الباب الأول

دوال المتغير المركب – النهايات – الاستمرار
Functions of Complex variables, limits, continuity

١-١ مقدمة Introduction:

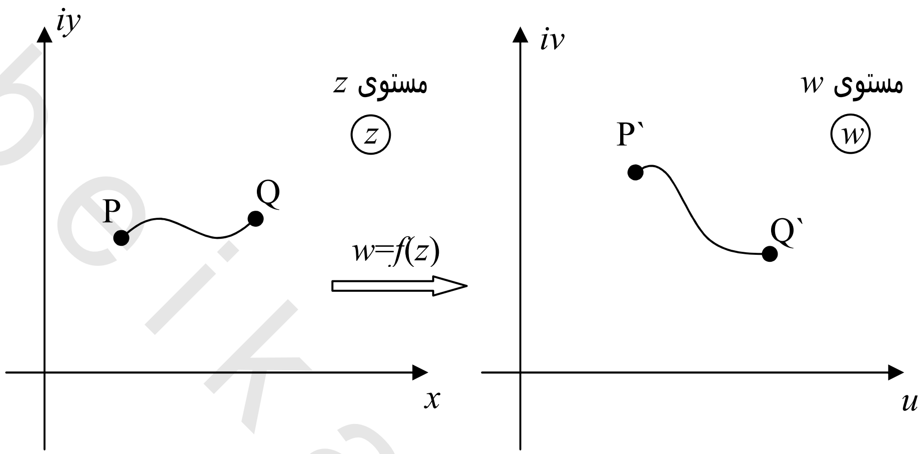
إن تعريف العدد التخيلي imaginary number i والذي قيمته $\sqrt{-1}$ فـتح ا ال لتوسيع ال الأعداد ا قيقية $\Re$ إ الأعداد ا ركبة Z (ملحـق أ) حيـث $\alpha,\beta\in\Re$, $z=\alpha+i\beta$ وصنع هذا ما يسمى با تغ ا ركب.
إذا كانت (x, y) نقطة عامة مستوى يسمى ستوى ا تغ ا ركب أو با ستوى ا ركب وكان $z=x+iy$ وهو مستوى غ موجود لأن هياكل الإسناد فيه إحـدا ا حقيقي (وهو ور x) والآخر يلي (وهو iy) .. فهذا ا ستوى موجود خيـال الرياضي فقط مثله مثل الفراغات ال أبعادها أكثر من ثلاثة حيث لا كن ثيلـها هندسياً بشكل كن يله .. ولكن بالاستغراق هذا ا يال اكتشفنا عا اً جديـداً .. كأنه الأحلام .. ومثل الأحلام فإن بعضها مثل الرؤى ينم عن حقائق فإن هـذا ا ستوى ا يا ينتج واقعاً رياضياً وتطبيقات يكن ا حل ا ستوى ا قيقـي فوجدنا ا حلاً بواسطة ا ستوى ا يا أو ا ركب complex plane.

٢-١ دوال ا تغ ا ركب Functions of Complex Variables

١-٢-١ مقدمة

إذا كانت $z = x + iy$ فإن $w = f(z)$ ثل علاقة ب z و w .. و ت الـشروط ا عروفة للعلاقات لكي تكون دوال فإن الشروط نفسها تنتج لنـا دوال ا ـتغ ا ركـب .. وتكون هذه الدوال وحيدة القيمة single valued إذا كانت كل قيمة لـ z تنتج قيمـة

وحيدة لـ w .. و ثل هذا نوع من التحويل بـ مسـتوي خيالي .. كما بالشكل ١-١
حيث $z = x + iy$ و $w = u + iv$



(شكل ١–١)

وهذا التحويل ينتج أشياءً فريدة غ موجودة واقع ا ستوى ا قيقي و ويلاته .. إذ لا كن رسم العلاقة بـ z و w مستوى خاص ما لأن z تقع مـ ستوى و w تقع مستوى آخر ولا كن رسم العلاقة بـ z و w مباشرةً .. فنحن ننقل النقطـة مـ ن مستوى z إ مستوى w وهكذا ينتقل الشكل مستوى z إ شكل آخر مستوى w وبينما ثل $w = f(x,y)$ علاقة سطح surface نظام حقيقي ثلاثي الأبعاد فـإن هـذه العلاقة على صورة $w = f(z)$ لا تعطى هذا ا ع إطلاقاً .. وإن كان من ا مكـن إطـلاق علاقات ا ساب التفاضلي التكاملي لدوال ذات متغ ين على العلاقة ا ستوى ا ركـب .. ولكن ليس كل العلاقات .. كما أن هناك حساباً جديداً ينشأ .. دعونا الآن نأصـل فكـرة التحويل ا ركب complex transformation عن طريق الأمثلة الآتية:

مثال ١-١:

إذا كان $w = z + \alpha$

حيث $\alpha \in z$ فإنه بوضع $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$

حيث $\alpha_1, \alpha_2 \in \Re$ فإن:

$$u + iv = (x+iy) + (\alpha_1 + i\alpha_2)$$

وبالتا فان علاقات التحويل

$$u = x + \alpha_1$$

$$v = y + \alpha_2$$

فإذا كان الشكل مستوى (z) خطياً يث يكون

$$y = \gamma x + \Gamma \quad , \quad \gamma , \Gamma \in \Re$$

فإن:

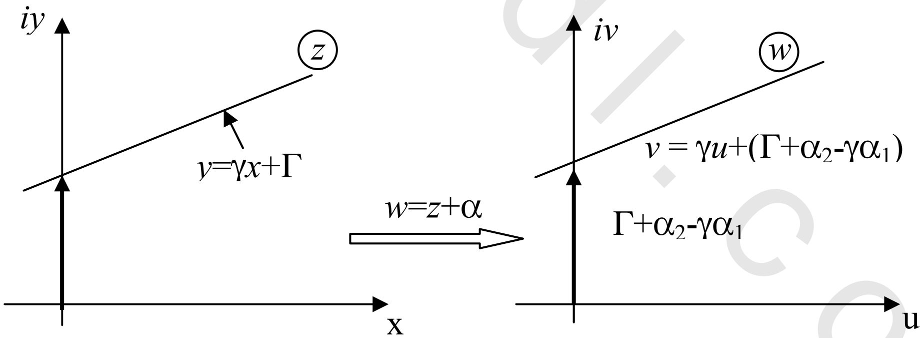
$$u = x + \alpha_1$$
$$v = y + \alpha_2 = \gamma x + \Gamma + \alpha_2$$

و ذف x ب ا عادلة لـ u, v فإن:

$$v = \gamma (u - \alpha_1) + \Gamma + \alpha_2$$

$$\boxed{v = \gamma u + (\Gamma+\alpha_2 - \gamma\alpha_1)}$$

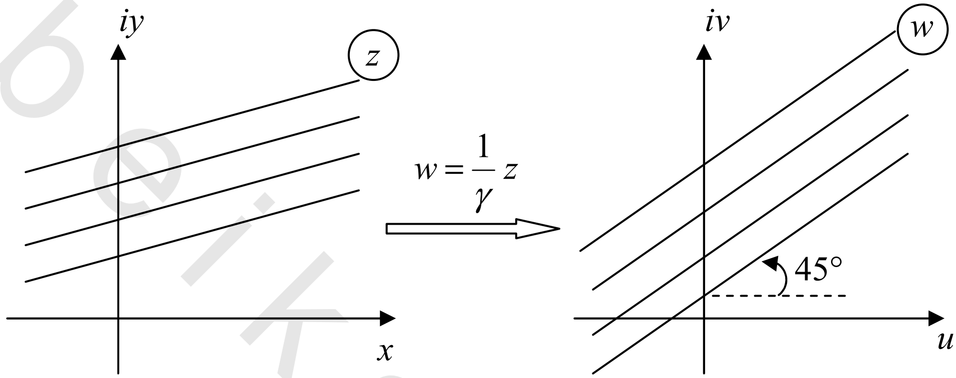
أي أن الأشكال ا طية مستوى (z) تنتقل إ أشكالٍ أيضا خطية مستوى (w) كمـا يب شكل ١-٢



(شكل ١-٢)

ونلاحـظ أن ا طوط تنتقل ب ا سـتوي بنفس ا يل γ ولكن هناك تغـ ا ـزء ا قطوع من ا ور الرأسـي .. فإذا تغ ت العلاقة ب z و w يث يكون $w = \alpha z$ فإن تغ اً يطرأ على ا يل يث يكون مضروباً α مستوى ω و كن استغلال هذا تصنيع شبكة من ا طوط ذات ميل مع مرغوب فيه فمثلاً إذا كان $y = \gamma x + \Gamma$

فإن العلاقة
$$w = \frac{1}{\gamma} z$$
تنتج شبكة من ا طوط ذات ميل ٤٥° كما هو مب بالشكل ١ –٣



(شكل ١–٣)

و كن ا صول على شبكة من ا طوط الأفقية أو الرأسية .. وهكذا باستعمال هذا التحويـل ا طي.

مثال ١-٢:

لنفس العلاقة ا طية

$$\alpha \in \Re \quad , \quad w = \alpha z + \beta$$

فإن الدوائر مستوى z تصبح دوائر أيضا مستوى w

الإثبات: $z = x + iy$

حيث $x^2 + y^2 = a^2$ (دوائر مركزها نقطة الأصل)

وبالتا فإن $u + iv = \alpha x + \beta_1 + i(\alpha y + \beta_2)$ حيث $\beta = \beta_1 + i\beta_2$

أي أن علاقات التحويل

$$u = \alpha x + \beta_1$$
$$v = \alpha y + \beta_2$$

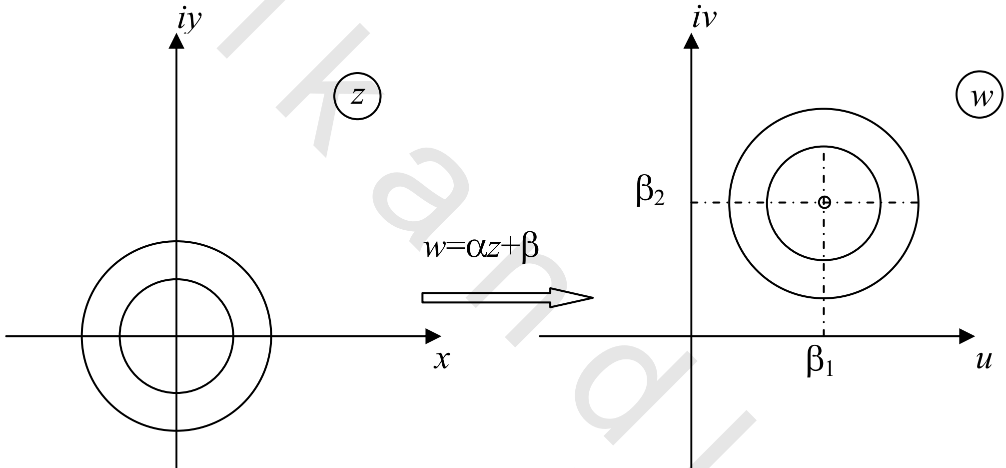
أي أن $x = \dfrac{u-\beta_1}{\alpha} \Rightarrow x^2 = \dfrac{(u-\beta_1)^2}{\alpha^2}$

كذلك $y = \dfrac{v-\beta_2}{\alpha} \Rightarrow y^2 = \dfrac{(v-\beta_2)^2}{\alpha^2}$

والتا فإن: $a^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow a^2 = \dfrac{(u-\beta_1)^2}{\alpha^2} + \dfrac{(v-\beta_2)^2}{\alpha^2}$

أي أن $(\alpha\, a)^2 = (u - \beta_1)^2 + (v - \beta_2)^2$

وهي دوائر نصف قطرها $\alpha\, a$ ومركزها (β_1, β_2) كما يوضح الشكل ١-٤



(شكل ١–٤)

و ثل β نقطة إزاحة ا ركز بينما ثل α معامل التكب والتصغ للدوائر.

ور ا يتضح فائدة أكـ لأمثال هذه التحويلات حـ دها قادرة على ويل شبكة غ خطية إ شبكة خطية أفقية ورأسية كما با ثال التا :

مثال ١-٣:

إذا كان $w = z^2$

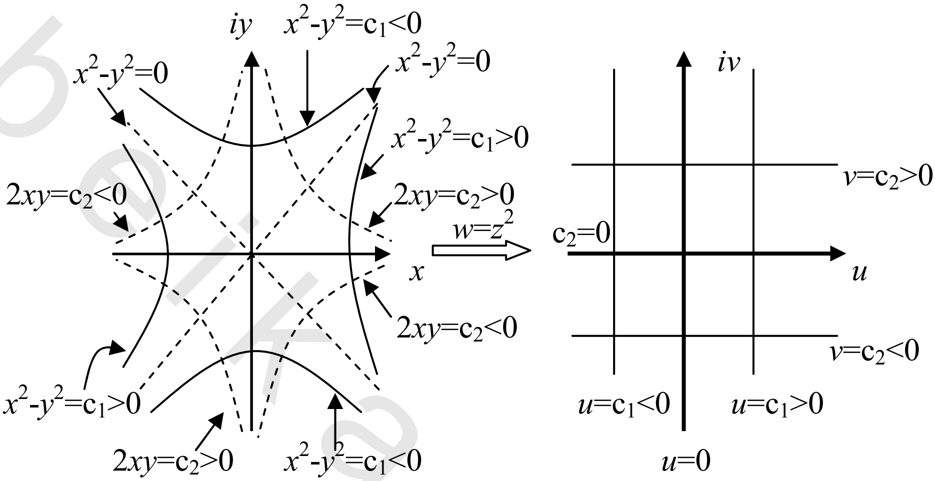
فإن علاقات التحويل $u = x^2 - y^2$

$v = 2\,xy$

فإذا أخذنا العلاقات الـ فيها u, v ثابتة فإن هذا معناه أن الأشكال غ ا طية

$$x^2 - y^2 = c_1$$
$$2xy = c_2$$

تنتج أشكال أفقية $v = c_2$ وأشكال رأسية $u = c_1$ مصاحبة ا كما بالشكل ١-٥



(شكل ١-٥)

ويتضح من الشكل أن الشبكة غ ا طية $x^2 - y^2 = c_1>0$ تتحول إ خطوط رأسية متوازية وأن $x^2-y^2=c_1<0$ تتحول أيضاً إ شبكة خطوط رأسية متوازية بينما تتحـول $2xy = c_2$ إ شبكة خطوط أفقية ويتحول ا طان $x^2-y^2=0$ إ ا ور التخيلي مـستوى w بينمـا يتحول ا طان $x = 0$ و $y = 0$ إ ا ور ا قيقي مستوى w وهـى ـويلات كـن استغلا ا كث من التطبيقات.

وأحياناً ينتج من هذه التحويلات دوال عديدة القيم وفيها يتم ا صول على أكثر من قيم لـ ـ w لقيمة وحيدة z والدوال النا ة من أمثال هذه العلاقات كن اعتبارها موعة من الـدوال وحيدة القيمة a collection of single-valued functions ويطلق على كل عضو ا موعة بالفرع branch.

مثال ١-٤:

الدالة $w = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x+iy}$

هذه ا الة $w = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} \; e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{2}\right)}, \; k = 0,1$

حيث $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

وبالتا فهناك قيمتان للدالة الأو :

$$w_o = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} \; e^{i\frac{\theta}{2}} \quad (k=0)$$

وتسمى بالفرع الأساسي للدالة principal function

والأخرى:

$$w_1 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} \; e^{i\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right)} \qquad (k=1)$$

$$w_1 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} \; e^{i\frac{\theta}{2}}.e^{i\pi}$$

$$w_1 = -\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} \; e^{i\frac{\theta}{2}}$$

ولذلك فإن $w = z^{\frac{1}{2}}$ دالة مزدوجة القيم Two-valued functions.

ملاحظة:

الدالة $w = z^{\frac{1}{n}}, \; n \in N^+$ هى دالة عديدة القيم بدرجة n n-valued function

 يث يكون

$$w_k = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{n}} \; e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)}, \; k = 0,1,2..,n-1$$

ودائما عند $k=0$ فإننا صل على الدالة الأساسية.

ولاحظ أن العلاقة تعطي ا عادلة $w^n = z$ وهي معادلة من درجة n ولذلك فلها n من ا ذور يعها قق ا عادلة ونلاحظ أن

$$w_k^n = \sqrt{(x^2+y^2)}\ e^{i(\theta+2\pi k)} = \sqrt{(x^2+y^2)}\ e^{i\theta}.e^{i2\pi} = r\,e^{i\theta}$$
$$= z.$$

١-٢-٢ الدوال ا دودية Polynomial Functions

وفيها يكون:

$$w = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + .. + a_n z^n,\ a_n \in z$$

والعلاقة ا طية افظ على الأشكال كما برهنا سابقاً .. ولكن العلاقات غ ا طية تعطي تغي اً وحيداً الأشكال وقد بيننا سابقاً بعض الأمثلة هذه التغ ات.

نظرية

التحويلة ا طية $w=\alpha z+\beta$ حيث $\alpha\in\Re$ افظ على شكل العلاقات مستوى z

الإثبات:

من ا علوم أنه إذا كان $c = f(x, y)$ ثل شكلاً ما مستوى z فإن $c= f(\alpha x, \alpha y)$ ثل نفس الشكل ولكن قياس scale تلف فإن الدائرة $a^2=x^2+y^2$ افظ على شكلها كدائرة إذا كان $a^2=(\alpha x)^2+(\alpha y)^2$ ولكن بنصف قطر تلف (a/α)، كذلك فأن $f(x-\alpha, y-\beta)$ ثل نفس الشكل أيضا بنقل ا اور إ النقطة (α,β) كانتقال الدائرة من $a^2=x^2+y^2$ ا الدائرة $a^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$ ، فإذا حدث التحويلان معاً فهو تغ ا قياس مصحوباً بانتقال ا اور ولكن الشكل يظل كما هو دون تغي .

و حالتنا هذه فإن علاقات التحويل هى:

$$u = \alpha\, x + \beta_1 \quad , v = \alpha\, y + \beta_2$$

أي أن:

$$x = \frac{u - \beta_1}{\alpha} \quad , \quad y = \frac{v - \beta_2}{\alpha}$$

وبالتا فإن العلاقة $f(x, y)= c$ تصبح $f\left(\dfrac{u-\beta_1}{\alpha}, \dfrac{v-\beta_2}{\alpha}\right) = c$

وهي ثل نقلاً للمحاور ا النقطة (β_1,β_2) وتغير أ القياس قدار α.

وهذا يثبت أن التحويلة ا طية افظ على الأشكال.

ملاحظات:

إذا كانت $\alpha\in z$ فإن معادلات التحويل تصبح:

$$u = \alpha_1 x - \alpha_2 y + \beta_1$$
$$v = \alpha_2 x + \alpha_1 y + \beta_2$$

أي أن:

$$\alpha_1 x - \alpha_2 y = u - \beta_1$$
$$\alpha_2 x + \alpha_1 y = v - \beta_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\right)\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u-\beta_1 \\ v-\beta_2 \end{pmatrix}$$

وهي مازالت ثل علاقات خطية ب ا اور القد ة (x, y) وا ديدة (u, v)

وبالتا تعطي نفس فصيلة الأشكال بدوران ونقل ا اور.

مثال ١-٥:

إذا كانت $w=(1+i)z$ فإن:

$$u = x - y$$
$$v = x + y$$

أي أن:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

وبالتا فإن الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ تصبح:

$$\frac{1}{4}(u+v)^2 + \frac{1}{4}(u-v)^2 = a^2$$

$$u^2 + 2uv + v^2 + v^2 - 2uv + u^2 = 4a^2$$

$$u^2+v^2=2a^2$$

$$u^2+v^2=\left(\sqrt{2}\ \ \mathrm{a}\right)^2$$

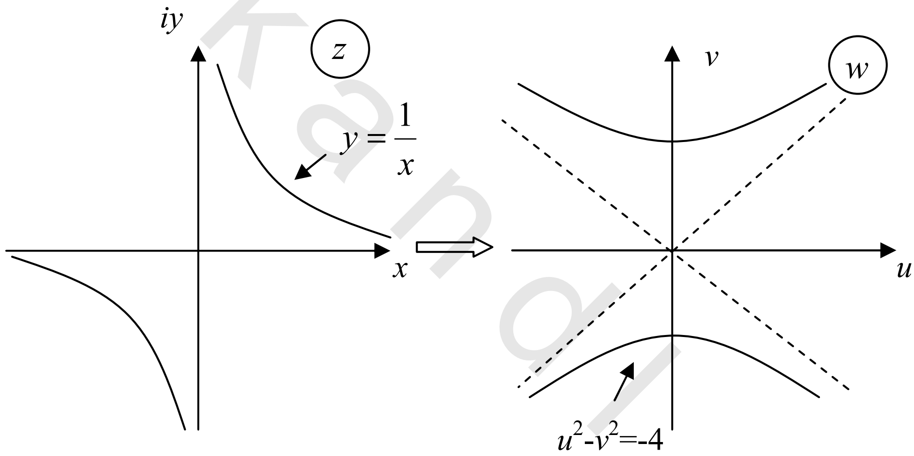
وبالتا فإن الدوائر بنصف قطر a تتحول ا دوائر بنصف قطر $\left(\sqrt{2}\,\mathrm{a}\right)$.

كذلك فإن القطع الزائد $xy=1$ يتحول ا :

$$\frac{1}{4}(u+v)\ (v-u)=1$$

$$u^2-v^2=-4$$

وهو قطع زائد كما هو مب بالشكل ١–٦، وهو ـرد دوران للمحاور للشكل الأصلي.



(شكل ١–٦)

١-٢-٣ الدوال النسبية ا ية Rational Algebraic Functions

وفيها يكون $w=\dfrac{f(z)}{Q(z)}$

حيث $f(z)$ و $Q(z)$ دوال حدودية وحيث $Q(z)\neq 0$.

ومن أشهر هذه الدوال ما يسمى ـزدوج ا ـطية bilinear

$$w(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ \ (\mathrm{ad}-\mathrm{bc}\neq 0)$$

مثال ١-٦:

أثبت أن التحويل ا زدوج ا طية

$$w=\frac{z-1}{i(z+1)}$$

ول ا ور التخيلي إ دائرة الوحدة unit circle

الإثبات

$$w=\frac{z-1}{i(z+1)}\Rightarrow |w|=\frac{|z-1|}{|i|\,|z+1|}$$

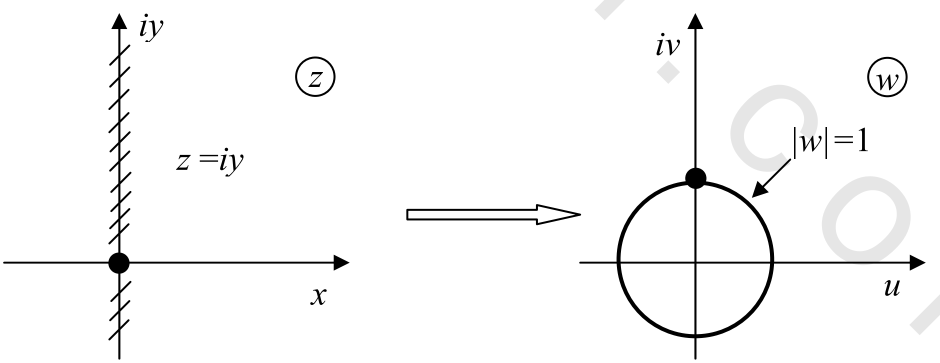
ولكن $|i|=1$ ، كذلك بالنسبة للمحور التخيلي:

$$z-1=iy-1\Rightarrow |z-1|=\sqrt{1+y^2}$$

$$z+1=iy+1\Rightarrow |z+1|=\sqrt{1+y^2}$$

وبالتا فإن: $|w|=1$

وهى معادلة دائرة الوحدة. أي أن ا ور التخيلي مستوى z يتحول إ دائرة الوحدة مستوى w كما بالشكل ١–٧



(شكل ١–٧)

ملاحظة هامة: علاقة الدائرة مستوى z كالآ :

$$|z - z_o| = r$$

وهى دائرة مركزها عند z_o ونصف قطرها r

أما العلاقة $|z - z_o| + |z - z_1| = r$

فهي تعطي علاقة قطع ناقص حيث موع ا سافت ب أي نقطة z والقطب z_o و z_1 هي r.

١-٢-٤ الدالة الأسـ ـية Exponential Function

وتعرف كالآ :

$$\begin{aligned} w &= e^z \\ &= e^{x+iy} \\ &= e^x \cdot e^{iy} \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) \end{aligned}$$

باستخدام علاقة أويلر

أي أن علاقات التحويل هي:

$$u = e^x \cos y$$
$$v = e^x \sin y$$

و ذه الدالة ا واص الآتية:

(أ) $e^{z_1} . e^{z_2} = e^{(z_1+z_2)}$

الإثبات

$$\begin{aligned} e^{z_1} . e^{z_2} &= e^{x_1+iy_1} . e^{x_2+iy_2} = e^{x_1} e^{x_2} e^{iy_1} e^{iy_2} \\ &= e^{(x_1+x_2)} \; e^{i(y_1+y_2)} \\ &= e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

(ب) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$

(ج) $|e^z| = e^x$

الإثبات:

$$e^{z} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

$$|e^{z}| = |e^{x}|\sqrt{\cos^{2} y + \sin^{2} y} = |e^{x}|$$

(د) $e^{z+2\pi ik} = e^{z} \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

الإثبات:

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi ik} &= e^{z}.\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{ik}} \\ &= e^{z}.(\cos 2\pi \mathrm{k} + \mathrm{i}\sin 2\pi \mathrm{k}) \\ &= e^{z}(1 + i0) \\ &= e^{z} \end{aligned}$$

أي أن الدالة $w = e^{z}$ دالة دورية periodic بدورة قدرها $2\pi ik$.

(هـ) $\mathrm{Arg}\,(e^{z}) = y$

وذلك لأن

$$\begin{aligned} e^{z} &= e^{x}(\cos y + i\sin y) \\ &= e^{x}.e^{iy} \end{aligned}$$

وهذا يع   أن e^{z} كمتغ   مركب له مقدار e^{x} وسعة قدرها y.

(و) $e^{i(0)} = 1$

وذلك لأن

$$\begin{aligned} e^{i(0)} &= \cos 0 + i\sin 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

مثال ١-٧:

الدالة $w = e^{z}$ ول ا   طوط الرأسية إ   دوائر

الإثبات: بأخذ ا   ط الرأسي   مستوي z كالآ : $x = c$

فإن:

$$w = u + iv = e^{x+iy} = e^{c}(\cos y + i\sin y)$$

إذن علاقات التحويل:

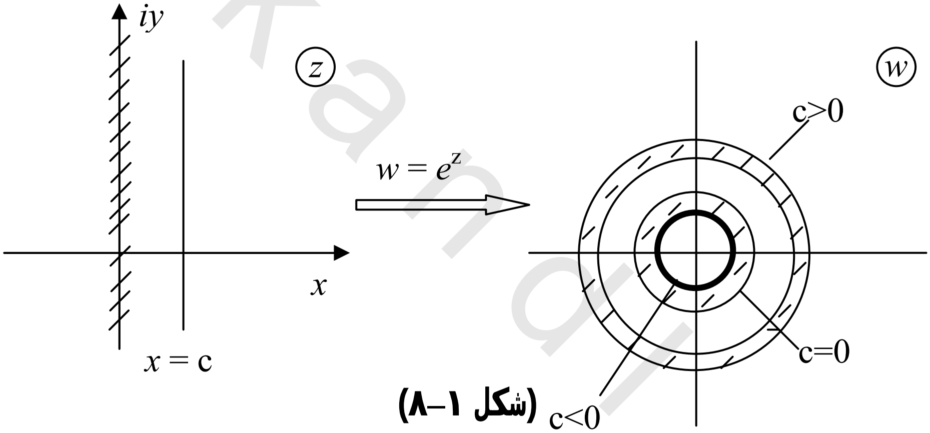
$$u = e^{c}\cos y$$

$$v = e^{c}\sin y$$

وبالتا $\cos^2 y + \sin^2 y = 1 = e^{-2c}(u^2+v^2)$

أي أن: $u^2 + v^2 = e^{2c}$

وهذه علاقة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها e^{c} ولذلك فإن ا ور التخيلي يتحول ا دائرة الوحدة .. و حالة $c > 0$ فإن الدوائر تزداد اتساعاً و حالة $c < 0$ فإن الدوائر تتقلص داخل دائرة الوحدة كما هو مب بالشكل ١–٨



(شكل ١–٨)

١-٢-٥ الدوال ا ندسية Trigonometric Functions

وتتبع التعريفات الآتية كما هو متبع الدوال ا قيقية:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad , \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \quad , \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

مع ملاحظة أن هذه الدوال لا تع عن نسب مثلثية كما أن z ليست زاوية .. ولكنـها الآن
ـرد علاقات ذات شبه بالعلاقات القد ة ا ستوى ا قيقي.

و ذه الدوال ا واص الآتية:

(أ) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

الإثبات:

$$\sin^2 z+\cos^2 z=-\frac{1}{4}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)^2+\frac{1}{4}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)^2$$

$$=-\frac{1}{4}\left(e^{2iz}-2+e^{-2iz}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{2iz}+2+e^{-2iz}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

(ب) $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

الإثبات:

$$\sin\left(z_1+z_2\right)=\frac{1}{2!}\left(e^{i\left(z_1+z_2\right)}-e^{-i\left(z_1+z_2\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{2!}\left(e^{iz_1}.e^{iz_2}-e^{-iz_1}.e^{-iz_2}\right)$$

$$=\frac{1}{2!}((\cos z_1+i\sin z_1)(\cos z_2+i\sin z_2)$$

$$-(\cos z_1-i\sin z_1)(\cos z_2-i\sin z_2))$$

(وذلك باستخدام أن $\sin(-z) = -\sin z$

$\cos(-z) = \cos z$

.. بغض النظر عن التسميات فردي وزوجي)

$$=\frac{1}{2i}[\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$$

$$+i(\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2)$$

$$-\cos z_1\cos z_2+\sin z_1\sin z_2$$

$$+\,i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2)]$$

$$= \frac{1}{2}(2\sin z_1 \cos z_2 + 2\cos z_1 \sin z_2)$$

$$= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

وبا ثل فكل العلاقات الشبيهة مازالت سارية مثل

- $\sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2$
- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \; \mu \sin z_1 \sin z_2$
- $\tan(z_1 \pm z_2) = \dfrac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \quad \mu \tan z_1 \tan z_2}$
- $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$

وعلى القارئ اولة إثبات هذه العلاقات كنوع من التمرين ..

وأكرر أن هذه العلاقات رد تشابه بـ الدوال ا قيقية والدوال ا ركبة.

مثال ١-٨:

أثبت أن أصفار الدالة w=sin z والدالة w=cos z كلها حقيقية وأوجدها.

ا ل:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \;\Rightarrow\; e^{iz} = e^{-iz} \Rightarrow e^{2iz} = 1 = e^{2\pi i k}$$

أذن $\quad 2iz = 2\pi i k$

أي أن: $\quad z = \pi k\,,\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

وكلها حقيقية.

كذلك:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = 0 \Rightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \Rightarrow e^{2iz} = -1 = e^{(2k+1)\pi i}$$

$$2z = (2k+1)\pi$$

$$z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

وكلها حقيقية

وعلى ذلك يتضح أن الدوال ا قيقية sin x و cos x تتفق مع الدوال ا ركبة sin z و cos z نفس الأصفار على الترتيب.

مثال ١-٩:

أثبت أن:

$$\lim_{z\to\infty} |\cos z| \to \infty$$

الإثبات:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-iz}\right)$$

$$|\cos z| = \frac{1}{2}\left|e^{iz} + e^{-iz}\right| \le \frac{1}{2}\left|e^{iz}\right| + \frac{1}{2}\left|e^{-iz}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|e^{-y}.e^{ix}\right| + \frac{1}{2}\left|e^{y}.e^{-ix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|e^{-y}\right| + \frac{1}{2}\left|e^{y}\right|$$

حيث $..\ \left|e^{i\theta}\right| = 1$

وبالتا :

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \begin{pmatrix} x\to\infty \\ y\to\infty \end{pmatrix}}} |\cos z| \le \infty$$

ووجود التساوي يع أن:

$$\lim_{z\to\infty} |\cos z| \to \infty$$

أي أن هذه الدالة تعد دودة كما كانت ا ستوي ا قيقي.

مثال ١-١٠:

الدالة $w = \sin z$ دالة دورية ودور ا 2π.

الإثبات:

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$\sin(z+2\pi) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{iz}\ e^{i2\pi} - e^{-iz}e^{-iz\pi}\right)$$

ولكن $e^{\pm i2\pi}=1$ .. إذن

$$\sin(z+2\pi) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \sin z$$

أي أن الدالة $\sin z$ دالة دورية ودور ا قدره 2π. وبا ثل الدالة $w = \cos z$.

(ج) $\quad \sin(0) = 0 \quad , \quad \cos(0) = 1$

١-٢-٦ الدوال الزائدية Hyperbolic functions

وهي تتبع التعريفات الآتية:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad , \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\text{sech}\, z = \frac{1}{\cosh z} \quad , \quad \text{csch}\, z = \frac{1}{\sinh z}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad , \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

و ا ا واص الآتية:

(أ) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

(ب) $1 - \tanh^2 z = \text{sech}^2 z$

(ج) $\coth^2 z - 1 = \operatorname{csch}^2 z$

(د) $\sinh(-z) = -\sinh z$

(هـ) $\cosh(-z) = \cosh(z)$

(و) $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$

(ز) $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$

(ح) $$\tanh(z_1 \pm z_2) = \frac{\tanh z_1 \pm \tanh z_2}{1 \pm \tanh z_1 . \tanh z_2}$$

وهناك علاقات أخري هامة كالآ :

(أ) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

(ب) $e^{z} = \cosh z + \sinh z$

(ج) $\sin i z = i \sinh z$,
$\sinh i z = i \sin z$

(د) $\cos i z = \cosh z$,
$\cosh i z = \cos z$

(هـ) $\tan i z = i \tanh z$
$\tan i z = i \tanh z$

مثال ١-١١:

أوجد u, v للدالة $w = \sin z$

ا ل:

$$w = \sin z = \sin(x + iy)$$
$$= \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$
$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

وبالتا فإن:

$$u = \sin x \cosh y$$
$$v = \cos x \sinh y$$

مثال ١-١٢:

أثبت أن:

$$|\cos z| = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos 2x + \cosh 2y)}$$

الإثبات:

$$\cos z = \cos(x + iy)$$
$$= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$$
$$= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$
$$|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y$$
$$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\cosh^2 y + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).\sinh^2 y$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cosh^2 y + \sinh^2 y\right) + \frac{1}{2}\cos 2x\left(\cosh^2 y - \sinh^2 y\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cosh 2y + \frac{1}{2}\cos 2x(1)$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 2x + \cosh 2y)$$

أي أن:

$$|\cos z| = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos 2x + \cosh 2y)}$$

ملاحظة: وعلى هذا يتضح أيضا أن الدالة $\cos z$ ليست ـدودة بالنسبة لـ y لأن:

$$\lim_{y \to \infty} \cosh 2y \to \infty$$

مثال ١-١٣:

أوجد شكل التحويل $w = \sin z$ طوط أفقية مستوى z

ا ـل

ا ط الأفقي مستوى z .. $y = c$

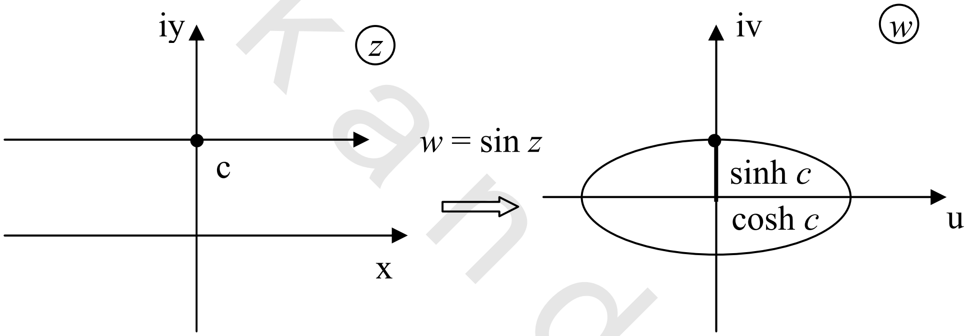
ومن علاقات التحويل السابق ا صول عليها مثال ١-٩:

$$u = \sin x \cosh c$$
$$v = \cos x \sinh c$$

وبالتا فإن:

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1$$

وهي علاقة قطع ناقص كما هو مب بالشكل ١-٩



(شكل ١-٩)

١-٢-٧ الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

وتعرف كالآ : $w = \ln z$

وهي معكوس الدالة $z = e^w$ .. على أن الدالة $w = \ln z$

هي دالة عديدة القيم وذلك لأن:

$$w = \ln z = \ln r\, e^{i\theta} = \ln r\, e^{i(\theta+2\pi k)}$$
$$= \ln r + i(\theta+2\pi k) \quad , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

وعلاقات التحويل هي:

$$u = \ln r$$
$$v = \theta+2\pi k$$

و صل على القيمة الأساسية للدالة عندما يكون $k = 0,\ \ 0 \leq \theta < 2\pi$

ملاحظات:

(i) بشكل عام فإن $z = a^{w}$ تنتج $w = \log_a z,\ a > 0,\ a \neq 1$

(ii) كن كتابة $z = e^{\ln a^{w}}$

$$z = e^{w \ln a}$$

وبالتا فإن: $\ln z = w \ln a$

أي أن: $w = \dfrac{\ln z}{\ln a}$

وبالتا فإن: $w = \log_a z = \dfrac{\ln z}{\ln a}$

أي أنه كن صياغة الدوال اللوغاريتمية بشكل عام عن طريق الدالة $\ln z$.

(iii) باستغلال العلاقة السابقة فإن:

$$w = \log_a z = \frac{\ln z}{\ln a} = \frac{\ln r}{\ln a} + i\frac{(\theta + 2\pi k)}{\ln a}$$

أي أن علاقات التحويل: $u = \dfrac{\ln r}{\ln a}$

$$v = \frac{\theta + 2\pi k}{\ln a}, \qquad k = 0, \pm 1, .., \qquad a \neq 1$$

مثال ١-١٤:

أثبت أن التحويل $w = \ln z$ ويل الدوائر مستوى z إ خطوط رأسية مستوى w.

الإثبات:

العلاقة $w = \ln z$ تعطي:

$$u = \ln r, \qquad v = \theta + 2\pi k$$

وبأخذ الدالة الأساسية فقط $(k = 0)$ فإن:

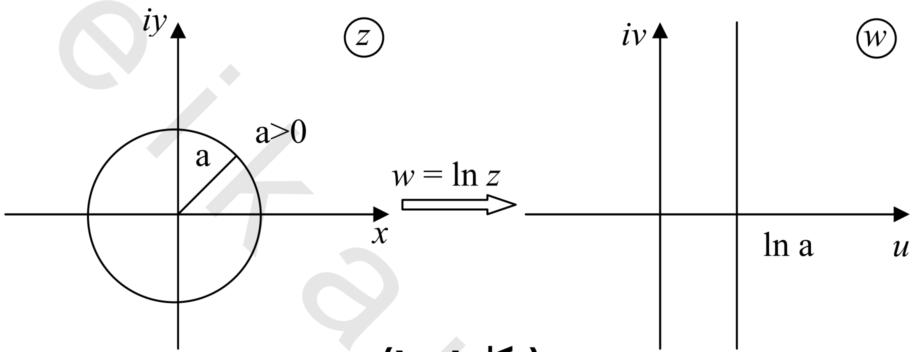
$$u = \ln r$$
$$v = \theta$$

وبالتالي فإن: الدائرة مستوى z: وليكن $|z| = r = a$

فإن $u = \ln a = \text{constant}$

$v = \theta$

أي أن العلاقة هي ثابت $= u$ وهي علاقة خط رأسي كما هو مبين بشكل(١ – ١٠)



(شكل ١–١٠)

و حالة كون $a < 1$ فإن $u = \ln a < 0$ الجزء السالب من المستوى w و حالة $a > 1$ فإن $u = \ln a > 0$ الجزء الموجب من المستوى w.

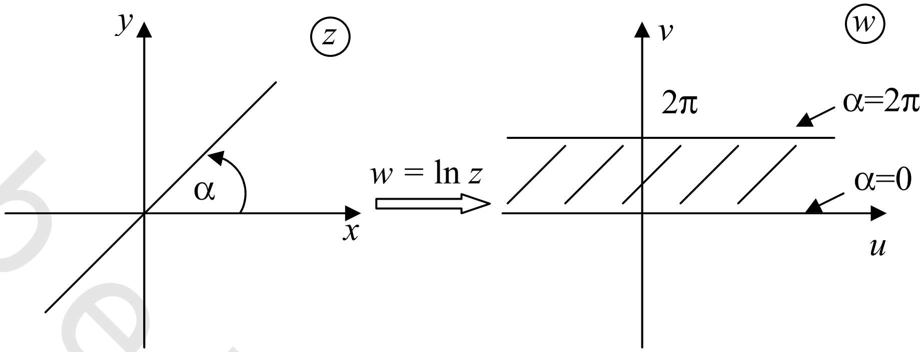
مثال ١-١٥:

نفس المثال السابق .. ماذا يحدث إذا كانت الخطوط مستوى z تمر بنقطة الأصل؟

الحل:

هذه الحالة فإن (ثابت) $\theta = \alpha$ (كما هو مبين بشكل ١ –١١)

وبالتالي فإن $v = \theta = \alpha$ تعطي خطوط أفقية.



(شكل ١–١١)

ونلاحظ هنا أن ا ستوى z كله قد ول إ شر ة صورة ب $v=0$ و $v = 2\pi$ مستوى w.

١-٢-٨ الدوال ا ثلثية العكسية Inverse Trigonometric Functions

وتعرف كالآ :

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) \qquad \cos^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad \cot^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\frac{z+i}{z-i}$$

$$\sec^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right) \qquad \csc^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}\right)$$

علما بأن التعريفات ا كتوبة هي للفرع الأساسي فقط .. إذ أن هذه الدوال بشكل عام دوال متعددة القيم.

مثال ١-١٦:

إذا اخترنا أن $\sin^{-1}0 = 0$ اثبت أن الدالة (الفرع الأساسي) $\sin^{-1}z$ هو

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

الإثبات:

$$w = \sin^{-1} z \Rightarrow z = \sin w$$

أذن:

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

أي أن:

$$e^{iw} - e^{-iw} = 2iz$$
$$e^{iw} - 1 = 2iz\, e^{iw}$$
$$e^{2iw} - 2iz\ \ e^{iw} - 1 = 0$$

وبالتا :

$$e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{4 - 4z^2}}{2} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$$

وبالتا فإن:

$$e^{i(w - 2\pi k)} = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

$$i(w - 2\pi k) = \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

or

$$w = 2\pi k + \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

عل $\sin^{-1}0 = 0$ فإن $k=0$ وبالتا :

$$w = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

١-٢-٩ الدوال الزائدية العكسية Inverse Hyperbolic Functions

ويعرف الفرع الأساسي منها كالآ :

$$\sinh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right) \qquad \cosh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + z}{1 - z} \qquad \coth^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\frac{z + 1}{z - 1}$$

$$\operatorname{sech}^{-1} z = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z}\right) \qquad \operatorname{csch}^{-1} z = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{z^2 + 1}}{z}\right)$$

مثال ١-١٧:

أثبت أن $\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$

الإثبات:

$$w = \tanh^{-1} z \Rightarrow z = \tanh w$$
$$= \frac{\sinh w}{\cosh w}$$
$$= \frac{e^{w} - e^{-w}}{e^{w} + e^{-w}}$$
$$= \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1}$$

وبالتا

$$z + ze^{2w} = e^{2w} - 1$$
$$e^{2w}(z-1) = -1 - z$$
$$e^{2w} = \frac{1+z}{1-z}$$

وبالتا

$$2w = \ln\frac{1+z}{1-z}$$

أي أن

$$w = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$$

١-٢-١٠ الدوال $w = z^{\alpha}, \quad \alpha \in z$

وهى دوال متعددة القيم و كن كتابتها على الصورة اللوغاريتمية

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \ln z}$$

فإذا ما كانت $\alpha \in N$ فإ ا تصبح وحيدة القيمة.

وللحصول على معادلات التحويل فإننا ري الآ :

$$(z)^{\alpha} = u + iv = e^{\alpha \ln z} = e^{(\alpha_1 + i\alpha_2)(\ln r + i(\theta + 2\pi k))}$$
$$= e^{(\alpha_1 \ln r - \alpha_2(\theta + 2\pi k)) + i(\alpha_2 \ln r + \alpha_1(\theta + 2\pi k))}$$
$$= e^{(\alpha_1 \ln r - \alpha_2(\theta + 2\pi k))}[\cos(\alpha_2 \ln r + \alpha_1(\theta + 2\pi k)) + i\sin(\alpha_2 \ln r + \alpha_1(\theta + 2\pi k))$$

وبالتا فإن:

$$u = e^{(\alpha_1 \ln r - \alpha_2(\theta + 2\pi k))} \cos(\alpha_2 \ln r + \alpha_1(\theta + 2\pi k))$$
$$v = e^{(\alpha_1 \ln r - \alpha_2(\theta + 2\pi k))} \sin(\alpha_2 \ln r + \alpha_1(\theta + 2\pi k))$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

و حالة انتماء $\alpha \in \Re$ فان $\alpha_2 = 0$ وبالتا

$$u = e^{\alpha_1 \ln r} \cos(\alpha_1(\theta + 2\pi k))$$
$$v = e^{\alpha_1 \ln r} \sin(\alpha_1(\theta + 2\pi k))$$

حيث $\alpha_1 = \alpha \in \Re$

مثال ١-١٨:

أوجد علاقات التحويل للدالة: $w = z^i$

ا ل:

$$w = z^i = e^{i \ln z}$$
$$= e^{i(\ln r + i(\theta + 2\pi k)}$$
$$= e^{-(\theta + 2\pi k)} e^{i \ln r}$$
$$= e^{-(\theta + 2\pi k)} (\cos \ln r + i \sin \ln r)$$

إذن

$$\boxed{\begin{aligned} u &= e^{-(\theta+2\pi k)} \cos \ln r \\ v &= e^{-(\theta+2\pi k)} \sin \ln r \end{aligned}} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وعلى هذا فإن

i) $$(i)^i = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} (\cos 0 + i \sin 0), \qquad i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$= e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}$$

والغريب أن $(i)^i$ قيمة حقيقية تة.

ii) $(a)^i = e^{-(0+2\pi k)} (\cos \ln |a| + i \sin \ln |a|), a \in \Re^+, \; z = |a| e^{i(0)}$

$$= e^{-2\pi k} (\cos \ln |a| + i \sin \ln |a|)$$

$$(a)^i = e^{-(\pi+2\pi k)} (\cos \ln |a| + i \sin \ln |a|) \; a \in \Re^-, \; z = |a| e^{i(\pi)}$$

وبالتا فإن

$$(1)^i = e^{-2\pi k} (\cos 0 + i \sin 0)$$

$$= e^{-2\pi k}$$

أي أن الكمية $(1)^i = e^{-2\pi k}$ كمية حقيقية تة.

مثال ١-١٩:

التحويلة $w = z^i$ ول دائرة الوحدة مستوى z إ القطعة ا ستقيمة $[e^{-2\pi}, 1]$،
بأخذ الفرع الأساسي فقط.

الإثبات

$$w = z^i = e^{-(\theta+2\pi k)} (\cos \ln r + i \sin \ln r)$$

وعند $k=0$ فإن

$$w = e^{-\theta} (\cos \ln r + i \sin \ln r)$$

وبالنسبة لدائرة الوحدة فإن $|z| = 1$

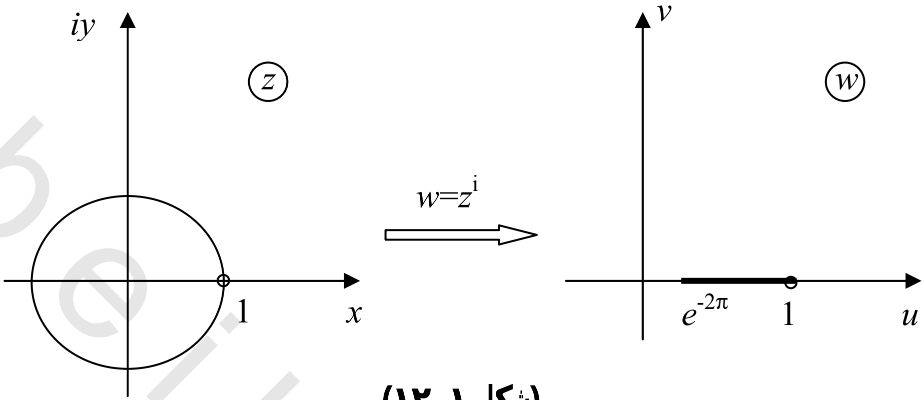
أي أن $r = 1$ وبالتا

$$w = e^{-\theta} (1 + i\, 0)$$

أي أن $u = e^{-\theta}$

$$v = 0$$

وبالتا فعند تغ θ من صفر ا 2π فإن u تتغ من 1 ا $e^{-2\pi}$ والـ شكل الآ يوضـح التحويل.



(شكل ١–١٢)

١-٢-١١ النقط الفرعية **Branch Points**

دعنا نقدم للموضوع باستخدام الدالة $w = z^{\frac{1}{3}}$ فإن قيمة w عند النقطة A علـى ا سار C مستوي z والا تتميز بأن $\theta = \theta_1$ عنـدها فـإن $w_1 = (r)^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}\right)}$ لأن $z = re^{i\theta_1}$ عند هذه النقطة. فإذا ما دارت الزاوية θ_1 ا دورة كاملة يث تصبح $\theta_1+2\pi$ فإن $w = (r)^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\theta_1+2\pi}{3}\right)}$

ونكتشف منها أن $w = w_2 = (r)^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}$ وهي قيمة تلف عن القيمة w_1 .. فإذا ما أخذنا دورة أخرى يث تكون زاويـة z هـي $\theta_1+4\pi$ فـان $w = (r)^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\theta_1+4\pi}{3}\right)}$ ونكتشف أيضا قيمة ثالثة لـ w حيث

$$w = w_3 = (r)^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}$$

ولكن هل يستمر الوضع على ذلك .. فإذا أخذنا $\theta_1+6\pi$ فإن

$$w=(r)^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}=(r)^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}+2\pi\right)}$$
$$=(r)^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}\right)}$$
$$=w_1$$

أي أننا نكون قد عدنا مرة أخرى إ القيمة الأو .. وهكذا أيضا بالنسبة لـدورة أخـرى $\theta_1+8\pi$ إذ نصل إ $w=w_2$ وعند $\theta_1+10\pi$ نصل ا w_3 .. فهناك ثلاث قيم مـستقلة عن بعضها البعض تعت هي التحويل من z ا $w=z^{1/3}$.

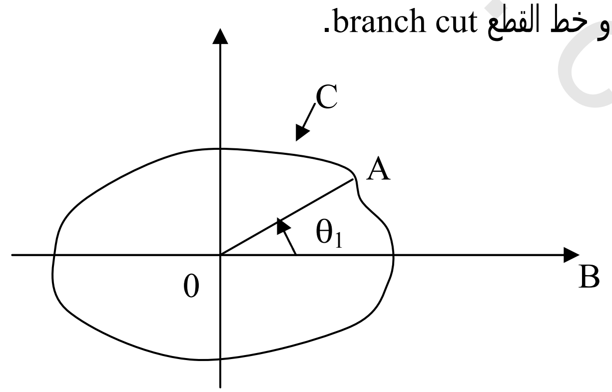
ونصف النتائج ال توصلنا إليها كالآ :

حالة $0\le\theta<2\pi$ هناك فرع من الدالة $w=z^{1/3}$

حالة $2\pi\le\theta<4\pi$ هناك فرع ثا من الدالة $w=z^{1/3}$

حالة $4\pi\le\theta<6\pi$ هناك فرع ثالث من الدالة $w=z^{1/3}$

أي أن الدالة $w=z^{1/3}$ دالة عديدة القيم وتتميز بوجود ثلاث فروع تلفة ا .. كل فـرع دد نطقة تلفة للزاوية θ. النقطة ال قيم الدوران حو ا لتصنع ذلك تسمى بنقطة التفرع branch point وكل فرع من الدالة هو دالة وحيدة القيمة single-valued وللحفـاظ على حد بـ كل فرع للدالة والفرع الأخر نصنع خطاً افتراضياً لا ب تعديه لنظل الفرع الواحد وهو خط اختياري و كن أخذ ا ط OB شكل ١–١٣ ليكون هذا ا ط ويسمى ط التفرع أو خط القطع branch cut.



(شكل ١–١٣)

و الشكل السابق فإن z=0 هي نقطة تفرع للدالة $w=z^{1/3}$ بينما ا ط OB (واصـل ا مالا اية) هو خط التفرع أو خط القطع .. ولا يوجد نقطة تفرع أخرى دة ذه الدالة .. ولكن الدالة $w=(z-z_0)^{1/3}$ ا نقطة تفرع عند $z=z_o$ وليس عند z=0 إذ هي النقطة الـ تسمح بالدوران حو ا وا صول على الفروع ا ستقلة الأخرى.

وهكذا نكون قد حددنا مفهوم التفرع ونقاط التفرع وخط القطع الفاصل بـ الفروع. وقد ع ر ان كل هذا تصور مدهش بتكوين ما يسمى بسطح ر ان Riemann Surfaces .. فإذا تصورنا أن ثلاثة مستويات لـ z يتم قطعها عند ا ط OB يتم مها بطريقة عل الثلاثة مستويات متصلة .. بذلك صل على سطح مستمر له ثلاث مستويات متصلة ببعضها البعض ومن هنا جاءت التسمية للخط OB الو ي بالقطع cut. وسطح ر ان هذا له شر تان حالة $w=z^{½}$ وثلاث شرائح حالة $w=z^{1/3}$ و n من الشرائح حالة $w=z^{1/n}$ وعدد لا ائي من الشرائح حالة w = ln z.

١-٢-١٢ النهايات Limits

ري التعريف ا عتاد للنهاية على الدالة وحيدة القيمة f(z) كالآ :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell$$

إذا كان $|z - z_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(z) - \ell| < \in$

لأي عـدد موجـب $\in$ ولأي عـدد موجـب δ .. أي أن $f(z)$ تقتـرب مـن ℓ, ℓ approaches، إذا ما اقتربت z من z_0, z_0 approaches، و ب أن تكـون النهايـة مستقلة عن الطريقة الـ تؤول فيها z ا z_0 .. فإذا كانت هذه النهاية موجودة exists فهي فريدة unique. و حالة كون $f(z)$ عديدة القيم فإن قيمة النهاية قد تعتمد على الفرع .. أي أن لكل فرع اياته ا ستقلة عن الفرع الأخر.

فإذا ما آلت $z_0 \to \infty$ فإن تعريف النهاية يأخذ الشكل الآ :

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \ell$$

إذا كان $|z| > M \;\Rightarrow\; |f(z) - \ell| < \in$

لأي $\in > 0$ و $M > 0$.

كذلك فإن $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$

إذا ما كان $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > N$

لأي عدد موجب $\delta > 0$ و $N > 0$.

والنهايتان الآتيتان متساويتان

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\lim_{w\to 0} f\left(\frac{1}{w}\right)$$

و كم النهايات النظريات الآتية (باختصار):

إذا ما كان $\lim_{z\to z_o} f(z)=A$ و $\lim_{z\to z_o} g(z)=B$

فإن

(i) $\lim_{z\to z_o} f(z)\pm g(z)=A\pm B$

(ii) $\lim_{z\to z_o} f(z)g(z)=A.B$

(iii) $\lim_{z\to z_o} \frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}$

حيث $B \neq 0$.

مثال ١-٢٠:

اثبت أن $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ غ موجود ($\nexists$)

الإثبات:

نعلم أنه إذا ما كانت هناك قيمة للنهاية فلا بد أن تكون فريدة ودعنا نوجد هذه النهاية على مسارين تلف

i) ا سار الأول Pass 1: على ا ور ا قيقي $y = 0$

أي أن $z = x$ وبالتا $\bar{z} = x$ أيضا و $z\to 0$ تكافئ $x\to 0$ .. أي أن

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}=\lim_{x\to 0} \frac{x}{x}=1$$

ii) ا سار الثا Pass 2: على ا ور التخيلي $x = 0$

أي أن $z = iy \quad , \quad \bar{z} = -iy$

وبالتا فإن $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\text{iy}}{\text{- iy}} = \text{-}1$

أي أن قيمة النهاية تعتمد على ا سار .. وذلك مستحيل وبالتا فلابد أن نقول أن النهاية غ موجودة أصلا أي أن:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} \quad \nexists$$

١-٢-١٣ الاتصال (الاستمرار) Continuity

مازلنا نس نفس فلك التعريفات الأساسية ال سبق استعما ا حالة الدوال ا قيقية .. فإن $f(z)$ تعت دالة متصلة عند النقطة z_0 إذا

1. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) \exists$
2. $f(z_0) \exists$
3. $f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

ولا غرابة إطلاقا استعمال هذه ا فاهيم فلقد سبق استعما ا حالة الأعـداد ا قيقيـة .. وبالتا فإن $f(z)$ دالة مستمرة منطقة R من مستوى z إذا ما كانت مـستمرة كـل النقاط R ، $\forall$ points $\in$ R .. أيضا فإنه إذا ما كانت $f(z)$, $g(z)$ دالتان متصلتان عند النقطة $z=z_0$ فإن $f(z)\pm g(z)$ دالة متصلة و $f(z).g(z)$ دالة متصلة و $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ دالـة متصلة بشرط أن $g(z_0)\neq 0$ .. وبناءً على استعمالنا نفس ا فاهيم فإن نفس النتـائج تقريبـاً صل عليها كالآ :

(i) ا دوديات z والدوال e^z , sin z , cos z , z^n كلها دوال متصلة كـل النقاط continuous everywhere.

(ii) إذا كانت $f(z)$, $g(z)$ دالتان متصلتان فإن $g(f(z))$ تكون دالة متصلة.

(iii) إذا كانت $f(z)$ دالة متصلة فإن u , v دوال متصلة أيضا حيث $f(z)=u+iv$

(iv) إذا كانت $f(z)$ دالـة متـصلة منطقـة مغلقـة R closed region فـإن $|f(z)| < M$ أي أ ا دالة دودة.

وكا عتاد فإنه إذا ما كانت $f(z)$ متصلة عند $z=z_0$ فإننا نعرف أن

$$|z-z_0| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; |f(z) - f(z_0)| < \in$$

فإذا ما كنا نستطيع ا صول على δ معتمدة على $\in$ وليس على النقطة z_0 فإننا نقول أن الاستمرار منتظم uniformly continuous..

وإذا كانت $f(z)$ مستمرة منطقة مغلقة Closed region فإ ا تكون مستمرة بانتظام هذه ا نطقة.

١-٢-١٤ ا تتابعات وا تسلسلات

يتبع تعريف ا تتابعة وكو ا متقاربة أو متباعدة نفس الأسلوب ا تبع للأعداد ا قيقية .. فلا جديد هذا ا وضوع .. فأنه إذا كانت

$$w_0, w_1, w_2, \ldots w_n, \ldots$$

متتابعة من الأعداد ا ركبة فإنه $\lim_{n\to\infty} w_n = \ell$

إذا كان لأي عدد موجب $\in>0$ نستطيع إ اد عدد N معتمـداً علـى $\in$ يـث يكـون $|\omega_n - \ell| <\in$ لكل $n>N$. ولا جديد هذا. فإذا ما وجدت هذه النهاية فـإن ا تتابعـة متقاربة convergent وإذا يكن كذلك فإ ا متباعدة divergent.

وكذلك فإن $S_n = \sum_{i=0}^{n} w_i$

تكون متسلسلة دودة فإذا آلت n ا ∞ فان ا تسلسلة تصبح لا ائية وهي إما متقاربـة أو متباعدة كا عتاد.

رينات – ١

١) اثبت أن التحويل $w=\frac{1}{z}$ ول الدوائر ذات ا ركز (0,0) مستوى z ا دوائر ذات ا ركز (0,0) مستوى w.

٢) ب أن ا طوط الأفقية مستوى z تتحول إ قطع ناقص مستوى w عندما يكون $w=\sin z$ وما هو ويل ا طوط الرأسية وما هو التغ الذي سيطرأ على التحويل بأخذ $w=\sin\bar{z}$.

٣) إذا كان $w = u + iv$ فأوجد u, v عندما

$$i)\ w=\frac{a}{z}+z \quad , \quad ii)\ w=ae^{z}$$

$$iii)\ w=z^{4} \quad , \quad iv)\ w=\ln(z-z_0)$$

٤) إذا كان $w=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$ فأوجد ويل الأشكال الآتية مستوى z

$$i)|z|=R$$

$$ii)\ Arg\ z=\alpha \quad , \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

حيث α : ثابت

$$iii)\ Arg\ z=-\frac{\pi}{2}$$

٥) إذا كانت $w=e^{i\theta_0}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ يث يكون

$$\lim_{z\to\infty} w=-1 \quad , \quad \lim_{z\to i} w=0$$

فأوجد $w(z)$.

٦) اثبت أن التحويلة $w = az + b$, $a,b\in z$ افظ على الأشكال الدائرية.

٧) أوجد النقاط الثابتة للتحويلة $w=\frac{2z-5}{z+4}$

ملاحظة: النقاط الثابتة هي ال عندها $w = z$

ا واب $(z = -1\pm 2i)$

٨) إذا كانت $w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ .. فأوجد صورة التحويلة الـ ول النقاط $z = 0, -i, -1$ إ $w = i, 1, 0$ على الترتيب.

ا واب $w=\frac{i(1+z)}{1-z}$

٩) ا سألة السابقة أوجد التحويل الذي ول $(-i, 0, i)$ إ $(-1, i, 1)$ على الترتيب .. ومن أوجد صورة ا ور التخيلي مستوى z.

ا واب $w=\frac{z-1}{i(1+z)}$ ، دائرة

١٠) اثبت أن التحويلة ا زدوجة ا طية $w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}$ حيث $|\alpha|<1$ ول

$|z| = 1$ (i) إ $|w| = 1$

$|z| < 1$ (ii) إ $|w| < 1$

ملاحظة: (ضع $z=e^{i\psi}$, $\alpha=be^{i\lambda}$ حيث $0<b<1$ أوجد $|w|^2$ لإثبات (i) وضع $z=re^{i\psi}, r<1$ حالة (ii).

١١) أوجد a, R الـ $w=\frac{az-1}{z-i}$ ول $|z| = 1$ إ $|w|=R$

ا واب $(R=1 \quad , \quad a = -i)$

١٢) إذا كانت z_0 نقطة نصف مستوى z الأعلى $(z_0=x_0+iy_0,\ y_0>0)$ فبـ أن $w=e^{i\theta_0}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ ول نصف ا ستوى الأعلى مستوى z إ القرص $|w|\le 1$.

١٣) اثبت أن $w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ (ما يسمى زدوج ا طية) افظ على الأشكال الدائرية.

١٤) اثبت أن $w=\frac{z-\frac{1}{2}i}{-\frac{1}{2}i\,z-1}$ ول الدائرة $|z| = 1$ إ الدائرة $|w| = 1$.

١٥) اثبت ا تطابقات ا امة للدوال ا ركبة ا ثلثية والزائدية.

١٦) أوجد أصفار الدوال sin z و sinh z و cos z و coshz

١٧) ناقش وجود النهايات الآتية

i) $\sin \bar{z}$ عند الصفر ii) $\cos \bar{z}$ عند الصفر

iii) $e^{\bar{z}/z}$ عند الصفر

١٨) اثبت أن $\lim_{z \to 0} f(\bar{z})$ غ موجود.

١٩) ناقش تفرع الدالة $w = \ln (z-z_0)$ حول النقطة z_0.
