7 نظرية ذات الحدين
Binomial Theorem

من النظريات الهامة في علم الجبر نظرية ذات الحدين وعلاقتها الوطيدة بالمتسلسلات اللانهائية، وهي من مفارقات علم الجبر إذ أن الكمية ذات الحدين الأثنين يمكن التعبير عنها بمتسلسلة لانهائية أي ذات عدد غير محدود من الحدود. أيضاً من دراسة هذه النظرية نكتشف افروق المذهلة التي يمكن تحدث عند أختلاف الأس من عدد موجب إلى عدد سالب أو من عدد صحيح إلى عدد كسري. على أية حال فهذه النظرية شائعة الأستعمال والتطبيق تقريبا في معظم العلوم الطبيعية والتطبيقية بل والأقتصادية أيضاً.

7.1 مقدمة

نعلم من دراستنا السابقة كيف يمكن أن تعامل مع الأقواس المرفوعة للأسس 2,3,4 بسهولة فنجد مثلاً أن

$$\begin{aligned}
(1+x)^2 &= 1+2x+x^2 \\
(1+x)^3 &= 1+3x+3x^2+x^3 \qquad (7.1) \\
(1+x)^4 &= 1+4x+6x^2+4x^3+x^4
\end{aligned}$$

الآن كيف يمكن لنا أن نعرف القاعدة التي على أساسها يمكن فك القوس لأي أس أو أي قوى مهما كانت؟ الإجابة على هذه التساؤلات تقدمها النظرية الآتية

نظرية 7.1 — نظرية ذات الحدين

(1)إذا كان n عدد صحيح موجب فإن

$$(1+x)^n = 1 + C_1^n x + C_2^n x^2 + C_3^n x^3 + \cdots + C_r^n x^r + \cdots + C_{n-1}^n x^{n-1} + x^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n x^r \qquad (7.2)$$

حيث

$$C_r^n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

لاحظ أن

$$C_0^n = C_n^n = \frac{n!}{0! \times n!} = 1$$

حيث $0! = 1$.

(2)في حالة أن n ليس عدداً صحيحاً موجباً (عدد كسري موجب أو سالب) فإن

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r + \cdots \qquad (7.3)$$

أو

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} x^r \qquad (7.4)$$

وهذه الأخيرة (7.4) متسلسلة لا نهائية. شرط أن يكون لها مجموع هو أن يقع x فى الفترة $-1 < x < 1$ أي يجب أن يكون $|x| < 1$.

✪✪✪

تطبيقات

إذا تم إعطاء قيم x بحيث يكون $x = 1, -1$ نحصل على بعض العلاقات الهامة

(1) بوضع $x = 1$ في (7.2) نحصل على

$$(1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n (1)^r \, 2^n \Rightarrow 2^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n \qquad (7.5)$$

$$2^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (7.6)$$

(2) بوضع $x = -1$ في (7.2) نحصل على

$$0 = \sum_{r=0}^{n} (-1)^n C_r^n \qquad (7.7)$$

(3) بوضع $n=-1$ في (7.2) نحصل على

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^r x^r+\cdots \tag{7.8}$$

(4) بوضع $-x$ بدلاً x في (7.2) نحصل على

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^r+\cdots \tag{7.9}$$

(5) بوضع $n=-2$ في (7.2) نحصل على

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots+(-1)^r(r+1)x^r+\cdots \tag{7.10}$$

7.2 مفكوك $(a+b)^n$

في هذا الفصل نستخدم نظرية ذات الحدين في الحصول على الشكل العام لمفطوك الكمية $(a+b)^n$ حيث a,b أي أعداد. بما أن

$$(a+b)^n=\left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$$

و باستخدام النظرية 7.1 نجد أن

$$(a+b)^n=a^n\sum_{r=0}^{n}C_r^n\left(\frac{b}{a}\right)^r=\sum_{r=0}^{n}C_r^n a^{n-r}b^r$$

أى أن

$$(a+b)^n=C_0^n a^{n-0}b^0+C_1^n a^{n-1}b+C_2^n a^{n-2}b^2+\ldots$$

$$\ldots + C^{n}_{n-1} ab^{n-1} + C^{n}_{n} a^{n-n} b^{r}$$

أو

$$(a+b)^n = a^n + C^{n}_{1} a^{n-1} b + C^{n}_{2} a^{n-2} b^2 + \ldots \qquad (7.11)$$

$$\ldots + C^{n}_{n-1} ab^{n-1} + b^{r}$$

مثال 7.1 أوجد الأربعة حدود الأولى من مفكوك

$$(1-x)^{\frac{3}{4}}$$

الحل لدينا

$$(1-x)^{\frac{3}{4}} = 1 + \frac{3}{4}(-x) + \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)}{2!}(-x)^2$$

$$+ \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)\left(\frac{3}{4}-2\right)}{3!}(-x)^3 + \ldots$$

$$= 1 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{32}x^2 - \frac{5}{128}x^3 \;;\; |x| < 1$$

مثال 7.2 اثبت أن مجموع المتسلسلة

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2!3^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!3^3} + \cdots$$

إلى اللانهاية يساوي $\sqrt{3}$.

الحل نفرض أن هذه المتسلسلة هي على صورة مفكوك ذات الحـــدين ،

أي نفرض أن

$$\left(1+x\right)^{n}=1+\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2!3^{2}}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!3^{3}}+\cdots$$

وإذا فرضنا أن $|x|<1$، فإن الطرف الأيسر يساوي

$$\left(1+x\right)^{n}=1+nx+\frac{n\left(n-1\right)}{2!}x^{2}+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{3!}x^{3}+\ldots$$

وبالتالي فإن

$$1+nx+\frac{n\left(n-1\right)}{2!}x^{2}+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{3!}x^{3}+\ldots$$
$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2!3^{2}}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!3^{3}}+\cdots$$

بمساواة الحدود فى الطرفين نحصل على

$$nx=\frac{1}{3},\ \ n\left(n-1\right)x^{2}=\frac{1}{3},\ \ n\left(n-1\right)\left(n-2\right)x^{3}=\frac{5}{9}$$

و بحل المعادلتين

$$nx=\frac{1}{3},\ \ n\left(n-1\right)x^{2}=\frac{1}{3}$$

ينتج أن

$$n=-\frac{1}{2},x=-\frac{2}{3}$$

وبالتعويض فى الصورة رقم (7.2) عن قيمة n,x، نجد أن

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3} \tag{7.12}$$

مثال 7.3 استخدم نظرية ذات الحدين في حساب $\sqrt[3]{37}, \sqrt{37}$.

الحل باستخدام نظرية ذات الحدين حيث $n = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{36}$ وبما أن $|x| < 1$، إذن

$$\sqrt{37} = (36+1)^{\frac{1}{2}} = 6\left(1+\frac{1}{36}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 6\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{36}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{36}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{36}\right)^3-\cdots\right]$$

$$= 6\left(1+\frac{1}{72}-\frac{1}{10368}+\frac{1}{746496}-\cdots\right) =$$

$$= 6(1+0.01389-0.00009+0.0000) = 6.820$$

أيضاً، بما أن $27 \times 37 = 999$، إذن فإن $37 = \frac{999}{27}$ وبالتالي نجد أن

$$\sqrt[3]{37} = (37)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{999}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(999)^{\frac{1}{3}}}{(27)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}(1000-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{10}{3}\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{10}{3}\left(1-\frac{1}{3000}-\frac{1}{9000000}\right) = 3.33333-0.011 = 3.33222$$

7.3 مسائل

(1) أوجد الأربعة حدود الأولى في مفكوك الكميات الآتية:

$\left(1+x^2\right)^{-2}$	$(8+12x)^{\frac{2}{3}}$	$(1+3x)^{-\frac{1}{2}}$	$\dfrac{1}{\left(1-x^2\right)^3}$
$(16-3x)^{\frac{5}{4}}$	$(16-x)^{-\frac{5}{4}}$	$(1+3x)^{-\frac{1}{4}}$	$\dfrac{1}{\left(1-2x^2\right)^3}$

(2) أوجد الثلاثة حدود الأولى فى مفكوك الكميات

$\dfrac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{(1+2x)^{\frac{3}{4}}}$	$\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1+2x)^{\frac{3}{4}}}$	$\dfrac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{(1-2x)^{\frac{3}{5}}}$	$\dfrac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{(1+x)^{\frac{1}{4}}}$

(3) إذا كان $x > y$ أوجد الحد الخامس فى مفكوك الكميات

$\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^{-4}$	$\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^{-2}$	$\left(\sqrt{\dfrac{x}{3y}}-\sqrt{\dfrac{y}{2x}}\right)^{-4}$

(4) اثبت أنة إذا كان x صغير بحيث يمكن إهمال قوى x^4 والقوى الاعلى، فإن

$$\frac{\left(1-\frac{1}{2}x\right)^2(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{3}}}=1-\frac{9}{4}x^2+\frac{5}{4}x^3$$

****