6 الطرق التكرارية
Iterative Methods

في الباب الرابع أمكن الحصول على حلول لنظم المعادلات الجبرية الخطية، وذلك في حالات مختلفة (نظم متجانسة، نظم غير متجانسة، نظم مربعة، أو نظم غير مربعة)، وذلك باستخدام الطرق المباشرة *(Direct Methods)*، والتي كانت تعطي حلولاً مضبوطة.

فإذا كان النظام كبيراً من ناحية عدد المعادلات أو عدد المجاهيل، أو احتوت مصفوفة معاملاته على أعدادٍ عشرية، فإن الخطأ الناتج عن كثرة العمليات الحسابية يزداد، وبالتالي يزداد خطأ التقريب.

الباب الحالي يقدم نوعاً جديداً من التقنيات *(Techniques)* لحل أنظمة المعادلات الجبرية الخطية. هذه التقنيات تسمى "الطرق التكرارية" *(Iterative Methods)*، غير أن هذه الطرق التكرارية سوف تستخدم في حالة النظم الخطية غير المتجانسة والمربعة فقط، وذلك بعد أن يتم تحويلها ــ بالطبع ــ إلى الشكل المصفوفي.

في الواقع إنَّ الفائدة الكبيرة لهذه الطرق التكرارية تكمن في كونِها قادرة على إعطاء حلول أفضل من المعطاة بواسطة الطرق المباشرة، وخصوصاً في حالة النظم الكبيرة أو التي تحتوي مصفوفات معاملاتها على أعدادٍ عشرية كبيرة. أيضاً عندما تكون مصفوفة معاملات النظام من النوع الذي يسمى بالإنجليزية *(Sparse)*، وهي تلك المصفوفة التي يكون فيها أكبر عدد من عناصرها أصفاراً فإن استخدام الطرق التكرارية يكون أفضل من الطرق المباشرة لأنه، يقلل خطأ الحسابات ووقتها أيضاً.

6.1 الطرق التـــــكرارية – Iterative Methods

هذه الطرق تعتمد ــ في البداية ــ على اســتخدام تقريـــب أولي *(Initial Approximation)* للحل بغرض الحصول منه علـــى مـــا يسمى بالتقريب الصفري للحل *(Zero Approximation)*. حيث يمكن بعد ذلك استخدام التقريب الصفري للحصول على التقريب الأول *(First Approximation)*؛ وبالتكرار (لهذا السبب تـــسمى الطريقة بالطريقة التكرارية أو الطريقة المتتالية) يمكن الحصول على التقريب الثاني فالتقريب الثالث، وهكذا نستمر في هذه العملية حتى ثبات الحل، وعندها تنتهي الطريقة ونحصل على أدق تقريب يكون قريباً من الحل المضبوط *(Close to the Exact)*. لنفرض ــ مثلاً ــ النظام

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \qquad (6.1)$$

من الواضح أن هذا نظام من المعادلات الجبرية الخطية غير المتجانس، يتكون من عدد n من المعادلات، وعدد n مجهول $\{x_i\}_{i=1}^{n}$؛ حيث مصفوفة معاملاته a_{ij} من الرتبة $n \times n$ وتحتوي مصفوفة الهـــدف على عدد n من الحدود المطلقة $b_j\,, j = \overline{1,n}$.

لنفرض أن المطلوب هو إيجاد حل لهذا النظام، أي أن المطلوب هـــو إيجاد قيم كل المجاهيل $\{x_i\}_{i=1}^{n}$، والتي تحقق النظام. لنــضع ـــ أولاً ـــ النظام (5.1) في الصورة المصفوفية

$$AX = B \tag{6.2}$$

هنا المصفوفة X هي مصفوفة الحل أو مصفوفة المجاهيــل المطلــوب إيجاد قيم عناصرها، بينما المصفوفة B هي مصفوفة الهدف المعطــاة. أما المصفوفة A فهي مصفوفة المعاملات والمعطاة أيضاً.

لنفرض أن $X^{(0)}$ ترمز لمصفوفة الحل التقريبي الصفري، ولنفــرض أن هذه المصفوفة $X^{(0)}$ قد تم الحصول عليها باستخدام تقريب أولي مناسب.

بما أن $X^{(0)}$ تعتبر حلاً للنظام (6.2)، إذن، فبالتعويض بها في النظام (6.2) فإنها تحققه، وبالتالي نحصل على حل تقريبي آخر هـــو الحـــل التقريبي الأول، نرمز له بالرمز $X^{(1)}$. وبالاســـتمرار في الحـــصول على الحلول المتتالية أو التكرارية يمكن أن نحصل علـــى التقريـــب الثاني، ثم الثالث، وهكذا حتى نحصل في النهاية على متتابعة الحلول التقريبية $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$. هذا، وليس من الضروري أن يوجد للنظام حلل تكراري، إذ توجد شروط معينة لضمان تقارب متتابعة الحلول

التقريبية $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ إلى مصفوفة الحل المضبوط X. فإذا كان ما يسمى "نصف قطر الطيـــف" *(Spectral Radius)* لمـــا يـــسمى "بالمصفوفة التكرارية" *(Iteration Matrix)* أقـــل مـــن الواحـــد الصحيح فإن الحل يكون تقاربياً ــ كما سنرى. ويجب التنويـــه إلى أن نجاح الطرق التكرارية يعتمد بالدرجة الأولي علـــى نجاحـــك في اختيار التقريب الصفري، وعلى معدل التقارب لمتتابعـــة الحلـــول التكرارية $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$. فكلما كان نصف قطر الطيف صغيراً كلما كان التقارب سريعاً. وسوف نقدم طريقتين للحصول على الحلول التقريبية بواسطة الطرق التكرارية. الطريقة الأولي تسمى طريقـــة جاكوبي، والطريقة الثانية تسمى طريقة زايدل.

6.2 طريقة جـــاكوبي - Jacobi Iterative Method

تتكون هذه الطريقة من عدة خطوات متتالية تنتهي بالحصول علـــى الحل التكراري. لنعتبر النظام غير المتجـــانس (5.1)، ولنفـــرض أن المعـــاملات، a_{ii}، هـــي معـــاملات غـــير صـــفرية، بمعـــنى أن $a_{ii} \neq 0 \ \forall i = \overline{1,n}$.

الآن يتم قسمة المعادلة الأولي في النظام (5.1) على العنـــصر غـــير الصفري a_{11}، وقسمة المعادلة الثانية على العنصر غـــير الـــصفري

a_{22}، وهكذا حتى نصل إلى المعادلة الأخيرة، والتي يتم قسمتها ـ أيضاً ـ على العنصر غير الصفري a_{nn} فيتحول بـذلك النظـام (6.1) إلى النظام

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\
x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n \\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

لتبسيط هذا النظام يـتم اسـتبدال العناصـر $T_1, T_2, ..., T_n$ بالعناصر $\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{22}}, ..., \frac{b_n}{a_{nn}}$ على الترتيب. كما يتم ـ أيضاً ـ استبدال العناصـر c_{ij} بالعناصـر $-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$، حيـث $i = \overline{1,n}$، $j = \overline{1,n}$ فيتحول بذلك النظام (6.3) إلى الشكل

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

أو الشكل المصفوفي

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} + \mathbf{C}\mathbf{X} \tag{6.5}$$

حيث

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix} ;$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ldots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

إن طريقة جاكوبي للتقريب المتتالي نسبة إلى عالم الرياضيات الألماني جاكوبي (*Jacobi*, 1804 - 1851) تفترض تقريباً أو حلاً مبــدئياً كحل النظام (6.5) هو التقريب $\mathbf{X} = \mathbf{O}$. حيث ترمز المصفوفة $\mathbf{O}$ للمصفوفة الصفرية، أي أن التقريب المبدئي هو

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

هذا، ولأن $X = O$ يعتبر حلاً للمعادلة المصفوفية أو النظــام (6.5) إذن فهو يحققها، إذن وبالتعويض من (6.6) في الطرف الأيمن مــن المعادلة المصفوفية (6.5) نحصل على الحل التقريبي الصفري $X^{(0)}$، والذي يأخذ عندئذٍ الشكل

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

أو

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} = T \tag{6.8}$$

الآن يمكن اعتبار $X^{(0)} = T$ المعطــى في (6.8) حــلاً للمعادلــة المصفوفية أو النظام (6.5)، وبالتالي فهو يحققها. إذن وبالتعويض عن

$X^{(0)}=T$ في الطرف الأيمن من المعادلة (6.5) نحصل على الحـــل التقريبي الأول $X^{(1)}$، والذي يأخذ عندئذٍ الشكل

$$X^{(1)}=\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} \qquad (6.9)$$

أو

$$X^{(1)}=T+CX^{(0)} \qquad (6.10)$$

هكذا، وبالتكرار يمكن أن نحصل على التقريـــب $X^{(k+1)}$ كحـــل تقريبي تكراري، وذلك من القانون

$$X^{(k+1)}=T+CX^{(k)}; \quad k\geq 0 \qquad (6.11)$$

فإذا تقاربت فئة الحلول التقريبية التكرارية $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ إلى النهاية $\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)}$، وكانت هذه النهاية موجودة بمعنى أنها تساوي عدداً حقيقياً، فعندئذٍ نقول أن الحل التقريبي التكراري للنظام (6.5) أو ــ بالأحرى ــ النظام (6.1) هو X حيث

$$X=\lim_{k\to\infty} X^{(k)} \qquad (6.12)$$

مثال 6.1 أوجد حل النظام

$$8x_1 + x_2 + x_3 = 26$$
$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$$
$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 7$$

الحل هذا نظام خطي غير متجانس من المعادلات الجبرية. بدايــــةً يــــتم اختزال النظام المعطى إلى الشكل

$$x_1 = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}x_2 - \frac{1}{8}x_3$$
$$x_2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3$$
$$x_3 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2$$

أو

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{8} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{(i)}$$

حيث نجد أن

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{26}{8} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام (6.8) نحصل على التقريب الصفري، والذي يـــساوي عمود الحدود الثابتة، أي أن

$$\mathbf{X}^{(0)}=\begin{bmatrix}x_1^{(0)}\\x_2^{(0)}\\x_3^{(0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{26}{8}\\\frac{7}{5}\\\frac{7}{5}\end{bmatrix}\qquad\text{(ii)}$$

بالتعويض عن التقريب الصفري، $\mathbf{X}^{(0)}$، مـــن (ii) في النظـــام (i) نحصل على التقريب الأول $\mathbf{X}^{(1)}$، إذن

$$X^{(1)}=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\\x_3^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{26}{8}\\\frac{7}{5}\\\frac{7}{5}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}\\-\frac{1}{5}&0&\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{26}{8}\\\frac{7}{5}\\\frac{7}{5}\end{bmatrix}\qquad\text{(iii)}$$

أو

$$\mathbf{X}^{(1)}=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\\x_3^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.90\\1.03\\1.03\end{bmatrix}$$

بالتعويض عن التقريب الأول، $\mathbf{X}^{(1)}$، من (iii) في النظام (i) نحصل على التقريب الثاني $\mathbf{X}^{(2)}$، إذن

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{8} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.9 \\ 1.03 \\ 1.03 \end{bmatrix}$$

أو

$$\mathbf{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9925 \\ 1.0260 \\ 1.0260 \end{bmatrix} \qquad \text{(iii)}$$

وبالاستمرار نجد أن

$$\mathbf{X}^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9935 \\ 1.0670 \\ 1.0670 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{(4)} = \begin{bmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.998325 \\ 1.02640 \\ 1.02640 \end{bmatrix}$$

والتقريب الخامس هو

$$\mathbf{X}^{(5)} = \begin{bmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \\ x_3^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.99934 \\ 1.06863 \\ 1.06863 \end{bmatrix}$$

ونكتفي بالتقريب الخامس، وذلك لأن الفرق بينه وبـين التقريـب الرابع بسيط جداً، الأمر الذي يعني ثبات الحل، وإذا رمزنا للحـل $X^{(5)}$ بالرمز $\tilde{X}$ ، فإن الحل التقريبي التكراري للنظام المعطى يكون

$$\tilde{X} = [2.9993 \quad 1.0009 \quad 1.0009]^{t} \qquad \text{(iv)}$$

✍.

هذا الحل

يعتبر حلاً رائعاً إذ بإمكانك التأكد من أن الحل الفعلـي *(Actual Solution)* أو الحل المضبوط لهذا النظام ــــ والذي يمكن الحصول عليه بأكثر من طريقة ــــ هــو

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

ملاحظة

في الواقع يمكنك الحصول علــى الحـــل المـــضبوط باستخدام طريقة جاكوبي التكرارية بعد ثماني عمليات تكرارية. إذ أن

$$X^{(8)} = \begin{bmatrix} x_1^{(8)} \\ x_2^{(8)} \\ x_3^{(8)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

سنحاول ــ الآن ــ دراسة الشروط، التي يجب توافرها في النظــام الخطي لكي يوجد له حل تكراري، وكذلك سنحاول معرفة كــم عدد الخطوات التكرارية اللازمة للحصول على الحل التكــراري، الذي يتقارب إلى الحل المضبوط. على أننـــا في حاجــة ــ الآن ــ لتقديم بعض التعريفات والنظريات الضرورية لمعرفة تقارب الحلول التكرارية. ولكن قبل تقديم هذه التعريفات دعنا نتفق ــ بدايـــةً ــ على أن الأشياء ذات الطبيعة الواحدة يمكن أن تختلف بعضها عـــن البعض في الصفات والخصائص. وللتمييز بين هذه الأشياء ــ عادة ما نبحث عن الحجم، الطول، المقدار، الوزن وغيره. فمثلاً بالنسبة إلى الأعداد الحقيقية نستخدم مفهوم المقياس *(Modulus)* لمعرفـــة مقدار *(Magnitude)* العدد.

بالنسبة للمصفوفات فالأمر يختلف. ولِذا فالسؤال الـــذي يطـــرح نفسه هو كيفية معرفة مقدار المصفوفة!! بالتأكيد لايوجد للمصفوفة مقدار، وذلك لأنها ببساطة عبارة عن ترتيب معين مـــن الأشـــياء. فحتى ولو كانت هذه الأشياء أعداداً فلا يمكـــن معرفـــة مقـــدار المصفوفة لأننا لانعرف أي عدد من عناصر المصفوفة هو الذي يحدد مقدارها فهناك عناصر كبيرة في المقدار، وهناك عناصر صغيرة. من هنا جاء مفهوم المعيار *(Norm)*، والذي يميز بين مصفوفة ومصفوفة

أخرى طبقاً لمقادير جميع عناصرها ككل. وهكذا يمكن أن نقول أن للعدد يوجد **مقدار**، أما المصفوفة فيوجد لها **معيار**.

هذا، وتوجد أنواع كثيرة ومتنوعة من المعيـــارات للمـــصفوفات. فيوجد المعيار باستخدام كل مكونـــات المـــصفوفة أي الـــصفوف والأعمدة، ويوجد معيار بالنسبة لصفوف المصفوفة فقط، كما يوجد معيار بالنسبة للأعمدة فقط.

تعريف 6.1

معيــــار المــتجه
Norm of a Vector

لنفرض أن الفئة R^n هي فئة كل مصفوفات العمود، والتي عـــدد صفوفها العدد n وكل عناصرها أعداد حقيقية.

ولنفرض أن X مصفوفة عمود تنتمي إلى الفئة R^n. **يُعرَّف "معيار"** مصفوفة العمود X، والمعرفة على الفئة R^n على أنه دالة من الفئة R^n إلى مجال الأعداد الحقيقية R. فإذا رمزنا لهذا المعيـــار بـــالرمز $\|X\|$ فإن هذا المعيار يجب أن يحقق الأربعة شروط التالية:

$$(1)\ \|X\| \geq 0 \quad \forall\ X \in R^n$$

$$(2)\ \|X\| = 0 \ \text{ iff } \ X = O \ ; \ O - \textit{Zero Column Matrix}$$

$$(3)\ \|\alpha X\| = \|\alpha\| \cdot \|X\| \quad \forall\ \alpha \in R,\ X \in R^n$$

$$(4)\ \|X + Y\| \leq \|X + Y\| \quad \forall\ X, Y \in R^n$$

▲▲▲

هذا، وتجدر الإشارة إلى أنه يوجد نـــوعين مـــن معيـــار مـــصفوفة العمود $X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{bmatrix}^t$. النوع الأول نرمز له بالرمز $\|X\|_2$، والنوع الثاني نرمز له بالرمز $\|X\|_\infty$، وهما يعرفان ــ على الترتب ــ في الأشكال

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2} \quad \& \quad \|X\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \|x_i\| \tag{6.13}$$

لنعتبر مصفوفتي العمود X, Y حيث $X,Y \in R^n$ على النحو التالي

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \quad \& \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$$

إذن فإن

$$\|X-Y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \tag{6.14}$$

$$\|X-Y\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \|x_i - y_i\|$$

▲▲▲

تنويه

إذا فرضنا مصفوفة العمـــود $X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^t$. فإننا نكتشف من (6.13) أن المعيار $\|X\|_2$ مـــا هـــو إلا طول المسافة المستقيمة $d(P,O)$ من نقطـــة الأصـــل $O(0,0,0)$ إلى النقطة $P(x_1,x_2,x_3)$. إذن

$$d(P,O)=\sqrt{(x_1-0)^2+(x_2-0)^2+(x_3-0)^2}$$
$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}$$

لهذا السبب فإن المعيار الذي من النـــوع $\|X\|_2$ يـــسمى بالمعيـــار الأقليدي *(Euclidean Norm)* لمصفوفة العمود X.

مثـــال توضيحي

لنفرض أن X هو (مصفوفة عمود) أو متجـــه الحـــل المضبوط لنظام ما من المعادلات الجبرية الخطية من الرتبة الثالثة، ولنفرض أن المتجه $\tilde{X}$ هو متجه الحل التكراري باستخدام طريقة جاكوبي التكرارية بحيث كان

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\quad \tilde{X}=\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\\tilde{x}_2\\\tilde{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.2001\\1.9999\\-1.1000\end{bmatrix}$$

إذن فإن

<u>بالنسبة للمتجه</u> X

$$\|X\|_\infty=\max\{\|1\|,\|2\|,\|-1\|\}=\max\{1,2,1\}=2,$$

$$\|X\|_2=\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}\approx 2.45\ ;$$

<u>بالنسبة للمتجه</u> $\tilde{X}$

$$\|\tilde{X}\|_\infty=\max\{\|1.2001\|,\|1.9999\|,\|-1.1000\|\}$$

$$= \max\{1.2001, 1.9999, 1.1000\} = 1.9999\,;$$

$$\|\tilde{X}\|_2 = \sqrt{(1.2001)^2 + (1.9999)^2 + (-1.100)^2} \approx 2.58\,;$$

ايضاً فإن

$$\|X - \tilde{X}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x}_i)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - \tilde{x}_1)^2 + (x_2 - \tilde{x}_2)^2 + (x_3 - \tilde{x}_3)^2}$$

$$= \sqrt{(1 - 1.2001)^2 + (2 - 1.9999)^2 + (-1 + 1.1000)^2} \approx 0.2237$$

كما أن

$$\|X - \tilde{X}\|_\infty = \max_{1 \le i \le 3} \|x_i - \tilde{x}_i\| = \max\{0.2001, 0, 0.1\} = 0.2001$$

نظرية ـ 6.1

تقارب الحلول الـــــتكرارية Convergence Theorem

لنفرض أن $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ هي متتابعة *(Sequence)* من المتجهات في الفئة R^n حيث $X^{(k)} = \left[x_1^{(k)} \;\; x_2^{(k)} \;\; \ldots \;\; x_n^{(k)}\right]^t$ إذن فإن:

(1) المتتابعة $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ تتقارب في الفئة R^n إلى المتجه الوحيـــد X *(Unique Vector)* بالنـــسبة إلى المعيـــار $\|\;\|_\infty$ ، حيـــث $X = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4]^t$ إذا كان وفقط إذا كان

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i \quad \forall\, i=\overline{1,n} \tag{6.15}$$

(2) المعيار $\|X\|_2$ يمكن الحصول عليه باستخدام العلاقة

$$\|X\|_\infty \le \|X\|_2 \le \sqrt{n}\,\|X\|_\infty \quad \forall\, X\in R^n \tag{6.16}$$

✪✪✪

مثال 6.2 ادرس في الفئة R^5 تقارب المتتابعة

$$\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

$$X^{(k)} = \left[2 \quad \left(1+\frac{1}{k}\right) \quad \frac{1}{k^2} \quad e^{-4k} \quad \cos\left(\frac{1}{k}\right)\right]^t$$

الحل من نظرية (6.1) نجد أن

$$\lim_{k\to\infty} x_1^{(k)} = \lim_{k\to\infty}(2)=2,\quad \lim_{k\to\infty} x_2^{(k)} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)=1$$

$$\lim_{k\to\infty} x_3^{(k)} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)=0,\quad \lim_{k\to\infty} x_4^{(k)} = \lim_{k\to\infty}\left(e^{-4k}\right)=0$$

$$\lim_{k\to\infty} x_5^{(k)} = \lim_{k\to\infty}\left(\cos\frac{1}{k}\right)=1$$

هكذا نجد أن المتتابعة $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ تتقارب بالنـــسبة إلى المعيـــار $\|\ \|_\infty$ إلى المتجه $X=[2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^t$.

✍.

تعريف 6.2

مـــــعيار المصفوفة
Norm of a Matrix

يُعرف معيار (يرمز له بالرمز $\|\ \|$) أية مصفوفة في الفئة Ω_n ، حيث Ω_n هي فئة كل المصفوفات المربعة من الرتبة $n \times n$ على أنه دالة في المتغير الحقيقي *(Real-Valued Function)* وبحيث يحقق لأيـــة مصفوفتين A,B في الفئة Ω_n الخمسة شروط التالية:

(1) $\|A\| \geq 0$

(2) $\|A\| = 0$ iff $A = O$; O-*Zero Matrix*

(3) $\|\alpha A\| = \|\alpha\| \cdot \|A\|$

(4) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(5) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

▲▲▲

هذا

وكما عرفنا نوعين من معيارات مصفوفة العمود نعَّرف الآن نوعين من معيارات المصفوفة تسمى المعيارات الطبيعية للمصفوفة.

النوع الأول يرمز له بالرمز $\|A\|_2$، والنوع الثاني يرمز له بـــالرمز $\|A\|_\infty$، وهما يعرفان في الأشكال على النرتيب

$$\|A\|_2 = \max_{\|X\|_2 = 1} \|AX\|_2 \quad \& \quad \|A\|_\infty = \max_{\|X\|_\infty = 1} \|AX\|_\infty \qquad (6.17)$$

هذا، ويمكن ـــ أيضاً ـــ تعريف المسافة بين المصفوفتين A,B في الفئة Ω_n بالنسبة إلى معيار المصفوفة $\|\ \|$ على أنها $\|A - B\|$.

▲▲▲

تعريف 6.3 — نصف قطر الطيـــــف للمصفوفة Spectral Radius of a Matrix

يُعرَّف نصف قطر الطيف للمصفوفة $A=(a_{ij})$ مـــن الرتبـــة n ويرمز له بالرمز $\rho(A)$ على أنه

$$\rho(A)=\max|\lambda_i| \tag{6.18}$$

حيث λ_i هي القيم المميزة (*Eigenvalues*) للمصفوفة A. على أنه إذا كانت القيمة المميزة عدداً مركباً في الـــشكل $\lambda=\alpha+\beta i$ مثلاً فإن

$$|\lambda|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

▲▲▲

نظرية ـ 6.2 — حساب معيار المصفوفة

يمكن حساب المعيارين $\|A\|_2$ ، $\|A\|_\infty$ للمصفوفة A في الفئة Ω_n، حيث $A=(a_{ij});\ i,j=\overline{1,n}$

من العلاقتين :

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \tag{6.19}$$

$$\|A\|_2=\left(\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.20}$$

حيث λ_i هي القيم المميزة لحاصل ضــرب المــصفوفتين $A^t A$، بالطبع A^t هو مدور *(Transpose)* المصفوفة A. كما أن

$$\rho(A) \le \|A\|, \textit{ for any norm } \| \ \| \qquad (6.21)$$

✪✪✪

نلاحظ أن الصورة (5.20) من النظرية (5.2) تأخذ الشكل

$$\|A\|_2 = \left(\rho\left(A^t A\right)\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (6.22)$$

مثال 6.3 أوجد المعيارين $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$، إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل بتطبيق النظرية (6.2) نجد أن

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{1j}| = |1| + |1| + |0| = 2; \quad \sum_{j=1}^{3} |a_{2j}| = |1| + |2| + |1| = 4;$$

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{3j}| = |-1| + |1| + |2| = 4$$

وبالتالي فإن (6.19) تُعطي

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max\{2,\ 4,\ 4\} = 4$$

أيضاً فإن

$$A^t A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & 6 & 4\\ -1 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

إذن فإن

$$\left|\mathbf{A}^t\,\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & -1\\ 2 & 6-\lambda & 4\\ -1 & 4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0$$

إذن، فالقيم المميزة هي

$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=4.3542,\ \lambda_3=9.6450$$

وبالتالي نجد من العلاقة (6.20) أن

$$\|\mathbf{A}\|_2=\left(\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\max\{0,\ 4.3542,\ 9.6450\}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 3.1$$

6.3 شروط التقارب للحلول الـــتكرارية Convergence Conditions

بداية يجب ملاحظة أن حل أي نظام خطي غـــير متجـــانس مـــن المعادلات مثل النظام $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ المعطى في (5.1) يتطلب أن تكـــون المعاملات $\{a_{ii}\}_{i=1}^{n}$ معاملات غير صفرية، أي

يتطلب أن يكون $a_{ii} \neq 0; i = 1,n$. فإذا كانت هناك معاملات من النوع $\{a_{ii}\}_{i=1}^{n}$ صفرية فيجب إعادة ترتيب النظام حتى لاتكون هناك أية معاملات صفرية من المعاملات $\{a_{ii}\}_{i=1}^{n}$.

ثانية، يجب الأخذ في الاعتبار أنه كلما كانت المعاملات $\{a_{ii}\}_{i=1}^{n}$ كبيرة في المقدار بدرجة كافية فإن هذا يسرع عملية تقارب الحـــل، وبالتالي يقلل من عمليات التكرار *(Iterations)*، أيضاً قد ذكرنا أن عملية التكرار للحصول على متتابعة الحلول التكراريـــة يجـــب أن تتوقف بمجرد ثبات الحل التكراري؛ بمعنى أن يكون الفرق بين حلين متتالين يقترب من الصفر، أو أن يكون هذا الفرق ثابتاً، هذا يعـــني — رياضياً — أن عملية التكرار يجب أن تتوقف بمجرد أن تتحقـــق المتباينة التالية

$$\frac{\left\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right\|}{\left\| X^{(k)} \right\|} < \delta \; ; \quad \delta > 0 \tag{6.2:}$$

حيث يمكنك — الآن — مقارنة هذه المتباينة مع مفهوم الخطأ النسبى في الباب الصفري من كتاب التحليل العددي التطبيقي للمؤلـــف، توزيع الأهرام. واليك الآن نظرية تقـــارب الحلـــول التكراريـــة، وحساب الخطأ الناتج عن استخدام طريقة جاكوبي التكرارية.

نظرية ـ 6.3 حساب خطأ الحلول التكرارية

إذا أمكن وضع النظام (5.1) على الشكل $X = T + CX$ كمـا في (5.5) وكان معيار المصفوفة التكرارية C أقل من الواحد الصحيح، أي إذا كان $\|C\| < 1$ حيث $\|\ \|$ هو أي معيار طبيعي فإن متتابعـة الحلـول التكراريـة $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ المعطـاة في (6.11) حيـث $X^{(0)} \in R^n$ هو أي تقريب أولي مناسب، تتقارب إلى متجه الحـل الفعلي أو الحل المضبوط $X \in R^n$، وبحيث يُعطى خطأ التقريب من إحدى المتباينات

$$\left\|X - X^{(k)}\right\| \leq \|C\|^k \left\|X^{(0)} - X\right\| \tag{6.25}$$

$$\left\|X - X^{(k)}\right\| \leq \frac{\|C\|^k \left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|}{1 - \|C\|} \tag{5.26}$$

✪✪✪

تنويه

من نظرية (5.5) يمكن استبدال المعيـار $\|C\|_\infty$ بالمعيـار $\|C\|$، وبالتالي فإن شرط التقارب (5.24) يتحـول إلى شرط المعيار بالنسبة إلى الصفوف، أي الشرط

$$\|\mathbf{C}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| < 1 \qquad (6.27)$$

أو شرط المعيار بالنسبة إلى الأعمدة

$$\|\mathbf{C}\|_\infty = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| < 1 \qquad (6.28)$$

أيضاً، باستخدام (5.22) فإن شرط التقارب $\|\mathbf{C}\| < 1$ يأخذ الشكل

$$\|\mathbf{C}\|_2 = \left(\rho\left(C^t C\right)\right)^{\frac{1}{2}} < 1 \qquad (6.29)$$

مثال 6.4 ادرس النظام في المثال (6.1)، واحسب خطأ التقريب.

الحل يمكن دراسة تقارب الحل باستخدام أياً من الثلاثة شروط (6.27), (5.28), (5.29). بما أن

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

إذن

$$\sum_{j=1}^{n} |c_{1j}| = |0| + \left|-\frac{1}{8}\right| + \left|-\frac{1}{8}\right| = \frac{1}{4};$$

$$\sum_{j=1}^{n}|c_{2j}| = \left|-\frac{1}{5}\right| + |0| + \left|\frac{1}{5}\right| = \frac{2}{5};$$

$$\sum_{j=1}^{n}|c_{3j}| = \left|\frac{1}{5}\right| + \left|\frac{1}{5}\right| + |0| = \frac{2}{5}$$

الأمر الذي يعني أن الحل التكراري هو حل تقاربي حيث إن شرط التقارب (6.27) يعطي

$$\|C\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}| = \max\left\{\frac{1}{4},\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right\} = \frac{2}{5} = 0.4 < 1$$

أيضاً لدينا

$$\sum_{i=1}^{n}|c_{i1}| = |0| + \left|-\frac{1}{5}\right| + \left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{2}{5};$$

$$\sum_{i=1}^{n}|c_{i2}| = \left|-\frac{1}{8}\right| + |0| + \left|\frac{1}{5}\right| = \frac{13}{40};$$

$$\sum_{i=1}^{n}|c_{i3}| = \left|-\frac{1}{8}\right| + \left|\frac{1}{5}\right| + |0| = \frac{13}{40}$$

الأمر الذي يعني تقارب الحل التكراري حيث إن شرط التقـــارب (6.28) يعطي

$$\|C\|_\infty = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|c_{ij}| = \max\left\{\frac{2}{5},\ \frac{13}{40},\ \frac{13}{40}\right\} = \frac{2}{5} = 0.4 < 1$$

أيضاً من (6.29) نجد أن

$$\|C\|_2 = \left(\max\{0.3449,\ 0.1449,\ 0.2\}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0.59 < 1$$

نتيجة

العمليه التكرارية تتقارب إذا كانت كل العناصر c_{ij} في المصفوفة C للنظام $X = T + CX$ تحقق المتطابقة

$$\left|c_{ij}\right| < \frac{1}{n} \tag{6.30}$$

حيث n هو رتبة المصفوفة C.

في المثال السابق ــ مثلاً ــ فإن $n = 3$، وبالتـالي نجـد أن كــل العناصر c_{ij} تحقق المتطابقة $\left| c_{ij} \right| < \frac{1}{3} = \frac{1}{n}$ الأمر الـذي يؤكــد تقارب الحل التكراري.

6.4 الصورة القيـــاسية للــــــنظام الخـــطي Normal Form of a Linear System

في بعض الأحيان تكون معاملات النظــام، أي عناصـــر مـــصفوفة المعاملات ليست أعداداً صحيحة، بل أعداداً عشرية وعند استخدام طريقة جاكوبي التكرارية يزداد الخطأ *(Round-off Error)* الناتج عن اتمام العمليات الحسابية الجبرية مع تلك الأعداد العشرية. مــن هنا جاءت الحاجة لجعل هذه المعاملات العشرية أعداداً صحيحة،

الأمر الذي يقلل خطأ العمليات الحسابية عند القسمة عليها أثنــاء تطبيق طريقة جاكوبي التكرارية. لنفرض النظام الخطي

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B};\ \ \mathbf{A}=\left(a_{ij}\right);\ \ \mathbf{X}=\left(x_i\right);\ \ \mathbf{B}=\left(b_i\right);\ i,j=\overline{1,n}$$

نفرض ــ أيضاً ــ أن a_{ij} ليست أعداداً صحيحة. وللحصول على الصورة القياسية نعيد كتابة النظام، بحيث يـصبح معامــل x_1 في المعادلة الأولي على شكل العدد الصحيح α_1 ــ مثلاً ــ بدلاً مــن a_{11}، ومعامل x_2 في المعادلة الثانية على الشكل α_2 ــ مـثلاً ــ بدلاً من a_{22}، وهكذا حتى نصل إلى معامل x_n في المعادلة الأخيرة، والذي يصبح على الشكل α_n، حيث $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ هــي أعــداد صحيحة قريبة من المعاملات $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ من مــضاعفات الرقم 10.

مثال 6.5 أوجد باستخدام طريقة جاكوبي التكرارية حلاً للنظام

$$\begin{aligned} 7.6x_1+0.5x_2+2.4x_3&=1.9\\ 2.2x_1+9.1x_2+4.4x_3&=9.7\\ -1.3x_1+0.2x_2+5.8x_3&=-1.4 \end{aligned}\qquad \text{(i)}$$

الحل بداية، نضع النظام (i) في الشكل

$$\begin{aligned} 7.6x_1&=1.9-0.5x_2-2.4x_3\\ 9.1x_2&=9.7-2.2x_1-4.4x_3\\ 5.8x_3&=-1.4+1.3x_1-0.2x_2 \end{aligned}\qquad \text{(ii)}$$

وبما أن

$$\begin{aligned} 7.6x_1 &= 10x_1 - 2.4x_1 \\ 9.1x_2 &= 10x_2 - 0.9x_2 \\ 5.8x_3 &= 10x_3 - 4.2x_3 \end{aligned} \quad \text{(iii)}$$

بالتعويض من (iii) في (ii) نحصل على

$$\begin{aligned} 10x_1 &= 1.9 + 2.4x_1 - 0.5x_2 - 2.4x_3 \\ 10x_2 &= 9.7 - 2.2x_1 + 0.9x_2 - 4.4x_3 \\ 10x_3 &= -1.4 + 1.3x_1 - 0.2x_2 + 4.2x_3 \end{aligned} \quad \text{(iv)}$$

وبقسمة كل معادلات النظام (iv) على العدد 10، نحـــصل علـــى الصورة القياسية للنظام (i) في الشكل

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.19 + 0.24x_1 - 0.05x_2 - 0.24x_3 \\ x_2 &= 0.97 - 0.22x_1 + 0.09x_2 - 0.44x_3 \\ x_3 &= -0.14 + 0.13x_1 - 0.02x_2 + 0.42x_3 \end{aligned} \quad \text{(v)}$$

أو في الشكل المصفوفي

$$X = T + CX$$

حيث

$$C = \begin{bmatrix} 0.24 & -0.05 & -0.24 \\ -0.22 & 0.09 & -0.44 \\ 0.13 & -0.02 & 0.42 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0.19 \\ 0.97 \\ -0.14 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

الآن ـــ وقبل البدء في إيجاد الحل ـــ علينا التأكد مـــن أنـــه حـــلاً تقاربياً. ولمعرفة ما إذا كان الحل تقاربياً أم لا علينا التأكد مـــن أن

شرطاً واحداً ــ على الأقل ــ من الشروط الثلاثة ,(6.27), (6.28) (6.29) متحقق. من شرط معيار الصفوف (6.27) نجد أن

$$\|C\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| = \max\{0.53,\ 0.75,\ 0.57\} = 0.75 < 1$$

وبما أن

$$\sum_{i=1}^{n} \|c_{i1}\| = 0.59,\ \sum_{i=1}^{n} |c_{i2}| = 0.16,\ \sum_{i=1}^{n} |c_{i3}| = 1.1$$

إذن، من الشرط (6.28) نجد أن

$$\|C\|_\infty = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| = \max\{0.59,\ 0.16,\ 1.1\} = 1.1 > 1$$

أيضاً من (6.29) نجد أن

$$\|C\|_2 = \left(\max\{0.0010,\ 0.1020,\ 0.4582\}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0.68 < 1$$

وبالتالي فإن العملية التكرارية تتقارب حتى تصل إلى الحل الوحيد.

نأخذ التقريب الصفري على أنه مصفوفة الثوابت T، إذن فإن

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.19 \\ 0.97 \\ -0.14 \end{bmatrix}$$

ويكون التقريب الأول هو

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.19 \\ 0.97 \\ -0.14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.24 & -0.05 & -0.24 \\ -0.22 & 0.09 & -0.44 \\ 0.13 & -0.02 & 0.42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.19 \\ 0.97 \\ -0.14 \end{bmatrix}$$

أو

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2207 \\ 1.0771 \\ -0.1935 \end{bmatrix}$$

والتقريب الثاني هو

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2359 \\ 1.1035 \\ -0.2141 \end{bmatrix}$$

والتقريبان الثالث، والرابع هما على الترتيب

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2427 \\ 1.1117 \\ -0.2214 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2458 \\ 1.1111 \\ -0.2237 \end{bmatrix}$$

والتقريبان الخامس، والسادس هما على الترتيب

$$\begin{bmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \\ x_3^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2470 \\ 1.1146 \\ -0.22434 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \\ x_3^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2474 \\ 1.1147 \\ -0.2244 \end{bmatrix}$$

يمكنك ــ الآن ــ المقارنة مع الحل الذي نحصل عليــه باســتخدام طريقة المصفوفة العكسية ــ مثلاً ــ وهو

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2475 \\ 1.1146 \\ -0.2243 \end{bmatrix}$$

6.5 طريقة زايـــــــــدل التكرارية
Seidel's Iterative Method

في هذا الفصل نقدم طريقة تكرارية أخرى مختلفة عن طريقة جاكوبي تسمى "طريقة زايدل التكرارية" نسبة إلى عالم الرياضيات والفلـــك الألماني زايدل (*Seidel L.*, 1821 - 1896). لنعتبر النظام القياسي

$$\begin{aligned} x_1 &= T_1 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n \\ x_2 &= T_2 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \vdots &\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \cdots \quad \vdots \\ x_n &= T_n + c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + c_{n3}x_3 + \cdots + c_{nn}x_n \end{aligned} \tag{6.31}$$

ولنفرض أن التقريب الصفري هو

$$\mathbf{X}^{(0)} = \left[x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad x_n^{(0)} \right]^t \tag{6.32}$$

وبما أن هذا التقريب الصفري (6.32) هو في حد ذاته حل للنظـــام (6.31)، إذا بالتعويض به، أي باستخدام التعويض

$$x_1 = x_1^{(0)}, \quad x_2 = x_2^{(0)}, \ldots, \quad x_n = x_n^{(0)} \tag{6.33}$$

في المعادلة الأولي من النظام (6.31) نحصل علـــى التقريـــب الأول للمجهول الأول x_1 فقط، والذي يُرمز له بالرمز $x_1^{(1)}$، وهكـــذا نجد أن التقريب الأول للمجهول الأول x_1 هو

$$x_1^{(1)} = T_1 + c_{11}x_1^{(0)} + c_{12}x_2^{(0)} + c_{13}x_3^{(0)} + \cdots + c_{1n}x_n^{(0)} \tag{6.34}$$

الآن وباستخدام التعويض

$$x_1 = x_1^{(1)}, \quad x_2 = x_2^{(0)}, \ \ldots, \quad x_n = x_n^{(0)} \tag{6.35}$$

في المعادلة الثانية من النظام (6.31) يمكن أن نحصل على التقريـــب الأول للمجهول الثاني x_2 فقط، والذي يُرمز له بالرمز $x_2^{(1)}$. أي أن

$$x_2^{(1)} = T_2 + c_{21}x_1^{(1)} + c_{22}x_2^{(0)} + c_{23}x_3^{(0)} + \cdots + c_{2n}x_n^{(0)} \tag{6.36}$$

الآن، باستخدام (6.36) ,(6.33) يتم التعويض عن

$$x_1 = x_1^{(1)}, \quad x_2 = x_2^{(1)} \quad , \quad \dots, \quad x_n = x_n^{(0)} \tag{6.37}$$

في المعادلة الثالثة من النظام (6.31) نحصل علـــى التقريـــب الأول للمتغير الثالث $x_3^{(1)}$ في الشكل

$$x_3^{(1)} = T_3 + c_{21}x_1^{(1)} + c_{22}x_2^{(1)} + \cdots + c_{2n}x_n^{(0)} \tag{6.38}$$

وبنفس التكنيك نستمر حتى نحصل على التقريب الأول للمـــتغير النوني $x_n^{(1)}$ في الشكل

$$x_n^{(1)} = T_n + c_{n1}x_1^{(1)} + c_{n2}x_2^{(1)} + \cdots + c_{nn-1}x_{n-1}^{(1)} + c_{nn}x_n^{(0)} \tag{6.39}$$

وهكذا يمكن أن نحصل على التقريب الأول للحل، والذي يرمز له بالرمز $X^{(1)}$، حيث نجد أنه

$$X^{(1)} = \left[x_1^{(1)} \quad x_2^{(1)} \quad \dots \quad x_n^{(1)} \right]^t \tag{6.40}$$

ثم نعاود الكرة باستخدام التقريب الأول (6.40) في المعادلـــة الأولي من النظام (6.31) ونستمر على نفس الخطوات السابقة مع المعادلة الثانية فالثالثة حتى المعادلة الأخيرة، حتى نحصل على التقريب الثاني للحل، ثم التقريب الثالث، وهكذا حتى تنتهي العمليـــة التكراريـــة بالدقة المطلوبة. بأسلوب آخر فإنه يمكن تلخيص طريقة زايدل كما يلي: إذا أُعطيت التقريب $x_i^{(k)}$ فإن التقريب التالي لـــه $x_i^{(k+1)}$ يمكن أن نحصل عليه من العلاقات الآتية:

$$x_1^{(k+1)} = T_1 + \sum_{j=1}^{n} c_{1j} x_j^{(k)} \tag{6.41}$$

$$x_2^{(k+1)} = T_2 + c_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} c_{2j} x_j^{(k)} \tag{6.42}$$

وهكذا حتى نحصل على

$$x_n^{(k+1)} = T_n + \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} x_j^{(k+1)} + c_{nn} x_n^{(k)};\ k = \overline{0,n} \tag{6.43}$$

6.6 تقـــــارب الحـــل بطريقة زايــــــدل Convergence of Seidel's Method

إن الشروط الواجب تحقيقها بالنسبة للحلول التكرارية، التي نحصل عليها بطريقة زايدل هي نفس الــشروط (6.28)، (6.27) الخاصــة بتقارب طريقة جاكوبي التكرارية، غير أن حساب الخطأ في طريقــة زايدل يختلف عن طريقة جاكوبي. لحساب الخطأ باستخدام طريقــة زايدل نستخدم العلاقة

$$\left\| \mathbf{X} - \mathbf{X}^{(k)} \right\|_\infty \le \frac{\|\mathbf{C}\|_\infty^{(k)}}{1 - \|\mathbf{C}\|_\infty} \left\| \mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)} \right\|_\infty \tag{6.44}$$

حيث $\|\ \|_\infty$ هو أي معيار طبيعي بالنسبة إلى الصفوف أو الأعمدة.

مثال 6.6 أوجد حل النظام في المثال (6.5) باستخدام طريقة زايدل.

الحل لنعتبر الشكل القياسي

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.24x_1 - 0.05x_2 - 0.24x_3 + 0.19 \\ x_2 &= -0.22x_1 + 0.09x_2 - 0.44x_3 + 0.97 \\ x_3 &= 0.13x_1 - 0.02x_2 + 0.42x_3 - 0.14 \end{aligned} \qquad (\text{v})$$

لنعتبر التقريب الصفري

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.19 \\ 0.97 \\ -0.14 \end{bmatrix}$$

إذن، بالتعويض عن $X^{(0)}$ في المعادلة الأولي من النظام (v) نحـــصل على التقريب الأول للمتغير x_1، أي نحصل على

$$x_1^{(1)} = (0.24)(0.19) + (-0.05)(0.97) + (-0.24)(-0.14) + 0.19 = 0.2207$$

ويكون التقريب الأول للمجهول x_2 هو

$$x_2^{(1)} = (-0.22)(0.2207) + (0.09)(0.97) + (-0.44)(-0.14) + 0.97 = 1.0703$$

والتقريب الأول للمجهول x_3 هو

$$x_3^{(1)} = (0.13)(0.2207) + (0.02)(1.0703) + (0.42)(-0.14) - 0.14 = -0.1915$$

وهكذا نجد أن

$$X^{(1)}=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\\x_3^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2207\\1.0703\\-0.1915\end{bmatrix}$$

الآن، وبالتعويض عن $X^{(1)}$ في المعادلة الأولي من النظام (v) نحصل على التقريب الثاني للمتغيرات x_1,x_2,x_3 على الترتيب، وبالتالي فإن

$$x_1^{(2)}=(0.24)(0.2207)+(-0.05)(1.0703)$$
$$+(-0.24)(-0.1915)+0.19=0.2354\,;$$
$$x_2^{(2)}=(-0.22)(0.2354)+(0.09)(1.0703)$$
$$+(-0.44)(-0.1915)+0.97=1.0988\,;$$
$$x_3^{(2)}=(0.13)(0.2354)+(0.02)(1.0988)$$
$$+(0.42)(-0.1915)-0.14=-0.2118$$

إذن

$$X^{(2)}=\begin{bmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\\x_3^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2354\\1.0988\\-0.2118\end{bmatrix}$$

وتنتهي العملية التكرارية عندما تقترب الحلول التقريبية من بعضها البعض في عمليتين تكراريتين متتاليتين. انظر جدول **(6.1)** للحلول التقريبية التكرارية $k = 0,1,2$; $\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\right)$ بالمقارنة مع الحل المضبوط $\left(x_1, x_2, x_3\right)$.

جدول **6.1**

(0.1900, 0.9700 , -0.1400)	$\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)$	$k=0$
(0.2207,1.0703 , -0.1915)	$\left(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}\right)$	$k=1$
(0.2354,1.0988, -0.2118)	$\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}\right)$	$k=2$
(0.2424, 1.1088, -0.2196)	$\left(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}\right)$	$k=3$
(0.2454, 1.1124, -0.2226)	$\left(x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x_3^{(4)}\right)$	$k=4$
(0.2467, 1.1138, -0.2237)	$\left(x_1^{(5)}, x_2^{(5)}, x_3^{(5)}\right)$	$k=5$
(0.2472, 1.1143, -0.2241)	$\left(x_1^{(6)}, x_2^{(6)}, x_3^{(6)}\right)$	$k=6$
(0.2474, 1.1145, -0.2243)	$\left(x_1^{(7)}, x_2^{(7)}, x_3^{(7)}\right)$	$k=7$

ويمكن ــ الآن ــ مقارنة متتابعة الحلول التقريبية التكرارية مع الحل المضبوط حيث نجد تطابق التقريب السابع $X^{(7)}$ حتى درجة دقـــة 10^{-3}، إذ أن الحل المضبوط هو

$$(x_1, x_2, x_3) = (0.2475, 1.1146, -0.2243)$$

مثال 6.7 أوجد عدد العمليات اللازمة لحل النظام بدرجة دقة 10^{-4}

$$\begin{aligned} 9.9x_1 - 1.5x_2 + 2.6x_3 &= 0 \\ 0.4x_1 + 13.6x_2 - 4.2x_3 &= 8.2 \\ 0.7x_1 + 0.4x_2 + 7.1x_3 &= -1.3 \end{aligned}$$

الحل نكون الصورة القياسية

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.01x_1 + 0.15x_2 - 0.26x_3 + 0 \\ x_2 &= -002x_1 + 0.32x_2 + 0.21x_3 + 0.41 \\ x_3 &= -00.7x_1 - 0.04x_2 + 0.29x_3 - 0.13 \end{aligned}$$

بما أن

$$C = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.15 & -0.26 \\ -0.02 & 0.32 & 0.21 \\ -0.07 & -0.04 & 0.29 \end{bmatrix}$$

إذن فإن

$$\| C \|_\infty = \max\{0.42,\ 0.55,\ 0.40\} = 0.55 < 1 \qquad \text{(i)}$$

بالتالي فإن الحلول التكرارية تتقارب إلى حل وحيد. نأخذ التقريب الصفري على أنه

$$x_1^{(0)} = 0,\ x_2^{(0)} = 0.41, x_3^{(0)} = -0.13$$

فنجد أن التقريب الأول هو

$$x_1^{(1)} = 0.0953\ ,\ x_2^{(1)} = 0.5126\ ,\ x_3^{(1)} = -0.1948$$

أي أن

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.41 \\ -0.13 \end{bmatrix},\quad \mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0953 \\ 0.5120 \\ -0.1948 \end{bmatrix}$$

إذن

$$\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.0953 \\ 0.1120 \\ -0.0648 \end{bmatrix}$$

وإذا أخذنا المعيار $\| \|_\infty$ معياراً بالنسبة إلى الصفوف فإننا نجـــد أن معيار الفرق $\mathbf{X}^{(0)} - \mathbf{X}^{(1)}$ هو

$$\left\| \mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)} \right\|_\infty = 0.1120 \qquad \text{(ii)}$$

ولأن درجة الدقة المطلوبة هي 10^{-4}، أي أن الخطأ المطلق يجب ألا يزيد عن 10^{-4}، بمعنى أن لايزيد الفرق بين الحل التكراري $\mathbf{X}^{(k)}$، والحل المضبوط $\mathbf{X}$ عن المقدار 10^{-4}، إذن فإن المطلوب أن يكون

$$\left\| \mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)} \right\|_\infty = 0.1120 \qquad \text{(iii)}$$

وبالتعويض من (iii) ,(ii) ,(i) في العلاقة (5.36)، نجد أن

$$10^{-4} \le \frac{(0.55)^k}{0.45}(0.1120)$$

إذن

$$10^{-4}\cdot(0.45)\le(0.55)^{k}\,(0.1120)$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين، نحصل على

$$-4\ln(10)+\ln(0.45)\le k\ln(0.55)+\ln(0.1120)$$

حيث نحصل من هذه العلاقة على $k=14$.

6.7 مسائل

(1) احسب كلاً من: $\|\ \|_2$ & $\|\ \|_\infty$ للمصفوفات الآتية

$A=\begin{bmatrix}-0.3 & 1.2 & -0.2\\ -0.1 & -0.2 & 1.6\\ -1.5 & -0.3 & 0.1\end{bmatrix}$	$B=\begin{bmatrix}0.2 & 0.44 & 0.81\\ 0.58 & -0.29 & 0.05\\ 0.05 & 0.34 & 6.1\end{bmatrix}$
$C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 4 & 0\\ 5 & 6 & 9 & 0\end{bmatrix}$	$D=\begin{bmatrix}0 & 0.44 & 0.81\\ 0 & -0.29 & 0.05\\ 0 & 0.34 & 6.1\end{bmatrix}$

(2) أوجد الحل العام إن وجد

$3x_1-2x_2+x_3=6$ $x_1+10x_2-x_3=2$ $-3x_1-2x_2+x_3=0$	$2x_1-3x_2+x_4-x_6=0$ $3x_1-2x_3+x_5=0$ $x_2-x_4+6x_6=-3$

(3) ادرس تقارب الطرق التقريبية التكرارية (طريقة جاكوبي وطريقة زايدل)، ثم أوجد الحل التكراري في حالة كونه تقاربي، باســتخدام الطريقتين. احسب خطأ التقريب في كل حالة.

$$\begin{aligned} 6.1x_1 + 0.7x_2 - 0.05x_3 &= 6.97 \\ -1.3x_1 - 2.05x_2 + 0.87x_3 &= 0.10 \\ 2.5x_1 - 3.12x_2 - 5.03x_3 &= 2.04 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.7x_1 - 3.1x_2 + 1.8x_3 - 2.2x_4 &= -9.7 \\ 2.1x_1 + 6.7x_2 - 2.2x_3 &= 13.1 \\ 3.2x_1 - 1.8x_2 - 9.5x_3 - 1.9x_4 &= 6.9 \\ 1.2x_1 + 2.8x_2 - 1.4x_3 - 9.9x_4 &= 25.1 \end{aligned}$$

(4) بين ما إذا كانت الطرق التقريبية التكرارية (طريقــة جــاكوبي وطريقة زايدل) تعطي حلولاً تقاربية للأنظمة التالية. فــإذا كانــت تقاربية أوجد عدد العمليات التكرارية (k) الــتي تعطــي الحلــول التكرارية بدرجة دقة 10^{-3}، وذلك باستخدام كل من الطريقتين.

$4x_1 - x_2 + x_3 = 4$	$10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$
$2x_1 + 6x_2 - x_3 = 7$	$-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25$
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$	$2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11$
	$3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15$

****