا الاشتقاق ا زئي للدالة ثنائية ا تغ ات $g(x,y)$ بالنسبة ا y (حالة عدم تغير x) .. أي أ ا تساوي $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ وبالتا فإن

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

و حالة ا سار الثا (pass 2): $\Delta x=0$ و $\Delta y\to 0$ فإن

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)-u(x,y)-iv(x,y)]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}(i)\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

وأقل متطلب نطلبه هنا أن تتساوى قيمة النهاية على هذين ا سارين علـى الأقـل (والـذلك فالشرط الذي سنحصل عليه هو شرط ضروري ولكنه ليس بكا) وبالتال فإن:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

و ا ا عادلتان الشهيرتان المعروفتان بمعادلتي كوشي – ريمان.
ونعقب هنا على هذين الشرطين أنه في حالة عدم تحققهما معاً فإن الدالة تفشل أن تكون تحليلية .. ولكن في حالة تحققهما معا فإن الدالة ربما تكون تحليلية.

نظرية ٤-٢ الكفاية Sufficiency

إذا كانت التفاضلات الجزئية $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ متصلة في نفس المنطقة R بمستوى z التي فيها يتحقق معادلتي كوشي-ريمان فإن f(z) تكون تحليلية.

الإثبات:

حيث أن التفاضلات الجزئية $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ متصلة فإن

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) \\ &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y) \\ &\quad + u(x, y+\Delta y) - u(x,y) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \in\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \delta\right)\Delta y\end{aligned}$$

باستعمال مفكوك تايلور ،

حيث $\in, \delta \to 0$ عندما $\Delta x, \Delta y \to 0$ وعندها تتحقق العلاقة

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

وبالتالي فإن

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \in \Delta x + \delta \Delta y$$

وبالمثل فإن

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \gamma \Delta x + \beta \Delta y$$

حيث $\gamma, \beta \to 0$ عندما $\Delta x, \Delta y \to 0$.

وبالتا فان

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + (\in + i\gamma)\Delta x + (\delta + i\beta)\Delta y$$

وكا عتاد فإن $\in + i\gamma \to 0$ و $\delta + i\beta \to 0$ عندما $\Delta x, \Delta y \to 0$

وباستعمال معادلا كوشي-ر ان فإن

$$\Delta w = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y + (\in + i\gamma)\Delta x + (\delta + i\beta)\Delta y$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\underbrace{(\Delta x + i\Delta y)}_{\Delta z} + (\in + i\gamma)\Delta x + (\delta + i\beta)\Delta y$$

وبالقسمة على Δz فإن

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + (\in + i\gamma)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\delta + i\beta)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

وبأخذ النهاية عند $\Delta z \to 0$ أي ($\Delta x \to 0$ و $\Delta y \to 0$) فإن $\in + i\gamma \to 0$ و $\delta + i\beta \to 0$ وبالتا

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

وبالتا فإن التفاضل يكون موجوداً وفريداً وبالتا فان $f(z)$ تكون دالة ليلية مع ملاحظة أننا استعملنا معادلا كوشي-ر ان واستعملنا مفكوك تايلور البداية الذي يستوجب اتصال الدالة u,v.

تعقيب: تقول النظريتان ٢-٣، ٢-٤ أنه إذا ما قق معـادلا كوشـي-ر ـان وكانـت التفاضلات ا زئية u_x,u_y و v_x,v_y متصلة فإن $f(z)$ تكون دالة ليلية .. ولا كـن الاكتفاء بتحقق معادلا كوشي-ر ان وحد ا كما سبق وذكرنا كمـا لا كـن الاكتفاء بشرط الاتصال لأننا استعلمنا معادلا كوشي-ر ان الإثبات. كذلك فإننا لا ننسى أننا حصلنا على التفاضل حالة وجوده وهو

$$\frac{dw}{dz} = u_x + iv_x = \frac{\partial}{\partial x}(w)$$

$$= v_y - iu_y = \frac{\partial}{\partial y}(-iw)$$

وبالتا كننا معرفة الاشتقاق بيسر باستعمال أحد هذه الصيغ وليكن

$$\boxed{\frac{dw}{dz} = u_x + iv_x}$$

مثال ٢-٤:

أثبت أن $w = \sin \bar{z}$ غ ليلية أي مكان وقارن ذلك مع الدالة $w=\sin z$.

الإثبات:

نعلم أن

$$w = \sin z$$
$$= \sin (x + iy)$$
$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

وبالتا فإن

$$w = \sin \bar{z}$$
$$= \sin(x - iy)$$
$$= \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

أذن

$u = \sin x \cosh y$, $v = -\cos x \sinh y$

$u_x = \cos x \cosh y$, $v_y = \sin x \sinh y$

$u_y = \sin x \sinh y$, $v_x = \sin x \sinh y$

ولتحقق معادلا كوشي-ر ان فلابد

$u_x = v_y \Rightarrow 2\cos x \cosh y = 0$

$u_y = -v_x \Rightarrow 2\sin x \sinh y = 0$

وقيم x الـ عل $\cos x = 0$ لا عل $\sin x = 0$

وكذلك قيم y الـ عل $\cosh y = 0$ لا عل $\sinh y = 0$

وبذلك فنحن لا د أي نقاط تتفق فيها هاتـ ا عادلة وبالتا فان $\sin \bar{z}$ غ ليلية كل مكان.

وعلى العكس من ذلك فإننا د أن معادلا كوشي-ر ان متحققتان بالنسبة لـ $\sin z$ ولكن الدوال $\sin x, \cos x$ و $\sinh x, \cosh x$ دوال متصلة وتفاضلا ا زئية متصلة أيضاً وبالتا فإن الشرط الكا قق كما أن الشرط الضروري قق أيضاً وبالتا فإن الدالة $\sin z$ قابلة للاشتقاق كل مكان.

٢-٥ الدوال التوافقية Harmonic Functions

كن ا مع بـ النظرية ٢-٣ و ٢-٤ نظرية واحدة يث إذا ققت شروطها فإ ا توى شروط النظرية ٢-٣ و ٢-٤ معاً.

نظرية ٢-٥

إذا كانت ا شتقات ا زئية الثانية للدوال موجودة ومستمرة منطقة R مستوى z فإ ا قق

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad ,$$

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

أي أن ا زء ا قيقي وا زء التخيلي للدالة $f(z)$ ققان معادلـة لابـلاس $(\nabla^2 g = 0)$ متغ ين إذا كانت $f(z)$ دالة ليلية.

الإثبات:

ا أن $f(z) = u + iv$ دالة ليلية فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

وبالتا من (1) فإن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad (3)$$

وبالتا من (2) فإن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{-\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad (4)$$

و مع (3),(4) فإن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

وبا ثل كن إثبات أن

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

وح نتمكن من إجراء الاشتقاق فإننا نشترط أن ا شتقات ا زئية من الرتبة الثانية ـب أن

تكون موجودة.

ملاحظة:

يطلق على u و v تسمية الدوال ا ترافقـة conjugate functions و كـن حال معرفة واحدة منهما استنتاج الأخرى.

مثال ٢-٥

a) اثبت أن الدالة $u = e^{-x}$ (x sin y-y cos y) دالة توافقية

b) أوجد v ا رافقة لـ u

c) أوجد $f(z) = u + iv$

ا ل

(a $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$

وبالتا فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-x}(\sin y) - e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$$

وبالتا

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{-x}(\sin y) - e^{-x}(\sin y) + e^{-x}(x \sin y - y \cos y) \quad (1)$$

كذلك

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x}(x \cos y + y \sin y - \cos y)$$

وبالتا

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-x}(-x \sin y + y \cos y + \sin y + \sin y) \quad (2)$$

و مع (١) و (٢):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-x}\sin y - e^{-x}\sin y + e^{-x} x \sin y - e^{-x} y \cos y$$

$$+ 2e^{-x}\sin y - e^{-x} x \sin y + e^{-x} y \cos y$$

$$= 0$$

أي أن u قق معادلة لابلاس Laplace equation

$$\nabla^2 u = 0$$

وبالتا فإن u دالة توافقية.

b) والآن باستعمال معادل كوشي-ر ان فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^{-x}\sin y-e^{-x}x\sin y+e^{-x}y\cos y \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=e^{-x}x\cos y+e^{-x}y\sin y-e^{-x}\cos y \qquad (4)$$

من (3) وبالتكامل بالنسبة ا y فإن

$$v = -e^{-x}\cos y + e^{-x}x\cos y + e^{-x}\int y\cos y\,dy$$
$$= -e^{-x}\cos y + e^{-x}x\cos y + e^{-x}[y\sin y - \int \sin y\,dy]$$
$$= -e^{-x}\cos y + e^{-x}x\cos y + e^{-x}y\sin y + e^{-x}\cos y + F(x)$$

أي أن

$$v(x, y) = x\,e^{-x}\cos y + y\,e^{-x}\sin y + F(x)$$

وبتفاضل هذه الدالة جزئياً بالنسبة ا x فإن

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-xe^{-x}\cos y+e^{-x}\cos y-e^{-x}y\sin y+F'(x)$$

ولكن من (4) فإن

$$-xe^{-x}\cos y + e^{-x}\cos y - e^{-x}y\sin y + F'(x) = -e^{-x}x\cos y - e^{-x}y\sin y + e^{-x}\cos y$$

أي أن $F'(x) = 0 \Rightarrow F(x) = A$

وبالتا فإن

$$v(x, y) = x\,e^{-x}\cos y + y\,e^{-x}\sin y + A$$

$$\boxed{v(x, y) = e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + A}$$

وهي الدالة ا رافقة ا طلوبة.

٢) والآن فإن $f(z) = u + iv$ دالة ليلية ولإ ادها كدالة z فأننا نستعمل

$$z = x + iy \qquad , \qquad \bar{z} = x - iy$$

أي أن

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2} \qquad , \qquad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

وأي متطابقات أخرى مفيدة مثل أن $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ .. وهكذا

و حالتنا هذه فإن

$$\begin{aligned}
f(z) &= u + iv \\
&= e^{-x}(x \sin y - y \cos y) + ie^{-x}(x \cos y + y \sin y) + iA \\
&= e^{-x}x (\sin y + i \cos y) + e^{-x}y (- \cos y + i \sin y) + iA \\
&= e^{-x} x (\underline{\sin y + i \cos y}) + e^{-x} y\, i (\underline{\sin y + i \cos y}) + iA \\
&= e^{-x} (\sin y + i \cos y) (x + i y) + iA \\
&= e^{-x} i (\cos y - i \sin y) (x + i y) + iA \\
&= e^{-x} i e^{-iy} z + iA \\
&= i e^{-z}z + iA
\end{aligned}$$

أذن الدالة التحليلية $f(z)$ هي:

$$\boxed{f(z) = iz e^{-z} + iA , A \in \Re}$$

ملاحظات:

(i) هناك أكثر من أسلوب للوصول إ نفس النتيجة السابقة .. فمن u نوجد v و كن من v نوجد u وكذلك من $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ نوجد v وكذلك من $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ نوجد v أيضا وهكذا .. على أن النتيجة ب أن تكون فريدة كدالة z.

(ii) نلاحظ أن دالة $f(z)$ ا ستنتجة تعتمد على ثابت عام وبالتا فنظريا ن لك عدد لا ائي من ا لول والانفراد يكون ا زء ا عتمد على z فقط.

(iii) إذا علمنا من الدالة $f(z)$ ا زء ا قيقي فقط (مثلاً)، فإنه وبدون معرفة v كننا إ اد $\frac{df}{dz}$ باستعمال

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dz} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}$$

وأيضا معرفة v فقط كن من ذلك أيضاً باستعمال

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dz} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}$$

و ب الالتفات ا ذلك حالة طلب مشتقة $f(z)$ فقط دون معرفة $f(z)$.

ففي ا ثال السابق

$$\frac{df}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$=e^{-x}\sin y-e^{-x}x\sin y+e^{-x}y\cos y-i\left(e^{-x}x\cos y+e^{-x}y\sin y-e^{-x}\cos y\right)$$

$$=e^{-x}(\sin y+i\cos y)-e^{-x}(x\sin y+ix\cos y)+e^{-x}(y\cos y-iy\sin y)$$

$$=e^{-x}i(\cos y-i\sin y)-e^{-x}xi(\cos y-i\sin y)+e^{-x}y(\cos y-i\sin y)$$

$$=e^{-x}i\,e^{-iy}-e^{-x}xie^{-iy}+e^{-x}y\,e^{-iy}$$

$$=e^{-(x+iy)}i[1-x-iy]$$

$$=e^{-(x+iy)}i(1-(x+iy))$$

$$=ie^{-z}(1-z)$$

وهو ما كن التأكد منه بتفاضل $f(z)$

$$f(z) = i\,z\,e^{-z} + i\,A$$
$$f'(z) = i\,(-z\,e^{-z} + e^{-z}) + 0$$
$$= i\,e^{-z}\,(1-z)$$

وهى نفس النتيجة.

٢-٦ معادل كوشي – ر ان الصورة القطبية

Cauchy-Riemann equations in polar form

كث من ا الات يكون من الأفضل استعمال الصورة القطبية للمـتغ ا ركـب وهـي $z = r\,e^{i\theta}$. وبالتا فيجب تعديل ا عادلات من (x,y) إ (r,θ)

عارض ٢-١ معادل كوشي-ر ان الصورة القطبية ا

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad , \qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

الإثبات:

إثبات هذين ا عادلت يتم بعملية ويل فقط للمعادلات الأصـلية مـن (x,y) إ (r,θ) باستعمال

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

كالتا

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{(x^2+y^2)}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta \qquad (1)$$

كذلك

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{(x^2+y^2)}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta \qquad (2)$$

كذلك

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\left(\frac{x}{r}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\left(\frac{-y}{r^2}\right)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta \qquad (3)$$

كذلك

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{r}\cos\theta \qquad (4)$$

وبالتا فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{r}\cos\theta$$

ومن استقلال الدوال $\cos\theta, \sin\theta$ فإنه لابد أن يكون

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

ملاحظة:

(i) معادلة لابلاس الصورة القطبية هي

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

ومن اليسر إثبات أن $u(r, \theta)$ و $v(r, \theta)$ قفقان معادلة لابلاس الصورة القطبية.

مثال ٢-٦

اثبت أن $w = z^n$ دالة لميلية حيث $n \in N^+$

الإثبات

نلاحظ أنه إذا استعملنا الصورة الكارتيزية $z = x + iy$ فإن فك ا قدار $(x+iy)^n$ وا صول على v,u أمر صعب ولكن باستعمال الصورة القطبية فإن الأمر أيسر بكث حيث $z = r\, e^{i\theta}$

فإن $z^n = r^n e^{i\theta} = r^n (\cos n\theta + \sin n\theta)$

وبالتا فإن

$$u = r^n \cos n\theta$$
$$v = r^n \sin n\theta$$

وبالتا فإن

$$\frac{\partial u}{\partial r} = n r^{n-1} \cos n\theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -n r^n \sin n\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = n(n-1)\, r^{n-2} \cos n\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -n^2 r^n \cos n\theta$$

وبالتا فإن

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=n(n-1)r^{n-2}\cos n\theta+nr^{n-2}\cos n\theta-n^2r^{n-2}\cos n\theta$$
$$=0$$

أي أن $\nabla^2 u=0$ وبا ثل كن إثبات أن $\nabla^2 v=0$

وبالتا فإن u,v دوال توفيقية أي أن $w = z^n$ دالة ليلية

مثال ٢-٧

اثبت أنه إذا كان $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ دالة ليلية فإن

$$\frac{df}{dz}=\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}$$

الإثبات

باستعمال $\frac{df}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

فان

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}$$
$$=u_r\cos\theta-\frac{1}{r}u_\theta\sin\theta$$

وكذلك فإن

$$\frac{\partial v}{\partial x}=v_r\cos\theta-\frac{1}{r}v_\theta\sin\theta$$

وبالتا فإن

$$\frac{df}{dz}=u_x+iv_x$$
$$=(u_r+iv_r)\cos\theta-\frac{1}{r}(u_\theta+iv_\theta)\sin\theta$$
$$=\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}$$

مثال ٢-٨

أوجد $\frac{df}{dz}$ حالة $f(z)=z^n$, $n \in N^+$

الإثبات

$$f(z)=r^n\cos n\theta+ir^n\sin n\theta$$
$$\frac{\partial f}{\partial r}=nr^{n-1}\cos n\theta+inr^{n-1}\sin n\theta$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta}=-nr^n\sin n\theta+inr^n\cos n\theta$$

إذن باستعمال الصيغة السابقة مثال ٢-٧ فإن

$$\begin{aligned}\frac{df}{dz}&=\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\\
&=\left(nr^{n-1}\cos n\theta+inr^{n-1}\sin n\theta\right)\cos\theta\\
&\quad-\left(-nr^n\sin n\theta+inr^n\cos n\theta\right)\frac{\sin\theta}{r}\\
&=nr^{n-1}(\cos n\theta+i\sin n\theta)\cos\theta\\
&\quad-nr^{n-1}(-\sin n\theta+i\cos n\theta)\sin\theta\\
&=nr^{n-1}e^{in\theta}\cos\theta\\
&\quad-nr^{n-1}i(\cos n\theta+i\sin n\theta)\sin\theta\\
&=nr^{n-1}e^{in\theta}\cos\theta-nr^{n-1}e^{in\theta}i\sin\theta\\
&=nr^{n-1}e^{in\theta}(\cos\theta-i\sin\theta)\\
&=nr^{n-1}e^{in\theta}e^{-i\theta}\\
&=nr^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\\
&=n\,z^{n-1}\end{aligned}$$

أي أن $\frac{d}{dz}\left(z^n\right)=n\,z^{n-1}$, $n \in N^+$.

مثال ٢-٩

اثبت أنه إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة R من مستوى z وكان $\bar{f}(z) = 0$ ، $z \in \Re$ فإن $f(z) = \alpha$ (ثابت) .

الإثبات

بما أن $f(z)$ دالة تحليلية فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ولكن $\bar{f}(z) = 0$ .. أي أن $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

وهذا معناه أن $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .. أي أن $u = f_1(y)$

وكذلك $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ .. أي أن $v = f_2(y)$

ولكن من معادلات كوشي-ريمان يكون $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ .. أي أن $u = f_3(x)$

وكذلك $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ .. أي أن $u = f_4(x)$

ولا يمكن أن يكون ذلك إلا إذا كان

u = ثابت = α_1

v = ثابت = α_2

وبالتالي فإن $f(z) = \alpha$:ثابت

مثال ٢-١٠

إذا كانت $f(z)$ دالة ليلية R فاثبت إنه إذا كان ثابـت: u = α فـإن $f(z)$ تساوي ثابت أيضاً.

الإثبات

ا أن $f(z)$ دالة ليلية R فان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ولكن u = α فان $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ .. أي أن $v = f_1(x)$

وكذلك $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ .. أي أن $v = f_2(y)$

ولا كن ذلك إلا إذا كان ثابت = v

وبالتا فإن ثابت = $f(z)$

ملاحظة:

والعكس صحيح أيضاً فإذا كانت (ثابت) v = α فإن $f(z)$ التحليلية ب أن تساوي ثابت أيضاً.

مثال ٢-١١

إذا كانت $f(z)$ دالة ليلية R وكان ثابت: $|f(z)| = \alpha$ فـإن $f(z)$ تـساوي ثابت أيضاً.

الإثبات

$f(z)$ دالة ليلية .. فلا بد أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ولكن $|f(z)| = \alpha \Leftarrow u^2 + v^2 = \alpha^2$

أي أن $u^2 = \alpha^2 - v^2$

وبالتا :

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} = -2v\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1)$$

$$2u\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2v\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (2)$$

بضرب (1) v فإن

$$uv\frac{\partial u}{\partial x} = -v^2\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (3)$$

بضرب (2) u فإن

$$uv\frac{\partial v}{\partial y} = -u^2\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (4)$$

ولكن باستعمال معادل كوشي-ر ان وطرح (3) من (4) فإن

$$\left(u^2 + v^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ولكن $u^2+v^2 = \alpha^2 \neq 0$ فإن $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ وبالتا فإن $u = f_1(x)$

كذلك فإن $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ أي أن $v = f_2(y)$

وبا ثل فإنه بضرب (1) u وضرب (2) v فإننا نصل إ

$$u^2\frac{\partial u}{\partial x} = -uv\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (5)$$

$$v^2\ \frac{\partial v}{\partial y} = -uv\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (6)$$

و مع (5) و (6) فإن

$$\left(u^2 + v^2\right)\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

أي أن $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .. وبالتا $u = f_3(y)$

كذلك بأن $\frac{\partial v}{\partial y}=0$ .. أي أن $v=f_4(x)$

ولا كن أن دث ذلك إلا إذا كان

$u=\alpha_1$ (ثابت)

$v=\alpha_2$ (ثابت)

أي أن $f(z)$ دالة ثابتة.

مثال ٢-١٢

إذا كانت $f(z)=u+iv$ دالة ليلية R وكان $w=v+iu$ دالة ليلية أيضاً .. فأثبت أن : $f(z)=\alpha$ ، ثابت: α.

الإثبات

$f(z)=u+iv$ دالة ليلية .. أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

وكذلك $w=v+iu$ دالة ليلية أيضا .. فلا بد أن

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (4)$$

من (1) و (4) فإن $2\frac{\partial v}{\partial y}=0$ .. أي أن $v=f_1(x)$

وكذلك $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ .. أي أن $u=f_2(y)$

من (2) و (3) فإن $2\frac{\partial u}{\partial y}=0$ .. أي أن $u=f_3(x)$

وكذلك $\frac{\partial v}{\partial x}=0$ .. أي أن $v=f_4(y)$

ولا يمكن أن يحدث ذلك إلا إذا كان

$u=\alpha_1$ (ثابت)

$v=\alpha_2$ (ثابت)

أي أن (ثابت) $f(z)=\alpha$.

مثال ٢-١٣:

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في R وكانت $f(z)$ دالة حقيقية فإن ذلك معناه أن $f(z)$ دالة ثابتة.

الإثبات:

كما هو معتاد فإن $f(z)$ دالة تحليلية فيجب أن يكون

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

ولكن $f(z)$ دالة حقيقية .. أي أن $v=0$

وبالتالي فإن $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ .. أي أن $u=f_1(y)$

وكذلك $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ .. أي أن $u=f_2(x)$

وهذا لا يمكن حدوثه إلا إذا كان $u=\alpha$ ثابت

أي أن $f(z)$ دالة ثابتة.

مثال ٢-١٤

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في R وكان $\overline{f(z)}$ أيضاً دالة تحليلية فإن ذلك لا يحدث الا اذا كانت $f(z)$ ثابتة.

الإثبات

$f(z) = u + iv$ دالة ليلية .. أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

وكذلك $\overline{f(z)} = u - iv$ دال ليلية .. فلا بد أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (4)$$

من (1) و (3) فإن $2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .. أي أن $u = f_1(y)$

وبالتا $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ .. أي أن $v = f_2(x)$

من (2) و (4) فإن $2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ .. أي أن $u = f_3(x)$

وكذلك $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ .. أي أن $v = f_4(y)$

ولا كن أن دث ذلك إلا إذا كان $u = \alpha_1$ و $v = \alpha_2$ أي أن $f(z)$ دالة ثابتة.

مثال ٢-١٥

إذا كانت $f(z)$ دالة ليلية وكان $|f(z)|$ دالة ليلية أيضاً .. فلا بد أن تكون $f(z)$ ثابتة.

الإثبات

$f(z) = u + iv$ دالة ليلية .. إذاً

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

والآن $|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$ دالة ليلية (وهي دالة حقيقية أيضاً) .. إذاً

$$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{u^2+v^2}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{u^2+v^2}=0$$

أي أن (ثابت) $\sqrt{u^2+v^2}=\alpha$

ومن ا ثال ٢-١١ حيث أن (ثابت) $|f(z)|=\alpha$ فإنه لابد أن يكون $u=\alpha_1$ و $v=\alpha_1$

أي أن $f(z)=\beta$.. أي دالة ثابتة.

مثال ٢-١٦

اثبت أن الدالة $f(z)=|z(z-1)|$

غ ليلية أي مكان.

الإثبات

ا أن $f(z)=u$ دالة حقيقية فقط

فإذا افترضنا أ ا دالة ليلية فإ ا ب أن تكون ثابتة طبقا ا أثبتناه مثال ٢-١٣ .. ولكن

$$|z(z-1)|=|z||z-1|$$
$$=\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

أي أن ا طلوب أن

ثابت $(x^2+y^2)[(x-1)^2+y^2]=\alpha^2$

ولا كننا أن نوجد علاقات ب x و y تفي ذه العلاقة ا اضية فإذا وضعنا ثابت = x^2+y^2 (علاقة دائرة) فإننا صل على علاقة دائرة أخرى ثابت = $(x-1)^2+y^2$ .. وهـذا تعـارض والعكـس أيـضا غـ كـن ولا نـستطيع ا ـاد علاقـة حقيقيـة يـث عـل $x^2+y^2=0$ أو $(x-1)^2+y^2=0$ .. وبالتا لا كن قيق هذه العلاقة .. وهذا تعارض أي أن $f(z)$ دالة غ ليلية .. وحيث أننا لا نستطيع إ اد ولو حالة واحدة .. فان الدالـة غـ ليلية أي مكان.

مثال ٢-١٧

إذا كانت $w = z^3$

فأوجد Δw , dw , $\Delta w - dw$

ا ل:

$$\begin{aligned}
\Delta w &= f(z+\Delta z) - f(z) \\
&= (z+\Delta z)^3 - z^3 \\
&= z^3 + 3z^2\Delta z + 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 - z^3 \\
\Delta w &= 3z^2\Delta z + 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3
\end{aligned}$$

وكذلك

$$w = z^3$$
$$dw = (3z^2)\, dz$$

وهي كما نلاحظ ا زء الأساسي علاقة Δw (حيث $\Delta z = dz$)

والآن

$$\begin{aligned}
\Delta w - dw &= 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 \\
&= (3z\,\Delta z + (\Delta z)^2)\,\Delta z \\
&= \in\ \Delta z
\end{aligned}$$

ونلاحظ أن $\in \to 0$ عندما $\Delta z \to 0$

وبالتا فإن $\dfrac{\Delta w - dw}{\Delta z} \to 0$ عندما $\Delta z \to 0$

وهذا يع أن $\Delta w - dw$ كميات منتهية الصغر ولكنها رتبة أعلى من Δz.

٢-٧ اشتقاق الدوال الأولية Derivatives of elementary functions

مازلنا نطلق على الدوال ا عتادة مثل z^n والدوال ا تسمى ا ثلثية والدوال الأسية والدالة اللوغاريتمية والدوال الزائدية ودوا ا العكسية أيضاً بالدوال الأولية .. ولا مفاجآت اشتقاق هذه الدوال حالة الدوال ا ركبة .. فجدول الاشتقاق مشابه اماً علوماتنا السابقة .. والأمثلة التالية فيها بعض الإثباتات.

مثال ٢-١٨

أثبت أن $\frac{d}{dz}\left(e^z\right)=e^z$

الإثبات:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\, e^{iy} = e^x\,(\cos y + i \sin y)$$

وبالتا فإن

$$u = e^x \cos y$$
$$v = e^x \sin y$$

وهى دالة ليلية (من اليس إثبات ذلك) ..

$$\begin{aligned}\frac{de^z}{dz} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\\ &= e^x \cos y + ie^x \sin y\\ &= e^x\left(\cos y + i\sin y\right)\\ &= e^x e^{iy}\\ &= e^z\end{aligned}$$

إذن $\frac{d}{dz}\left(e^z\right)=e^z$

مثال ٢-١٩

إثبت أن $\frac{d}{dz}\left(\sin z\right)=\cos z$

الإثبات:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} + ie^{-iz}\right) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$

$$= \cos z$$

إذن

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$$

مثال ٢-٢٠

أثبت أن $\frac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{z}$

الإثبات

$$\text{w} = \ln \text{z} \Rightarrow \text{z} = \text{e}^{\text{w}}$$

وبالتا فإن

$$\frac{dz}{dw} = e^{w} = z$$

وبالتا

$$\frac{d}{dz}\ln z = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\left(\frac{dz}{dw}\right)} = \frac{1}{z}$$

وهذه النتيجة صحيحة بغض النظر عن القيمة التفرعية للدالة $w = \ln z$ فهي صا ة لكل الفروع .. ولكن التفاضل غ موجود عند نقطة التفرع $(z = 0)$.

مثال ٢-٢١

اثبت أن $\frac{d}{dz}\sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$

الإثبات

من تعريف الدالة

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

وبالتا

$$\frac{d}{dz}\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}}.\left(i - \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{i}\frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}}.\frac{-z + i\sqrt{1 - z^2}}{\sqrt{1 - z^2}}$$

$$= \frac{1}{i(iz + \sqrt{1 - z^2})}.\frac{i(iz + \sqrt{1 - z^2})}{\sqrt{1 - z^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

وهذه القيمة للتفاضل صا ة لكل فروع الدالة.

مثال ٢-٢٢

اثبت أن $\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}\right) = \alpha\, z^{\alpha - 1}$ حيث $\alpha \in C$

الإثبات

بوضع الدالة

$$z^{\alpha} = e^{\ln z^{\alpha}} = e^{\alpha \ln z}$$

وبالتا

$$\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}\right) = \frac{d}{dz}e^{(\alpha \ln z)}$$

وبالتالي

$$\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}\right)=e^{\alpha \ln z}.\alpha\frac{1}{z}$$

$$=\alpha(z)^{\alpha}.\frac{1}{z}$$

$$=\alpha\, z^{\alpha-1}$$

إذن $$\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}\right)=\alpha\, z^{\alpha-1}$$

وهذا القانون صا لكل تفرعات الدالة إذا وجدت هذه التفرعات.

مثال ٢-٢٣

أوجد مشتقة $(z + 1)^{z-1}$

ا ل

ق لنا استعمال طرق الاشتقاق ال تدربنا عليها للدوال ا قيقية ففي هذه ا الة

نضع $w=(z+1)^{z-1}$

وبالتالي فإن $\ln w = (z-1).\ln(z+1)$

وبالتالي فإن $$\frac{1}{w}\frac{dw}{dz}=(z-1).\frac{1}{z+1}+\ln(z+1)$$

وبالتالي فإن $$\frac{dw}{dz}=w\left[\frac{z-1}{z+1}+\ln(z+1)\right].$$

أي أن $$\frac{d}{dz}(z+1)^{z-1}=(z+1)^{z-1}\left[\frac{z-1}{z+1}+\ln(z+1)\right]$$

حل أخر:

$$w=(z+1)^{z-1}=e^{\ln(z+1)^{z-1}}$$

$$=e^{(z-1)\ln(z+1)}$$

وبالتا :

$$\frac{dw}{dz}=e^{(z-1)\ln(z+1)}.\left[(z-1)\frac{1}{z+1}+\ln(z+1)(1)\right]$$
$$=w\left[\frac{(z-1)}{z+1}+\ln(z+1)\right]$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

ملاحظة هامة

كما سبق فإن تعريفات الدوال الأولية واشتقاقها يتبع نفس الشكل الذي تعارفنا عليه للدوال ا قيقية مع الأخذ الاعتبار طبيعة بعض الدوال ال هي عديدة القيم وتفاضلها أيضاً ر ا تكون دوال عديدة القيم فيجب الانتباه لذلك .. كما ب الانتباه دائما إ أن التفاضل غ موجود عند نقاط التفرع.

وا دول التا يوضح الدوال الأولية واشتقاقها.

1. $\frac{d}{dz}(C)=0$	16. $\frac{d}{dz}\cot^{-1}u=-\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dz}$
2. $\frac{d}{dz}u^n=nu^{n-1}\cdot\frac{du}{dz}$	17. $\frac{d}{dz}\sec^{-1}u=\pm\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dz}\begin{cases}+u>1\\-u<-1\end{cases}$
3. $\frac{d}{dz}\sin u=\cos u\cdot\frac{du}{dz}$	18. $\frac{d}{dz}\csc^{-1}u=\mp\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dz}\begin{cases}-u>1\\+u<-1\end{cases}$
4. $\frac{d}{dz}\cos u=-\sin u\cdot\frac{du}{dz}$	19. $\frac{d}{dz}\sinh u=\cosh u\cdot\frac{du}{dz}$
5. $\frac{d}{dz}\tan u=\sec^2 u\cdot\frac{du}{dz}$	20. $\frac{d}{dz}\cosh u=\sinh u\cdot\frac{du}{dz}$
6. $\frac{d}{dz}\cot u=-\csc^2 u\cdot\frac{du}{dz}$	21. $\frac{d}{dz}\tanh u=\operatorname{sech}^2 u\cdot\frac{du}{dz}$
7. $\frac{d}{dz}\sec u=\sec u\tan u\cdot\frac{du}{dz}$	22. $\frac{d}{dz}\coth u=-\operatorname{csch}^2 u\cdot\frac{du}{dz}$
8. $\frac{d}{dz}\csc u=-\csc u\cot u\cdot\frac{du}{dz}$	23. $\frac{d}{dz}\operatorname{sech} u=-\operatorname{sech} u\tanh u\cdot\frac{du}{dz}$
9. $\frac{d}{dz}\log_a u=\frac{\log_a e}{u}\frac{du}{dz},a>0,a\neq 1$	24. $\frac{d}{dz}\operatorname{csch} u=-\operatorname{csch} u\coth u\cdot\frac{du}{dz}$
10. $\frac{d}{dz}\log_a u=\frac{d}{dz}\ln u=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dz}$	25. $\frac{d}{dz}\sinh^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{du}{dz}$
11. $\frac{d}{dz}a^u=a^u\ln a\cdot\frac{du}{dz}$	26. $\frac{d}{dz}\cosh^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dz}$
12. $\frac{d}{dz}e^u=e^u\cdot\frac{du}{dz}$	27. $\frac{d}{dz}\tanh^{-1}u=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dz},\lvert u\rvert<1$
13. $\frac{d}{dz}\sin^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dz}$	28. $\frac{d}{dz}\coth^{-1}u=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dz},\lvert u\rvert>1$
14. $\frac{d}{dz}\cos^{-1}u=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dz}$	29. $\frac{d}{dz}\operatorname{sech}^{-1}u=-\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dz}$
15. $\frac{d}{dz}\tan^{-1}u=\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dz}$	30. $\frac{d}{dz}\operatorname{csch}^{-1}u=-\frac{1}{u\sqrt{u^2+1}}\cdot\frac{du}{dz}$

(جدول ٢-١)

٢-٨ النقاط الشاذة Singular Points

النقاط ا تفشل عندها $f(z)$ أن تكون دالة ليلية يقال عليهـا نقـاط شـاذة Singular Points .. وهذا عرض موجز بأنواع النقاط الشاذة:

٢-٨-١ الشواذ ا عزولة Isolated Singularities

إذا ما استطعنا إ اد $0 < \delta$ يث لا توي الدائرة $|z-z_0|=\delta$ إلا نقطـة شـاذة واحدة للدالة $f(z)$ عند $z=z_0$ .. فإن $z=z_0$ يقال عليها بالنقطة الشاذة ا عزولة Isolated Singularity.

وعلى النقيض من ذلك (إذا توي الدائرة $|z-z_0|=\delta$ أي نقاط شاذة) يقال على النقطة $z=z_0$ بالنقطة العادية أو ا نتظمة Ordinary Point.

٢-٨-٢ نقاط التفرع Branch Points

وهي نقاط شاذة للدوال ذات القيم ا تعددة multi-valued functions وهي نقاط عامة ميع تفرعات الدالة branches وعندها تكون الدالة غ ليلية لكل التفرعات .. على سبيل ا ثال

(i) $f(z)=(z-2)^{\frac{1}{n}}, n\in N^+$ .. عند $z = 2$

(ii) $f(z) = \ln(z - 3 + i)$ .. عند $z = 3-i$

(iii) $f(z) = \ln(z^2 - 1)$ .. عند $z = \pm 1$

٢-٨-٣ الشواذ الاعتباريون Removable Singularities

وهي تلك النقاط ا للدالة $f(z)$ اية عندها .. أي أن

إذا كان $\exists \lim_{z\to z_0} f(z)$

فإن $z = z_0$ وإن كانت تبدو شاذة الا أنه كن تعريف الدالة بقيمة النهايـة عنـد $z = z_0$ وبالتا نكون قد أزلنا هذا الشذوذ ولذلك فالشذوذ هنا كن أن يكون اعتبارياً فقط .. على سبيل ا ثال

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1 \quad , \quad \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z}=0,$$

٢-٨-٤ الأقطاب Poles

وهي نوع يز من النقاط الشاذة وأكثرها استعمالا وخاصة نظريات التكامل القادمة .. وتعرف كالآ :

تعريف .. القطب Pole

إذا كان $\lim (z-z_0)^m f(z) = A \neq 0$ حيث $m\in N^+$ و A عدد دود.

فإن $z = z_0$ يقال عليه قطب من الرتبة m.

و حالة m=1 فإن القطب يطلق عليه عادةً قطباً يس أ a simple pole.

مثال ٢-٢٤

الدالة $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-3)^3}$

ا نقطتان شاذتان من نوع القطب .. (أو بيسر أكثر ا قطبان)

القطب الأول عند z=1 من النوع اليس (لأن $\lim\limits_{z\to 1}(z-1)f(z)\neq 0$)

والقطب الثا عند z=3 ومن الرتبة الثالثة (لأن $\lim\limits_{z\to 3}(z-3)^3 f(z)\neq 0$)

لاحـــظ أن $\lim\limits_{z\to 3}(z-3)f(z)\to\infty$ وأن $\lim\limits_{z\to 3}(z-3)^2 f(z)\to\infty$ وبالتـــا فالرتبة هنا من الرتبة الثالثة.

٢-٨-٥ الشواذ الأساسية Essential Singularities

النقطة الشاذة ال ليست قطباً أو نقطة تفرع أو نقطة شاذة اعتبارية يقال عليها نقطة شاذة أساسية essential singularity .. على سبيل ا ثال

$f(z)=\ln\dfrac{1}{z-2}$ عند $z = 2$ .. أو $f(z)=e^{\frac{1}{z-i}}$ عند $z = i$ .. وهكذا

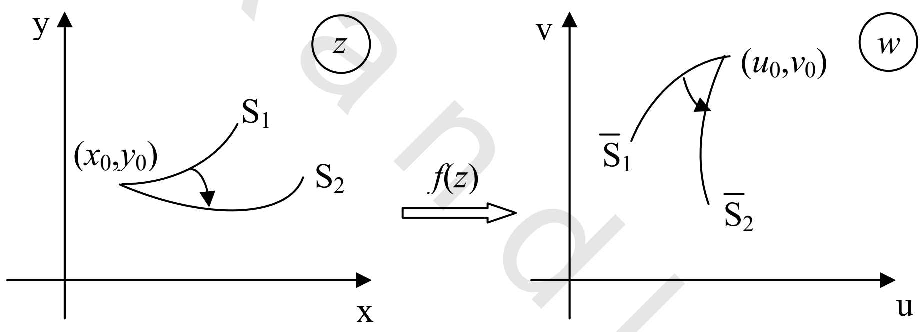
فهذه النقاط لا كن إزالتها كما إ ا ليست أقطاباً وليست نقاط تفرع .. فهي بالتا نقـاط شاذة أساسية.

٢-٩ التحويل ا افظ Conformal mapping

تلعب ليلية الدالة $f(z)$ دوراً هاماً هذا النوع من التحويل

تعريف: التحويل ا افظ

لنفرض أن $f(z)$ ول النقطة (x_0,y_0) مستوى z إ النقطة (u_0,v_0) مستوى w كما هو واضح بالشكل (٢-١) وأن ا نحنـيا تقـاطع عنـد (x_0,y_0) ، S_1 و S_2 يتحولان ا ا نحن ا ناظرين ا تقاطع عند (u_0,v_0) ؛ $\bar{S}_1$ وَ $\bar{S}_2$ (كما هو مب بشكل ٢-١)



(شكل ٢–١)

فإن التحويل يسمى افظاً إذا ما حافظ على الزاوية ب ا نحني ا قدار وا س magnitude and sense.

وبالطبع يعلم القارئ أن الزاوية ب ا نحني هي الزاوية ب ا ماس ذين ا نحني عند نقطة التقاطع .. وأن ا افظة على الزاوية من حيث ا س معناه أن ا اه الدوران من منحـ إ آخر لا يتغ عند التحويل .. والتحويل الذي افظ على ا قدار فقط ولا افظ على ا ـس هـو ويل غ افظ isogonal mapping.

عارض –٣

التحويل من مستوى z إ مستوى w يكـون أحاديـا one-to-one (النقطـة الواحدة ا ستوى z تتحول ا نقطة وحيدة مستوى w والعكس صـحيح) إذا كانـت $f(z)$ دالة ليلية وكان معامل التحويل (ا اكوبيان Jacobian)

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

والنقاط ال عندها J = 0 تسمي نقاط حرجة.

عارض – ٤

حالة كون $f(z)$ دالة ليلية فإن $J = \left|\bar{f}(z)\right|^2$

الإثبات

دع f(z) = u + iv دالة ليلية R

أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

وهي معادلات كوشي-ر ان متحققة نفس ا نطقة R.

وبالتا فإن

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_y & u_y \\ -u_y & v_y \end{vmatrix} = v_y^2 + u_y^2$$

ولكن $\bar{f}(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

أي أن $\left|\bar{f}(z)\right|^2 = v_y^2 + u_y^2$

أي أن $J=\left|\bar{f}(z)\right|^2$

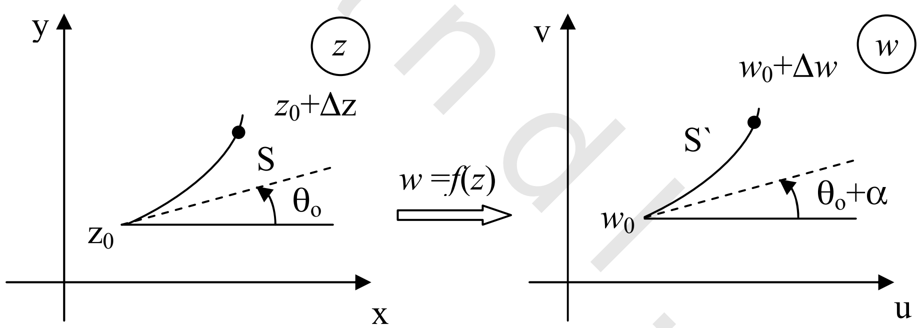
نظرية ٢-٦

التحويل ا افظ Conformal Mapping

إذا كانت $f(z)$ دالة لميلية $\left(\bar{f}(z)\neq 0\right)$ منطقة R مستوى z فإن التحويل $w=f(z)$ يكون ويلاً افظاً.

الإثبات:

سنثبت أولاً أنه ت هذا التحويل فإن ا ماس للمنحى S عند النقطة $z=z_0$ مستوى z يدور بزاوية $Arg\left(\bar{f}(z_0)\right)$ مستوى w (شكل ٢-٢)



(شكل ٢-٢)

عند انتقال النقطة من z_0 ا $z_0+\Delta z$ على ا نحى S فإن النقطة w_0 تنتقل ا $w_0+\Delta w$ على ا نحى `S كما هو مب بشكل (٢-٢) .. فإذا كان $z=z(t)$ هو ا نحى البارامتري مستوى z فإن $w=w(t)$ هو ا نحى البارامتري مستوى w.

وبالتا فإن متجه ا ماس مستوى z هو $\frac{dz}{dt}$ وكذلك متجه ا ماس م ستوى w ه و $\frac{dw}{dt}$ .. أي أن

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \bar{f}(z)\frac{dz}{dt}$$

وذلك عند z_0 و w_0 أي أن

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{w=w_0} = \bar{f}(z_0)\left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0}$$

وبكتابة $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{w=w_0}$ بصور قطبية وكذلك $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0}$

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{w=w_0} = \rho_o e^{i\phi_o}, \bar{f}(z) = \mathrm{R}e^{i\alpha}, \left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0} = r_o e^{i\theta_o}$$

فإننا سنجد أن

$$\rho_o e^{i\phi_o} = \mathrm{R}e^{i\alpha} . r_o e^{i\phi_o}$$

وبالتا

$$\rho_o = Rr_o$$

$$\phi_o = \alpha + \theta_o$$

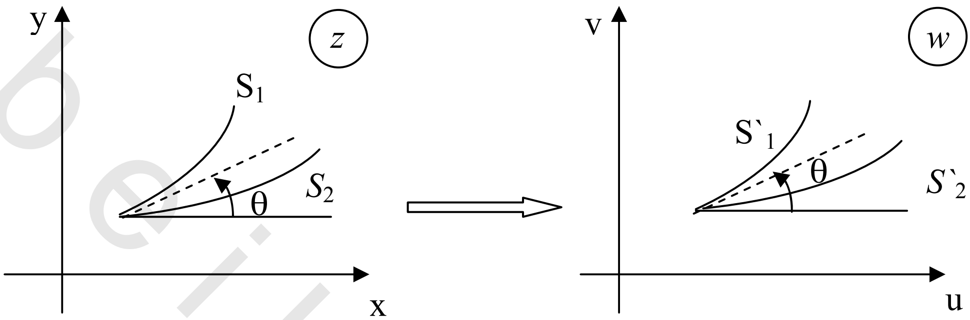
$$= \theta_o + \arg \bar{f}(z_0)$$

وبالتا فإن

$$\boxed{\phi_o = \theta_o + \arg \bar{f}(z_0)}$$

فالزاوية ا ديدة هي الزاوية القد ة مضافة إليها زاوية دة α وهذا رد دوران.

والآن إذا كان هناك منحنيان S_1 و S_2 بينهما زاوية θ مستوى z ودار كل منهما مستوى w بنفس الزاوية α فإن الزاوية بـ ا لمنحني ستظل θ، (شكل ٢-٣)



(شكل ٢-٣)

عارض – ٥

إذا كانت $w = f(z) = u + iv$ دالة تحليلية بحيث يكون $u = \alpha, v = \beta$ تكون شبكة من المنحنيات (الخطوط) المتعامدة مستوى w فإن المنحنيات المناظرة لها مستوى z تكون منحنيات متعامدة أيضاً.

الإثبات:

بما أن $f(z)$ دالة تحليلية .. أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

والآن على المنحنى $u(x, y) = \alpha$ و المنحنى $v(x, y) = \beta$ مستوى z (شكل٢-٤) فإن:

$$du = 0$$

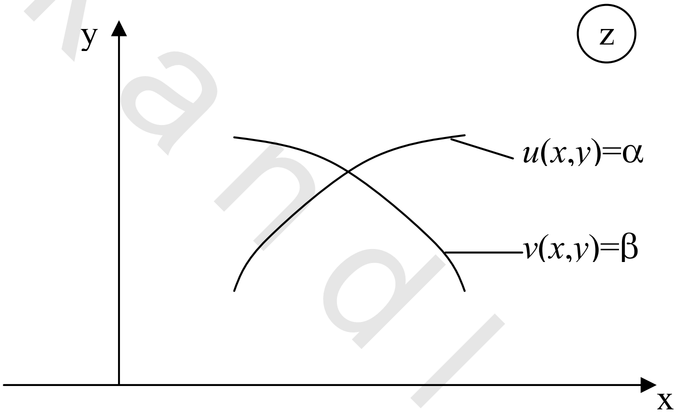
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (3)$$

كذلك $dv = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (4)$$

من (3) فإن $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$: ميل المنحنى $u(x, y)=\alpha$

ومن (4) فإن $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}$: ميل المنحنى $v(x,y)=\beta$



(شكل ٢-٤)

وبالتالي فإن حاصل ضرب الميلين (مع استعمال (١)، (٢))

$$\frac{u_x}{u_y}.\frac{v_x}{v_y}=\frac{v_y}{u_y}.\frac{-u_y}{v_y}=-1$$

أي أن المنحنيان يكونا متعامدين.

٢-٩-١ بعض الأمثلة على التحويل ا افظ Some Examples on Conformal Mapping

٢-٩-١-١ التحويل الانتقا Translation

ويأخذ الصورة $w = z + \beta \quad , \quad \beta \in C$

تنتقل الأشكال مستوى z إ أشكال مناظرة مستوى w ا اه ا تجه β.

مثال ٢-٢٥:

ا ور التخيلي مستوى z ينتقل إ خط رأسي مستوى w.

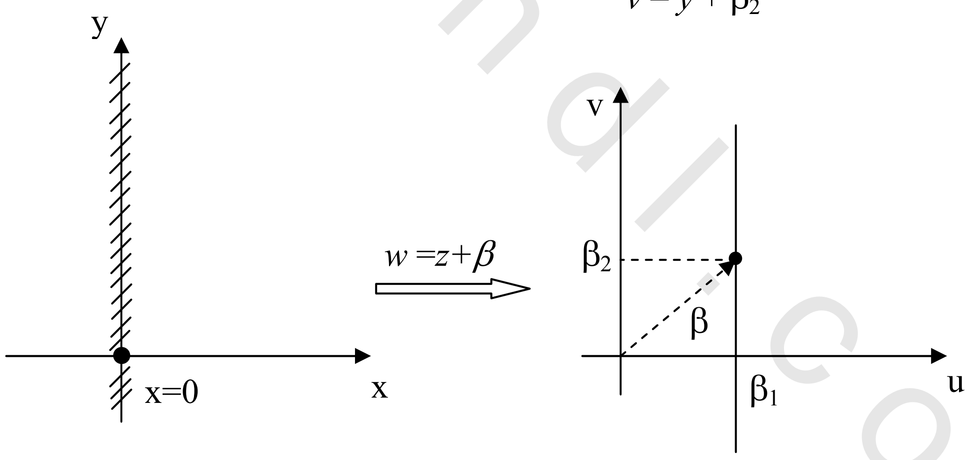
الإثبات:

ا ور التخيلي هو $x = 0$

ولكن $u + iv = (x + iy) + \beta_1 + i\,\beta_2$

إذن

$$u = \beta_1$$
$$v = y + \beta_2$$



(شكل ٢-٥)

٢-٩-١-٢ التحويل التدويري Rotation

وبأخذ الصورة

$$w = e^{i\theta_o} z \quad , \quad \theta_o \in \Re$$

وبذلك تدور الأشكال مستوى z ا نظ ا مستوى w بزاوية θ_o .. وا اه الـدوران يتبع زاوية θ_o.

مثال ٢-٢٦

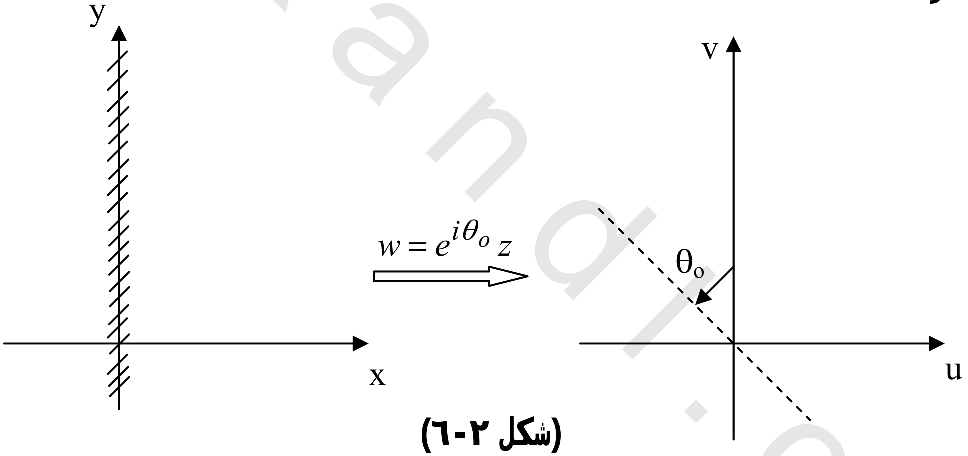
ا ور التخيلي مستوى z ينتقل إ خط مائل بزاوية $\theta_o + \frac{\pi}{2}$.

الإثبات

$$w = e^{i\theta_o} z$$

والآن ا ور التخيلي
$$z = r\, e^{i\frac{\pi}{2}}$$

وبالتا
$$w = r\, e^{i\left(\theta_o + \frac{\pi}{2}\right)}$$



(شكل ٢-٦)

٢-٩-١-٣ ا ـط Stretching

وبأخذ الصورة $w = \text{a}\, z \quad , \quad \text{a} \in \Re$

أي أن
$$u = \text{a}\, x$$
$$v = \text{a}\, y$$

وكما هو واضح فإن a ثل معامل تكب magnification إذا كانـت $\text{a} > 1$ ومعامـل تصغ إذا كانت $0<\text{a}<1$

مثال ٢-٢٧

الدائرة $|z| = 1$ تنتقل إ الدائرة $|w| = \text{a}$ عندما يكون $w = a\,z$ و $a > 0$.

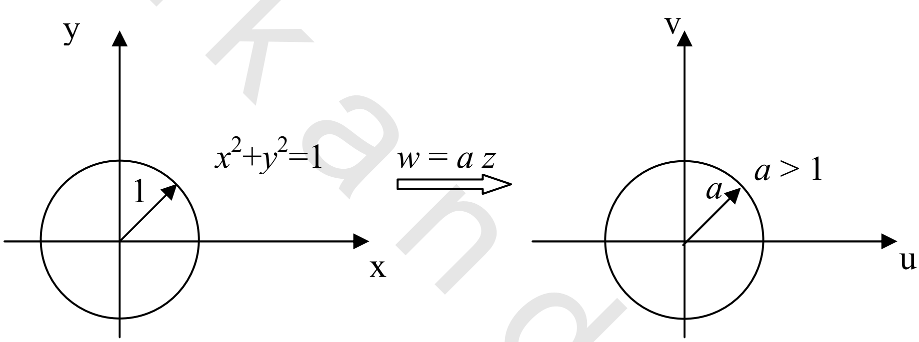
الإثبات

مستوى z $\quad x^2 + y^2 = 1$

وكذلك $\quad u = a\,x \quad , \quad v = a\,y$

أي أن $\quad u^2 + v^2 = \text{a}^2(x^2+y^2) = \text{a}^2$

أي دائرة نصف قطرها a .. (شكل ٢-٧).



(شكل ٢-٧)

٢-٩-١-٤ العكس Inversion

وتأخذ الصورة $\quad w = \dfrac{1}{z}$

مثال ٢-٢٨

الدائرة $|z| = r$ تنتقل ا دائرة $|w| = \dfrac{1}{r}$

والقرص $|z| < 1$ تنتقل إ خارج القرص $|w| > 1$

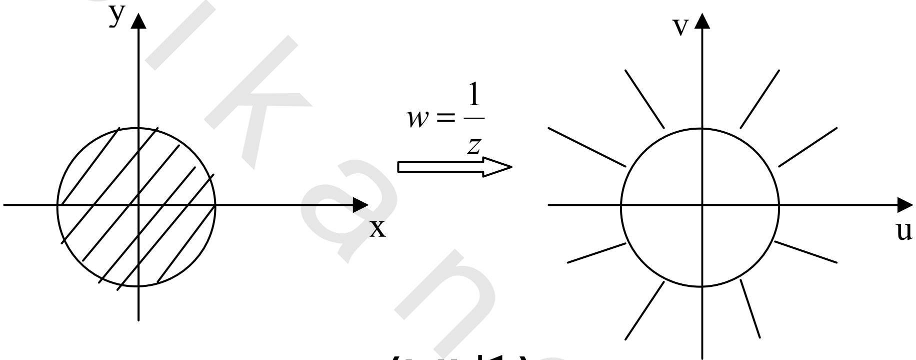
الإثبات

الإثبات مباشر لأن

$$|w| = \frac{1}{|z|}$$

فبالتا إذا كان $|z| = r$ فإن $|w| = \frac{1}{r}$

وإذا كان $|z| < 1$ فإن $|w| > 1$ كما هو مب بشكل (٢-٨)



(شكل ٢-٨)

وهذا يعطي مع العكس (عكس الأشكال).

٢-٩-١-٥ التحويل ا طي Linear Transformation

ويأخذ الصورة $w = \alpha z + \beta$

أي أن

$$w = \alpha\left(z + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$= ae^{i\theta_o}\left(z + \frac{\beta}{\alpha}\right) \quad , \quad \alpha = ae^{i\theta_o}$$

$$= e^{i\theta_o}\left(az + \frac{a\beta}{\alpha}\right)$$

وهذا يع أن هذا التحويل هو مزيج من ا ط (a z) و الانتقال $\left(az+\frac{a\beta}{\alpha}\right)$ الـ دوران $e^{i\theta_o}\left(az+\frac{a\beta}{\alpha}\right)$. وهو بذلك افظ على الأشكال كما بيننا الباب الأول من هـ ذا الكتاب .. ويعت هذا إثبات أخر ذه ا سألة.

٢-٩-١-٦ مزدوج ا طية Bilinear Transformation

ويأخذ الصورة $w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$

حيث $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

وهذا التحويل افظ على شكل الدوائر (ا فيها ا ستقيمات الـ هي دوائر ذات نصف قطر لا ائي) .. وهي أيضاً مزيج من ا ط والانتقال والدوران والعكس.

مثال ٢-٢٩

التحويل ا زدوج ا طية هو مزيج من ا ط والانتقال والدوران والعكس.

الإثبات

بإعادة كتابة w كالآ :

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma z+\delta)}$$

حيث $\beta\gamma - \alpha\delta \neq 0$ .. وبالتا فإن $\gamma z + \delta$ ثل مط وانتقال وبالتا فإن $\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma z+\delta}$ ثل عكس ودوران وإضافة $\frac{\alpha}{\gamma}$ ثل انتقال آخر.

مثال ٢-٣٠

التحويل ا زدوج ا طية افظ على شكل الدوائرعلما بأن ا عادلة العامة للـ دائرة مستوى z هو $Az\bar{z}+Bz+\bar{B}\bar{z}+C=0$

حيث $A, C \in \Re^{+}$ و $B \in C$

و حالة $A=0$ تصبح ا عادلة معادلة خط مستقيم.

الإثبات:

لو أخذنا هذه ا عادلة العامة للدائرة واستعملنا "العكس" $w=\frac{1}{z}$ أي أن $z=\frac{1}{w}$

فإن

$$A\frac{1}{w}.\frac{1}{\overline{w}}+B\frac{1}{w}+\overline{B}\,\frac{1}{\overline{w}}+C=0$$

$$A+B\overline{w}+\overline{B}w+Cw\overline{w}=0$$

وهي بشكل عام معادلة دائرة أيضاً مستوى w .. وكذلك لو استعملنا علاقـة الـدوران $w=e^{i\theta_0}z$ .. أو استعملنا علاقة الانتقال $w=z+\beta$ أو علاقـة ا ـط $w=az$ ..

فجميعها توصل ا معادلة دائرة مستوى w.

وبالتا فتحويل مزدوج ا طية والذي هو مزيج من ذلك كله افظ على الشكل الدائري.

مثال ٢-٣١

أثبت أن ويل مزدوج ا طية ول ثلاث نقاط بعينها مستوى z (ولـيكن z_1, z_2, z_3) إ ثلاث نقاط بعينها مستوى w (وليكن w_1, w_2, w_3) على الترتيب ا فيهـا النقطة عند ∞.

الإثبات:

على ضوء ا ثال ٢-٢٩ فإن

$$w=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma z+\delta)}$$

وبالتا فإن

$$z_1\to w_1:\quad w_1=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma z_1+\delta)}\qquad(1)$$

$$z_2\to w_2:\quad w_2=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma z_2+\delta)}\qquad(2)$$

$$z_3\to w_3:\quad w_3=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma z_3+\delta)}\qquad(3)$$

$$z_4\to w_4:\quad w_4=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma z_4+\delta)}\qquad(4)$$

وبالتا   فإن

$$w_1-w_2=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma z_1+\delta}-\frac{1}{\gamma z_2+\delta}\right)$$

$$=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\frac{\gamma(z_2-z_1)}{(\gamma z_1+\delta)(\gamma z_2+\delta)} \quad (5)$$

وبا ثل

$$w_2-w_3=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\frac{\gamma(z_3-z_2)}{(\gamma z_2+\delta)(\gamma z_3+\delta)} \quad (6)$$

ولو هناك نقطة رابعة $w_4 \to z_4$ فإن

$$w_1-w_4=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\frac{\gamma(z_4-z_1)}{(\gamma z_1+\delta)(\gamma z_4+\delta)} \quad (7)$$

$$w_3-w_4=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\frac{\gamma(z_4-z_3)}{(\gamma z_3+\delta)(\gamma z_4+\delta)} \quad (8)$$

ونلاحظ الآ :

$$\frac{(w_1-w_4)(w_2-w_3)}{(w_1-w_2)(w_3-w_4)}=\frac{(z_4-z_1)(z_3-z_2)}{(z_2-z_1)(z_4-z_3)}$$

$$=\frac{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}$$

أي أن النسبة $\frac{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}$ لا تتغ   ت التحويل مزدوج ا طية وهي لذلك تسمي بالنسبة الضربية Cross ratio. وهي خاصية من خواص   ويل مزدوج ا طية.

وحيث أن التحويل به أربع   اهيل $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ وهناك علاقة ثابتة لا يوجد فيها هذه البارامترات .. وبالتا   فمن ا مكن   ويل ثلاث نقاط ا   ثلاث أخرى بشكل فريد .. فباعتبار النقطة الرابعة نقطة عامة $w_4=w,\ z_4=z$ فإن

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_1-w_2)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_1-z_2)}=\text{cross ratio}$$

وبالتا   فبحل ا عادلة w صل على ا عادلة ا طلوبة.

مثال ٢-٣٢

أوجد مزدوج ا طية ال تنقل النقاط $z = i, 1, 0$ إ $w = 0, -i, -1$ بالترتيب.

ا ل

باستخدام النسبة الضربية فإن

$$\frac{(w-0)(-i+1)}{(w+1)(+i)} = \frac{(z-i)(1)}{(z-0)(i-1)}$$

$$w(1-i)^2 z = (w+1)(-i)(z-i)$$

$$w\left((1-i)^2 z + i(z-i)\right) = (-i)(z-i)$$

$$w(-2iz + iz + 1) = -i(z-i)$$

$$\boxed{w = \frac{-iz-1}{-iz+1}}$$

مثال ٢-٣٣

اثبت أن التحويل $w = e^{i\theta}\left(\frac{z-z_o}{z-\bar{z}_o}\right)$ ول نصف ا ستوى العلوي مستوى z إ القرص الدائري $|w|<1$ يث يتحول ا ور الأفقي إ الدائرة $|w|=1$. حيث z_0 أي نقطة معلومة نصف ا ستوى العلوي مستوى z.

الإثبات:

ا أن

$$w = e^{i\theta}\frac{(z-z_o)}{(z-\bar{z}_o)}$$

فإن

$$|w| = \left|e^{i\theta}\right|\frac{|z-z_o|}{|z-\bar{z}_o|}$$

ولكن $|e^{i\theta}| = 1$ .. بالتا

$$|w| = \frac{|z-z_o|}{|z-\bar{z}_o|}$$

وبوقوع z_0 النصف العلوي من مستوى z .. فإن $\bar{z}$ تكون النصف الأسفل وبالتا فإن $|z-\bar{z}_0|<|z-z_0|$ و دث التساوي عندما تقع z_0 على ا ور ا قيقي (وبالتا $\bar{z}_0$ أيضاً) .. وبذلك يثبت ا طلوب.

مثال ٢-٣٤

أثبت أن التحويل $|\alpha|<1, w=e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}$

ول (i) $|z|=1$ إ $|w|=1$

(ii) القرص $|z|<1$ إ القرص $|w|<1$

الإثبات:

(i) بوضع $z=e^{i\psi}$ و $\alpha=be^{i\lambda}$, $b<1$

بالتا

$$|w|=\left|e^{i\theta}\right|\frac{|z-\alpha|}{|\overline{\alpha}z-1|}$$

$$=\frac{\left|e^{i\psi}-be^{i\lambda}\right|}{\left|be^{-i\lambda}e^{i\psi}-1\right|}$$

أي أن

$$|w|^2=\frac{(\cos\psi-b\cos\lambda)^2+(\sin\psi-b\sin\lambda)^2}{(b\cos(\psi-\lambda)-1)^2+b^2\sin^2(\psi-\lambda)}$$

$$=\frac{1+b^2-2b\cos(\psi-\lambda)}{1+b^2-2b\cos(\psi-\lambda)}$$

$$=1$$

إذن $|w|=1$

(ii) بوضع $z=r\,e^{i\psi}$, $r<1$ فإن

$$|w|^2 = \frac{r^2 + b^2 - 2rb\cos(\psi - \lambda)}{r^2b^2 + 1 - 2rb\cos(\psi - \lambda)} = \frac{A}{B}$$

والآن

$$B-A = r^2b^2 + 1 - r^2 - b^2$$
$$= (1-r^2)(1-b^2) \quad , \quad r < 1 \quad , \quad b < 1 > 0$$

أي أن $B > A$

وبالتا فإن $|w|^2 < 1 \Rightarrow |w| < 1$

٢-٩-١-٧ النقاط الثابتة Fixed Points

النقاط ال افظ على العلاقة $w = z$ تسمى بالنقاط الثابتة للتحويل Fixed Points of Transformation

مثال ٢-٣٥

أوجد النقاط الثابتة للتحويل $w = \dfrac{2z-5}{z+4}$

ا ل

بوضع $w = z$ فإن

$$z = \frac{2z-5}{z+4}$$

أي أن $z^2+4z=2z-5$

أي أن $z^2+2z+5=0$

وهذه ا عادلة تعطي النقطتان $z_1 = -1 + 2i$

$z_2 = -1 - 2i$

رينات –٢

(١) أثبت أن اشتقاق الدوال الأولية كم هو مب جدول ٢-١ ص ٥٤.

(٢) أثبت أن الدالة $f(z) = |z|^2$ دالة غ ليلية أي مكان.

(٣) أثبت أن الدالة $w = f(\bar{z})$ دالة غ ليلية أي مكان.

(٤) أثبت أن $u = 2x(1-y)$ دالة توافقية أوجد مرافقتها والدالة $f(z)$ واشتقاقها $\bar{f}(z)$

(الإجابة $f(z) = iz^2 + 2z$)

(٥) إذا كانـت $u = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$ فأوجـد $\bar{f}(z)$ حيـث $f(z) = u + iv$.

(٦) تأكد من أن الدوال الآتية ليلية كل مكان

$$f(z) = e^{z^2} \qquad \text{(i)}$$

$$\cos z^2 \qquad \text{(ii)}$$

(٧) بدل الدالة u بأحد الدوال الآتية وأعد ا طلوبات ا سألة (٤)

$$u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2 \qquad \text{(i)}$$
$$u = 2xy + 3xy^2 - 2y^3 \qquad \text{(ii)}$$
$$u = x\,e^x \cos y - y\,e^x \sin y \qquad \text{(iii)}$$

(٨) إذا كانت $v = -e^{-2xy} \cos (x^2 - y^2)$ أوجد مرافقتها والدوال $f(z)$ و $\bar{f}(z)$.

(٩) أثبت أن $\frac{d}{dz}\left(e^z \sin z\right) = e^z (\cos z + \sin z)$

باستخدام $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}$

(١٠) أثبت أن $\frac{d}{dz} \ln f(z) = \frac{\bar{f}(z)}{f(z)}$

(١١) أوجد قيمة a ال عل $w = \frac{az - 1}{z - i}$ ول دائرة الوحـدة $|z| = 1$ ا الـدائرة $|w| = R$.

(الإجابة: $R = 1$ و $a = -i$)

(١٢) أوجد ويل مزدوج ا طية الذي ول النقاط $(-i,0,i)$ ا $(-1,i,1)$

(الإجابة: $w = \frac{z-1}{i(z+1)}$)

(١٣) أوجد التحويل $w = e^{i\theta}\dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ الـ ـول $z = i$ | $w = 0$ وكـذلك $z = \infty$ | إ $w = -1$. (الإجابة: $w = \dfrac{i - z}{i + z}$)

(١٤) أثبت أن $z = \dfrac{2a}{\pi}\ln\dfrac{1 + w}{1 - w}$ ول الشر ة الأفقيـة ا ـصورة بـ $y = a$ و $y = -a$ | إ داخل دائرة الوحدة $|w| = 1$.

(١٥) أثبت أن $w = z + \dfrac{1}{z}$ ول

(i) ا ط $\arg z = a$ حيث $|a| < \dfrac{\pi}{2}$ | إ قطع زائد مستوى w.

(ii) $|z| > 1$, $y > 0$ | إ ا نطقة $v > 0$.

(١٦) اثبت أن $w = \cosh z$ دالة ليلية ومن أوجد صورة ا ستطيل ا ـدود بـ ـ $x = 0, a$ و $y = 0, b$.

(١٧) أوجد مشتقات الدوال الآتية:

(i) $f(z) = \left(\sin^{-1}(2z - 1)\right)^2$ (ii), $f(z) = \ln\left(z - \dfrac{3}{2} + \sqrt{z^2 - 3z + 2i}\right)$

الإجابة (i) $2\sin^{-1}(2z - 1)/\sqrt{z - z^2}$ (ii), $\dfrac{1}{\sqrt{z^2 - 3z + 2i}}$

(١٨) أوجد ا شتقة الثانية للدوال:

(i) $f(z) = \sinh (z + 1)^2$

(ii) $f(z) = (z)^{z+i}$

(١٩) أوجد النقاط الشاذة للدوال

(i) $\dfrac{\ln(z + 3i)}{z^2}$ $(z = 0, z = -3i)$

(ii) $\sin^{-1}\dfrac{1}{z}$ $(z = 0)$

(iii) $\sqrt{z(z^2 + 1)}$ $(z = 0, \pm i)$

(٢٠) إذا كانت $f(z) = u + iv$ فاثبت أن

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, -i\frac{z}{2}\right) + C \qquad \text{(i)}$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z}{2}, -i\frac{z}{2}\right) \qquad \text{(ii)}$$

(٢١) أوجد الدالة التحليلية $f(z)$ والا قق أن $\mathrm{Re}\left(\bar{f}(z)\right) = 3x^2 - 4y - 3y^2$

و $f(1 + i) = 0$ الإجابة $(f(z) = z^3 + 2iz^2 + 6 - 2i)$

(٢٢) إذا كانت $w = f(z)$ دالة ليلية الصورة القطبية (r,θ) فأثبت أن

$$\frac{dw}{dz} = e^{-i\theta}\frac{\partial w}{\partial r}$$

(٢٣) إذا كانت $f(z) = u + iv$ دالة ليلية فأثبت أن:

$$w = \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

دالة ليلية أيضاً.

(٢٤) أوجد معادلا كوشي-ر ان لنظام ا اور (ρ, η)

حيث $y = e^{\rho}\sinh\eta \quad , \quad x = e^{\rho}\cosh\eta$

(٢٥) إذا كانت معادلة الشحنة دائرة كهربية خطية مكونة من مصدر للجهد الكهر $E_o\cos wt$ ومقاومة R ومكثف C و انعة L هي

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = E_O\cos wt$$

أثبت أن حل هذه ا عادلة هو $Q = \mathrm{Re}\left\{\dfrac{E_O e^{iwt}}{iw\left(R + i\left(wL - \dfrac{1}{wC}\right)\right)}\right\}$

مساعدة: كنك إعادة كتابة الطرف الأ ن من ا عادلة كالآ $E_o\, e^{iwt}$ وأفترض أن ا ل صورة Ae^{iwt} أوجد A.

- - - - - - - - - - - - - -