4 القيم المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة
EIGENVALUES AND EIGENVECTORS OF A MATRIX

كل شيء مادي في هذا الكون له قيمة جبرية فأي جسم مادي له أبعاد مثل الطول والعرض والأرتفاع، الكتلة، الحجم، .. ولكل هذه الأبعاد توجد قيم جبرية. فماذا عن القيم المميزة التي نحن بصددها في هذا الباب.

نعلم من دراستنا السابقة أن المصفوفة تُعرف على انها ترتيب معين من العناصر على شكل صفوف و أعمدة، وعلى هذا، فإنه لايوجد لأية مصفوفة كانت أية قيمة جبرية *(Algebraic value)*. على العكس من هذا، فإن محدد *(Determinant)* أية مصفوفة مربعة له قيمة جبرية واحدة. فمثلاً إذا كانت A هي المصفوفة $A=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ فإن محدد المصفوفة A ويرمز له بالرمز $|A|$ له القيمة الجبرية -10، أي أن $|A|=\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-10$ أما المصفوفة A نفسها فليس لها أية قيم جبرية.

ولكن يبقى السؤال التقليدي .. هل يمكن لنا معرفة قيمة المصفوفة نفسها وهي التي تعرف على أنها مجرد ترتيب معين من الأشياء ليس إلا ؟ بمعنى آخر هل يمكن أن نعين قيمة للترتيب (لمصفوفة)؟ كيف نستطيع تميزالمصفوفة عن غيرها من المصفوفات الأخرى التي تتشابه

obeikandi.com

معها في الرتبة *(order)* المرتبة *(rank)* وفي صفات أخرى؟ وهناك الكثير والكثير من التساؤلات سنحاول الإجابة عنها في هذا الباب.

4.1 القيم المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة

دعنا نبدأ المحاولة لتعيين القيمة المميزة للمصفوفة المربعة A من الرتبة $n \times n$. لنفرض مثلاً أننا ضربنا المصفوفة A من جهة اليمين في مصفوفة العمود B من الرتبة $n \times 1$ فكان حاصل الضرب هو λB حيث λ هو أي عدد حقيقي أو مركب.

وبلغة الرياضيات إذا فرضنا أن $AB = \lambda B$ فهل هذا يعني أن λ يمكن إعتبارها قيمة مساوية للمصفوفة A؟ في الواقع أن الإجابة عن هذا السؤال هي بكل تأكيد نعم وفى هذه الحالة فإن القيمة λ تسمى قيمة مميزة *(Eigenvalue)* للمصفوفة إذ أنها ليست قيمة جبرية. أما مصفوفة العمود B فتسمى المتجه المميز *(Eigenvector)* المقابل للقيمة المميزة λ. لتوضيح هذه الفكرة لنحاول تعيين هذه القيمة، λ، للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ مثلاً. بضرب المصفوفة A من جهة اليمين في المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ حيث $\alpha \neq 0$، نجد أن

obeikandi.com

$$AB = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\alpha \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = 2B \qquad (4.1)$$

أيضا بضرب المصفوفة A من جهة اليمين في المصفوفة $C = \begin{bmatrix} -7\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ حيث $\alpha \neq 0$، نجد أن

$$AC = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35\alpha \\ -7\alpha + 2\alpha \end{bmatrix} = -5\begin{bmatrix} -7\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = -5C \qquad (4.2)$$

من المعادلة رقم (4.1) نجد أن قيمة المصفوفة A هي 2 ومن المعادلة (4.2) نجد أن قيمة المصفوفة A هي 5-، الأمر الذي يعني أن للمصفوفة A والتي من الرتبة 2×2 توجد قيمتين هما $2, -5$.

أيضا نجد أنه يوجد متجهين مميزين الأول هو $\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ ويقابل القيمة المميزة $\lambda = 2$ والثاني $\begin{bmatrix} -7\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ في مقابل القيمة المميزة $\lambda = -5$.

نلاحظ أيضا أن هذه المتجهات المميزة تعتمد على البارامتر الاختيارى α *(Arbitrary)*، وعلى هذا فإن كل متجه مميز هو في الواقع فضاء لانهائي من المتجهات المميزة.

تعريف 4.1 | **القيمة المميزة - eigenvalue**

تُعرف القيمة المميزة للمصفوفة المربعة A من الرتبة $n \times n$ على أنها تلك القيمة الحقيقية أو المركبة λ والتي تحقق المعادلة $AX = \lambda X$

obeikandl.com

حيث X هي مصفوفة العمود من الرتبة $n \times 1$ المقابلة للقيمة المميزة λ.

▲▲▲

تعريف 4.2 **المتجه المميز - eigenvector**

يُعرف المتجه المميز X للمصفوفة المربعة A من الرتبة $n \times n$ على أنه مصفوفة العمود من الرتبة $n \times 1$ المقابلة للقيمة الحقيقية أو المركبة λ والتي تحقق المعادلة $AX = \lambda X$.

▲▲▲

والآن

هل من طريقة لحساب القيم المميزة للمصفوفة وكذلك المتجهات المميزة المقابلة لهذه القيم المميزة؟ وما الذي يجب حسابه أولاً القيم المميزة أم المتجهات المميزة؟

وهل كل مصفوفة لها قيم مميزة؟ وما هو عدد القيم المميزة في حالة وجودها وكم هو العدد المقابل من المتجهات المميزة؟ وهل المتجه المميز المقابل لقيمة مميزة واحدة هو أيضا وحيد أم أن هناك فضاء لانهائي من المتجهات المميزة في مقابل كل قيمة مميزة واحدة ؟ للأجابة عن هذه التساؤلات دعنا نبدأ بأستخدام التعريف السابق في إثبات النظرية الآتية.

obeikandl.com

نظرية - 4.1 **شرط وجود القيم المميزة**

إذا كانت A هي المصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]; i,j=\overline{1,n}$ فإن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A إذا كان وفقط إذا كان $\left|\lambda I_n - A\right| = 0$.

والعكس صحيح، فإذا كانت λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A فإن أي حل غير صفري *(nontrivial solution)*، X، للنظام المتجانس $(\lambda I_n - A)X = O$ هو متجه مميز مقابل للقيمة المميزة λ.

✪✪✪

البرهان

لنفرض أن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]$ حيث $i,j=\overline{1,n}$، وأن X هو المتجهة المميز المقابل لهذه القيمة المميزة.

هذا يعني أن $AX=\lambda X$، إذن $(\lambda I_n - A)X = O$ حيث I_n هي مصفوفة الوحدة من الرتبة $n\times n$، بينما O هي مصوفة صفرية.

ومن المعروف أن هذا النظام المتجانس من المعادلات الجبرية له حل غير صفرى *(Nontrivial Solution)*، X، فقط إذا كانت المصفوفة $(\lambda I_n - A)$ شاذه، أي إذا كان

$$\left|\lambda I_n - A\right| = 0$$

وهذه معادلة كثيرة حدود من الدرجة n في λ وهى تسمى المعادلة المميزة *(Eigen Equation)* للمصفوفة A. حل أو جذور هذه

المعادلة وعددهم n هي القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$. وبما أن جذور هذه المعادلة يمكن أن تكون حقيقية أو تخيلية، لذا فإن القيم المميزة للمصفوفة يمكن اعتباها كميات قياسية *(scalars)*.

والآن نحاول إثبات عكس النظرية. نفرض أن $|\lambda \mathbf{I_n} - \mathbf{A}| = 0$، هذا يعني أن المصفوفة $(\lambda \mathbf{I_n} - \mathbf{A})$ شاذه *(singular)* وعلى هذا فإنه يوجد حل غير صفرى، $\mathbf{X}$، لنظام المعادلات المتجانس $(\lambda \mathbf{I_n} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ أو $\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X}$.

إذن فإن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة $\mathbf{A}$ كما أن $\mathbf{X}$ هو المتجه المميز المقابل لهذه القيمة المميزة λ.

4.2 طريقة حساب القيم المميزة والمتجهات المميزة

للحصول على القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ للمصفوفة $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ حيث $i, j = \overline{1,n}$ يتم فك المحدد $|\lambda \mathbf{I_n} - \mathbf{A}| = 0$ أو

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

فنحصل على معادلة كثيرة حدود من الدرجة n في λ. بحل هذه المعادلة نحصل على عدد n من القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$.

obeikandi.com

وبما أنه في مقابل كل قيمة مميزة λ_i يوجد متجه مميز، X_i، بحيث يكون $AX_i = \lambda_i X_i$ لكل $i=\overline{1,n}$. إذن للحصول على المتجه المميز X_i المقابل للقيمة المميزة λ_i علينا بحل نظام المعادلات الجبرية الخطية المتجانس

$$\left(\lambda_i I_n - A\right)X_i = O \;\; \forall \;\; i=\overline{1,n}$$

وبما أن المصفوفة $\left(\lambda_i I_n - A\right)$ شاذة *(Singular)* حسب التعريف فمن المعروف إذن أن حل هذا النظام ليس متجهاً مميزاً واحداً X_i بل هو فضاء من المتجهات المميزة، الأمر الذي يعني أنه في مقابل كل قيمة مميزة λ_i يوجد عدد لانهائي من المتجهات المميزة X_i.

مثال 4.1 أوجد القيم والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل المصفوفة A مربعة من الرتبة الثانية، أي أن $n=2$ إذن توجد قيمتين مميزتين. المعادلة المميزة هي

$$\left|\lambda I_2 - A\right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 \\ 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-3) = 0$$

إذن القيم المميزة هي

$$\lambda_1 = -1 \;\;,\;\; \lambda_2 = 3$$

للحصول على المتجهات المميزة في مقابل $\lambda_1 = -1$ نوجد حل النظام $(\lambda_1 I_n - A)X_1 = 0$ أو

$$\left(-1\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 0 & 3\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

أي النظام

$$\begin{bmatrix}0 & -4\\ 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس جوردان نجد أن حل النظام السابق يكافيء حل النظام

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

حيث $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ هي المصفوفة المختزلة للمصفوفة $\begin{bmatrix}0 & -4\\ 0 & -4\end{bmatrix}$. من هذا النظام نرى أن x_2 هو متغير تابع *(dependent variable)* بينما x_1 هو متغير مستقل *(independent variable)*، نفرض أن $x_1 = \alpha$، حيث $\alpha \neq 0$ تأخذ قيماً إختيارية ما عدا الصفر. إذن وبما أن

$$0x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

إذن فإن

$$X_1 = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\ 0\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \; ; \; \alpha \neq 0$$

obeikandi.com

واضح أن المتجه المميز X_1 ما هو إلا فضاء لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن α تأخذ قيماً إختيارية ما عدا الصفر. يسمى $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ المتجهة المميز الاساسي *(Fundamental Eigenvector)* لفضاء المتجهات المميزة X_1.

للحصول على المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda_2 = 3$ نوجد حل النظام $(\lambda_2 I_n - A)X_2 = O$

أو

$$\left(3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن المطلوب هو حل النظام

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو حل النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ هي المصفوفة المختزلة للمصفوفة $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. من هذا النظام نرى أن x_1 هو متغير تابع *(dependent variable)* بينما x_2 هو متغير مستقل *(independent variable)*، لنفرض أن

$x_2 = \beta$ ، حيث $\beta \neq 0$ تأخذ قيماً إختيارية ما عدا الصفر. إذن

وبما أن $x_1 - x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 = \beta$

إذن فإن

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;;\; \beta \neq 0$$

واضح أن المتجه المميز X_2 ما هو الا فضاء لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن β تأخذ قيماً إختيارية ما عدا الصفر. يسمى $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ المتجهة المميز الاساسي *(Fundamental Eigenvector)* لفراغ المتجهات المميزة X_2 .

مثال 4.2 أوجد القيم والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل المصفوفة المعطاه مربعة من الرتبة الثالثة، أي أن $n = 3$ ، إذن توجد ثلاث قيم مميزة. المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$$

إذن القيم المميزة هي $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$. للحصول على المتجهات المميزة $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ في مقابل $\lambda_1 = -1$ نوجد حل النظام $(\lambda_1 I_3 - A)X_1 = O$ أي النظام

$$\left(-1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس– جوردان فإن حل هذا النظام يكافيء حل النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث نجد هنا أن x_1, x_2 هما متغيران تابعان بينما x_3 هو متغير مستقل، لنفرض أن $x_3 = \alpha$، حيث $\alpha \neq 0$ تأخذ قيماً إختيارية ما عدا الصفر. إذن وبما أن

$$x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$
$$0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0$$

إذن فإن

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \; \alpha \neq 0$$

واضح أن المتجه المميز $\mathbf{X}_1$ ما هو إلا فضاء لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن α تأخذ قيماً اختيارية ما عدا الصفر. المتجهة المميز $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ يسمى المتجه الإساسي لفضاء المتجهات المميزة $\mathbf{X}_1$.

للحصول على المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda_2 = 1$ نوجد حل النظام $(\lambda_2 \mathbf{I}_3 - \mathbf{A})\mathbf{X}_2 = \mathbf{O}$ أي النظام

$$\left(1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو النظام

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obeikandl.com

وباستخدام طريقة جاوس- جوردان لحل هذا النظام المتجانس من المعادلات الخطية الجبرية، يكون المطلوب هو حل النظام

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والذى نحصل منه على

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = 0 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \beta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ ; \ \beta \neq 0$$

واضح أن المتجه المميز $\mathbf{X}_2$ ما هو إلا فضاء لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن β تأخذ قيماً إختيارية ما عدا الصفر. يسمى المتجه $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ المتجهة المميز الاساسي لفراغ المتجهات المميزة $\mathbf{X}_2$.

المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda_3 = 1$ هي نفسها المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda_2 = 1$، حيث أن هذه القيمة المميزة مكررة مرتين، إذن

obeikandl.com

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta \neq 0$$

ويكون أن المتجه المميز $\mathbf{X}_3$ ما هو الا فضاء لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن β تأخذ قيماً إختيارية ما عدا الصفر.

✍.

4.3 تحويل المصفوفة المربعة إلى مصفوفة قطرية DIAGONALIZATION

في البداية سوف نقدم تعريف لنوع هام جداً من المصفوفات يسمى المصفوفة القطرية *(diagonal matrix)*، فنتعرف على بعض خصائصها ثم ندرس كيفية تحويل أية مصفوفة مربعة إلى مصفوفة قطرية.

تعريف 4.2 | **المصفوفة القطرية - eigenvalue**

يقال للمصفوفة المربعة $\mathbf{D} = \left[d_{ij} \right]$ من الرتبة $n \times n$ انها مصفوفة قطرية إذا كانت كل عناصرها *(entries)* أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي *(Main Diagonal)*، حيث يوجد على الأقل عنصر واحد غير صفري ضمن عناصر القطر الرئيسي.

▲▲▲

obeikandi.com

وبلغة الرياضيات فإن المصفوفة $\mathbf{D}=\left[d_{ij}\right]$ هي مصفوفة قطرية إذا كان $d_{ij}=0$ لكل $i \neq j$. على ذلك فإذا كانت $\mathbf{D}=\left[d_{ij}\right]$ مصفوفة قطرية فإنها تأخذ الشكل

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}$$

خصائص المصفوفة القطرية

[1] حاصل ضرب أي مصفوفتين قطريتين هو أيضا مصفوفة قطرية.

فإذا كانت $\mathbf{H}=\left[h_{ij}\right], \mathbf{D}=\left[d_{ij}\right]$ مصفوفتان قطريتين، إذن فإن

$$\mathbf{DH}=\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} d_{11}h_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}h_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}h_{nn} \end{bmatrix}$$

obeikandl.com

[2] قيمة محدد المصفوفة القطرية يساوي حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسي *(Main Diagonal)*. فمثلاً

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&10\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&10\end{vmatrix}=1\times 2\times 10=20$$

[3] إذا كانت عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة القطرية كلها أصفار، ففي هذه الحالة تسمى بالمصفوفة الصفرية. أما إذا كان يوجد عنصر صفري واحد على الاقل ضمن عناصر القطر الرئيسي فإن المصفوفة القطرية في هذه الحالة تصبح مصفوفة شاذة *(singular matrix)*، وذلك لأنه في هذه الحالة محددها (حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي) تكون مساوية للصفر.

[4] إذا كانت $D=\left[d_{ij}\right]$ مصفوفة قطرية فإن معكوسها هو $D^{-1}=\left[\dfrac{1}{d_{ij}}\right]$ أي أن

$$D^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{d_{11}}&0&\cdots&0\\0&\dfrac{1}{d_{22}}&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&\dfrac{1}{d_{nn}}\end{bmatrix}$$

[5] القيم المميزة لأية مصفوفة قطرية هي في الواقع عبارة عن عناصر القطر الرئيسي. على سبيل المثال فإن القيم المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$ هي

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 10$$

السؤال المطروح الآن هو هل يمكن لأي مصفوفة أن تتحول إلى مصفوفة قطرية؟ هل توجد شروط لذلك ؟ وكيف يتم تحويل المصفوفة إلى الشكل القطرى ؟ الاجابة عن هذه التساؤلات تقدمها النظريات الآتية.

نظرية - 4.2 تحويل المصفوفة إلى قطرية

لتكن A أية مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$. لنفرض أن $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ هي القيم المميزة لهذه المصفوفة. لنفرض أن المتجهات المميزة المقابلة لهذه القيم المميزة هي $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ وهي جميعها من الرتبة $n \times 1$. ولنفرض أيضا أن P هي المصفوفة التي تتكون من عدد n من الاعمدة، كل عمود فيها هو أحد المتجهات المميزة. إذا فإن المصفوفة A تكون قابلة لأن تكون قطرية ***(diagonalizable)***،

إذا كانت وفقط إذا كانت المتجهات المميزة $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ مستقلة خطياً *(Linearly Independent)* بحيث يكون

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

✪✪✪

نظرية ـ 4.3
شرط أن تكون المتجهات المميزة مستقلة خطياً

لتكن A أية مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$. إذا كانت القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ لهذه المصفوفة كلها مختلفة *(Distinct)* وغير مكررة، فإن المتجهات المميزة $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ المقابلة لهذه القيم المميزة وهي جميعها من الرتبة $n \times 1$ تكون مستقلة خطياً.

✪✪✪

نظرية ـ 4.4
شرط أن تكون المصفوفة قابلة لأن تكون قطرية

إذا كانت القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ لأية صفوفة مربعة A من الرتبة $n \times n$ كلها مختلفة *(Distinct)* وغير مكررة، فإن المصفوفة A تكون قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية.

✪✪✪

اليك الآن

ثلاثة أمثلة،حيث تجد **في المثال الأول** القيم المميزة كلها مختلفة وغير مكررة، وطبقاً لنظرية (4.4) فإن المصفوفة تكون قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية.

أيضا فإن المصفوفة P هي مصفوفة غير شاذة حيث أن المتجهات المميزة التي تكونها تكون كلها مستقلة خطياً.

في المثال الثاني توجد قيم مميزة مكررة، وطبقاً لنظرية (4.2) فإن المصفوفة تكون قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية إذا أمكن الحصول على المتجهات المميزة التي تكون المصفوفة P بحيث تكون هذه المتجهات كلها مستقلة خطياً وبذلك تكون P مصفوفة غير شاذه.

في المثال الثالث المصفوفة المعطاه غير قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية.

مثال 4.3 بين ما إذا كانت المصفوفات

$$A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}5 & -4 & 4\\ 12 & -11 & 12\\ 4 & -4 & 5\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

قابلة لأن تكون قطرية، فإذا كانت قابلة للقطرية فاوجد المصفوفة غير الشاذة P والتي تحولها إلى مصفوفة قطرية.

obeikandl.com

الحل [1] بالنسبة للمصفوفة A ، نوجد أولاً القيم المميزة، فإذا كانت كلها مختلفة فحسب نظرية (4.4) فإن المصفوفة A تكون قابلة للقطرية. فإذا وجدت بعض القيم المميزة المكررة فنحاول أن نوجد المتجهات المميزة المقابلة لهذه القيم المميزة بحيث تكون مستقلة خطياً وعلى ذلك وباستخدام نظرية (4.2) نوجد المصفوفة P التي تحول المصفوفة A إلى مصفوفة قطرية. المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix} \lambda-5 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -3 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+2)(\lambda-5)=0$$

إذن القيم المميزة هي $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 5$ وهي جميعها مختلفة ، إذن المصفوفة A يمكن تحويلها إلى مصفوفة قطرية. نوجد أولاً المصفوفة P. المتجهات المميزة في مقابل $\lambda_1 = 0$ هي X_1، حيث $(\lambda_1 I_3 - A)X_1 = O$ أو

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

باستخدام طريقة جاوس جوردان نجد أن

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \alpha \neq 0$$

obeikandl.com

بنفس الطريقة فانه في مقابل $\lambda_2 = -2$ المتجهات المميزة هـــي X_2 حيث

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \; ; \; \delta = 2\beta \neq 0$$

وفي مقابل $\lambda_3 = 5$ نجد أن المتجهات المميـــزة هـــي X_3، حيـــث $(\lambda_3 I_3 - A)X_3 = O$ أو

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

باعادة ترتيب معادلات النظام نحصل على

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بحل هذا النظام نحصل على

$$X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \gamma \neq 0$$

هكذا يمكن تكوين المصفوفة P، بحيث يكون العمود الأول هو X_1 والعمود الثانى هو X_2 والعمود الثالث هو X_3. إذن

obeikandl.com

$$P=\begin{bmatrix}0 & 0 & 5\\ 1 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

المصفوفة العكسية للمصفوفة P هي

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}-0.2 & 1.0 & 1.5\\ 0.0 & 0.0 & 0.5\\ 0.2 & 0.0 & 0.0\end{bmatrix}$$

وهكذا نجد أن المصفوفة P تحول المصفوفة A إلى مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي هي نفسها القيم المميزة لها، حيث يمكنك التأكد من أن

$$\mathbf{P^{-1}AP}=\begin{bmatrix}-0.2 & 1.0 & 1.5\\ 0.0 & 0.0 & 0.5\\ 0.2 & 0.0 & 0.0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 5\\ 1 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

ملاحظة

إذا رتبت المصفوفة P بحيث يكون العمود الثاني X_3 وليس X_2، بمعنى أنه إذا كانت

$$P=\begin{bmatrix}0 & 5 & 0\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

obeikandi.com

فإننا نحصل على المصفوفة القطرية في الشكل

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&5&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

أي أن كل قيمة مميزة من عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة القطرية $P^{-1}AP$ تكون مقابلة للعمود الذي يمثل المتجه المميز المقابل لها في المصفوفة P على الترتيب.

[2] بالنسبة للمصفوفة B ، فإن المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix}\lambda-5&4&-4\\-12&\lambda+11&-12\\-4&4&\lambda-5\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda^3+\lambda^2-5\lambda+3=0$$

إذن القيم المميزة هي

$$\lambda_1=1;\ \lambda_2=1;\lambda_3=-3$$

حيث نجد أن القيم المميزة ليست كلها مختلفة إذ أنه توجد قيمة مكررة مرتين. المتجهات المميزة في مقابل $\lambda_1=1$ هي X_1 والتى تحقق المعادلة المصفوفية $(\lambda_1 I_3-B)X_1=O$ أو

$$\begin{bmatrix}-4&4&-4\\-12&12&-12\\-4&4&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

obeikandl.com

باستخدام طريقة جاوس جـــوردان ، حيـــث تـــستبدل مـــصفوفة المعاملات بالمصفوفة المختزلة، نجد أن النظام يتحول إلى

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من هذا النظام نجد أن

$$x_2 = \alpha, x_3 = \beta; \quad \alpha,\beta \ \text{- } scalars$$

بينما

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

إذن

$$x_1 = x_2 - x_3 = \alpha - \beta$$

وعندئذ فإن

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad ; \ \alpha,\beta \neq 0$$

بالتأكيد فإنه في مقابل $\lambda_2 = 1$ فإن المتجهات المميزة هـــي نفـــسها $\mathbf{X}_1$ ، حيث نجد أن

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad ; \ \alpha,\beta \neq 0$$

وفي مقابل $\lambda_3 = 3$ نجد أن المتجهات المميزة هي $\mathbf{X}_3$، حيث تحقق $\mathbf{X}_3$ المعادلة المصفوفية $(\lambda_3\mathbf{I}_3 - \mathbf{B})\mathbf{X}_3 = \mathbf{O}$ أو

$$\begin{bmatrix} -8 & 4 & -4 \\ -12 & 8 & -12 \\ -4 & 4 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس جوردان، حيث تستبدل مصفوفة المعاملات بالمصفوفة المختزلة، نجد أن النظام يتحول إلى

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من هذا النظام نجد أن $x_3 = \gamma$ بينما

$$x_1 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_3 = \gamma$$

أيضا فإن

$$x_2 - 3x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3x_3 = 3\gamma$$

إذن

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \gamma \neq 0$$

الآن لكي نكون المصفوفة P بحيث تكون مصفوفة غير شاذة *(Nonsingular)* أو بكلمات أخرى لكي تكون المتجهات المميزة X_1, X_2, X_3 مستقلة خطياً، و بما أن α, β هي كميات اختيارية

obeikandl.com

(Arbitrary). إذن نختار $\alpha = 1$, $\beta = 3$ فنحصل على المتجه X_1

في الشكل $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

وإذا وضعنا $\alpha = 1$, $\beta = 0$ فنحصل على X_2 في الشكل

$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. وبما أن المتجه المميز الاساسي X_3 هو

$X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. إذن نسطيع الآن أن نكون المصفوفة P غير

الشاذة في الشكل $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ حيث يمكنك التأكد أن

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{7}{3} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

[3] المعادلة المميزة للمصفوفة C هي

obeikandl.com

$$|\lambda I_3 - C| = 0 \;\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0$$

أو $(\lambda+2)^2(\lambda-1)=0$ وبالتالي فـإن القـيم المميـزة هـي $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -2$. إذن المتجهـات المميـزة في مقابل $\lambda_1 = 1$ هي X_1 ، حيث $(\lambda_1 I_3 - C)X_1 = O$ أو

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \alpha \neq 0$$

في مقابل $\lambda_2 = -2$ فإن المتجهات المميزة هي X_2 الـتي تحقـق المعادلة $(\lambda_2 I_3 - C)X_2 = O$ وباستخدام طريقـة جـاوس ـ جوردان يكون المطلوب حل النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث نحصل على

obeikandi.com

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \beta \neq 0$$

أيضاً في مقابل القيمة المميزة $\lambda_3 = 5$ نجد أن المتجهات المميزة هي $\mathbf{X}_3$ ، حيث $(\lambda_3 \mathbf{I}_3 - \mathbf{C})\mathbf{X}_3 = \mathbf{O}$ إذن وبدون تفصيلات نجد أن

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \beta \neq 0$$

هكذا نجد أنه مهما أعطيت β قيماً اختيارية ماعدا الصفر لتكوين فضاء لانهائي من المتجهات المميزة تظل المتجهات المميزة $\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ مرتبطة ببعضها خطياً أو ليست مستقلة خطياً، الأمر الذي يعني عدم امكانية تكوين المصفوفة P ، وذلك لأنها ستكون في هذه الحالة مصفوفة شاذه، وإذا كانت المصفوفة P شاذة فإنها لاتستطيع تحويل المصفوفة C إلى مصفوفة قطرية. إذن المصفوفة C غير قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية أو أنها ***(Non- Diagonalizable)***.

4.4 حل نظم المعادلات التفاضلية العادية

سنحاول الآن استخدام المفاهيم السابقة مثل القيم المميزة، المتجهات المميزة، وذلك في حل نظم المعادلات التفاضلية العادية في حالة

قابلية مصفوفة المعاملات في نظام المعادلات التفاضلية لأن تكـــون مصفوفة قطرية. المثال الآتي يوضح هذه الفكرة.

مثال 4.4 أوجد حل نظام المعادلات التفاضلية

$$y_1' = -y_1 + 4y_2$$
$$y_2' = 3y_2$$

الحل نضع النظام في الشكل المصفوفي $Y' = AY$ ، حيث

$$Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ويكون المطلوب الآن هو إيجاد مصفوفة العمود. المعادلـــة المميـــزة للمصفوفة A ، هي $|\lambda I_2 - A| = 0$ ، أو

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 \\ 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-3) = 0$$

إذن القيم المميزة للمصفوفة A هي $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$. المتجهات المميزة المقابلة هي

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبما أن المتجهات المميزة كلها مختلفة، إذن فهـــي مـــستقلة خطيـــاً والمصفوفة A يمكن أن تتحول إلى مصفوفة قطرية بواسطة المصفوفة P ، حيث نجد أنها $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

obeikandi.com

الآن نفرض أن

$$Y = PZ \Rightarrow Y' = PZ' ; \; Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} ; Z' = \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix}$$

إذن بالتعويض في النظام الأصلي $Y' = AY$ نحصل على المعادلات المصفوفية

$$PZ' = APZ \Rightarrow Z' = P^{-1}APZ$$

وبما أن

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

إذن فإن

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_1 \\ 3z_2 \end{bmatrix}$$

هذا يعني أن $z'_1 = -z_1 \; , z'_2 = 3z_2$

وهذه معادلات تفاضلية عادية من الرتبة الاولى يمكن حلها بفصل المتغيرات وإجراء عملية التكامل لنحصل على

$$z'_1 = -z_1 \Rightarrow \frac{dz_1}{z_1} = -dt \Rightarrow \ln(z_1) = -t + C \Rightarrow z_1 = C_1 e^{-t}$$

$$z'_2 = 3z_2 \Rightarrow \frac{dz_2}{z_2} = 3dt \Rightarrow \ln(z_2) = 3t + C \Rightarrow z_2 = C_2 e^{3t}$$

حيث C_1, C_2 ثوابت اختيارية. في شكل مصفوفي، يمكن الحصول على المصفوفة Z في الشكل

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{-t} \\ C_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

وبما أن المطلوب هو ايجاد المصفوفة Y ، حيث $Y = PZ$ ، إذن

$$Y = PZ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{-t} \\ C_2 e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ C_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

إذن الحل العام للنظام المعطى هو

$$y_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, y_2 = C_2 e^{3t}$$

مثال 4.5 اوجد حل نظام المعادلات التفاضلية

$$y_1' = y_1 - y_2 + 2y_3$$
$$y_2' = 3y_1 + 4y_3$$
$$y_3' = 2y_1 + y_2$$

الحل نضع النظام في الشكل المصفوفي $Y' = AY$ ، حيث

$$Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ويكون المطلوب الآن هو إيجاد مصفوفة العمود. المعادلـــة المميـــزة

للمصفوفة A ، هي $|\lambda I_3 - A| = 0$ ، أو $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -2 \\ -3 & \lambda & -4 \\ -2 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

obeikandi.com

أي أن

$$(\lambda-1)\left[\lambda^2-4\right]-\left[-3\lambda-8\right]-2\left[3+2\lambda\right]=0$$

إذن القيم المميزة للمصفوفة A هي

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=\frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2},\ \lambda_3=\frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2}$$

المتجهات المميزة المقابلة هي

$$X_1=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix};\ X_2=\begin{bmatrix}-5-\sqrt{13}\\-2\sqrt{13}\\7+\sqrt{13}\end{bmatrix},\ X_3=\begin{bmatrix}-5+\sqrt{13}\\2\sqrt{13}\\7-\sqrt{13}\end{bmatrix}$$

وبما أن المتجهات المميزة كلها مختلفة، إذن فهي مستقلة خطياً والمصفوفة A يمكن أن تتحول إلى مصفوفة قطرية بواسطة المصفوفة P ، حيث نجد أنها

$$P=\begin{bmatrix}0 & -5-\sqrt{13} & -5+\sqrt{13}\\2 & -2\sqrt{13} & 2\sqrt{13}\\1 & 7+\sqrt{13} & 7-\sqrt{13}\end{bmatrix}$$

الآن نفرض أن

$$Y=P\,Z\Rightarrow\ Y'=P\,Z'\ ;\ Z=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix};\ Z'=\begin{bmatrix}z'_1\\z'_2\\z'_3\end{bmatrix}$$

إذن بالتعويض في النظام الاصلي $Y'=AY$ نحصل على الأنظمة

obeikandl.com

$$P\,Z' = AP\,Z \Rightarrow Z' = P^{-1}AP\,Z$$

وبما أن

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2} \end{bmatrix}$$

إذن فإن

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z_1 \\ \dfrac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2} z_2 \\ \dfrac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2} z_3 \end{bmatrix}$$

هذا يعني أن

$$z_1' = 2z_1\ ,\ z_2' = \frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2} z_2,\ z_3' = \frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2} z_3$$

وهذه معادلات تفاضلية عادية من الرتبة الاولى يمكن حلها بفصل المتغيرات وإجراء عملية التكامل لنحصل على

$$z_1' = 2z_1 \Rightarrow z_1 = ae^{2t}$$

$$z_2' = \frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2} z_2 \Rightarrow z_2 = be^{\frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2}t}$$

$$z_3' = \frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2} z_3 \Rightarrow z_3 = ce^{\frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2}t}$$

حيث a,b,c ثوابت اختيارية. في شكل مصفوفي، يمكن الحصول على المصفوفة Z في الشكل

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ be^{\frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2}t} \\ ce^{\frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2}t} \end{bmatrix}$$

وبما أن المطلوب هو ايجاد المصفوفة Y، حيث $\mathbf{Y} = \mathbf{PZ}$، إذن

$$\mathbf{Y} = \mathbf{PZ} = \begin{bmatrix} 0 & -5-\sqrt{13} & -5+\sqrt{13} \\ 2 & -2\sqrt{13} & 2\sqrt{13} \\ 1 & 7+\sqrt{13} & 7-\sqrt{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ be^{\frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2}t} \\ ce^{\frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2}t} \end{bmatrix}$$

إذن الحل العام للنظام المعطى هو

obeikandl.com

$$y_1 = \left(-5-\sqrt{13}\right)be^{\frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2}t} + \left(-5+\sqrt{13}\right)ce^{\frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2}t}$$

$$y_2 = 2ae^{2t} - 2\sqrt{13}be^{\frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2}t} + 2\sqrt{13}ce^{\frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2}t} \quad ;$$

$$y_3 = ae^{2t} + \left(7+\sqrt{13}\right)be^{\frac{\left(-1-\sqrt{13}\right)}{2}t} + \left(7-\sqrt{13}\right)ce^{\frac{\left(-1+\sqrt{13}\right)}{2}t}$$

4.5 مسائل

(1) أوجد القيم المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفات الآتية

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) بين ما إذا كانت المصفوفات الآتية قابلة لأن تكون مصفوفات قطرية *(Diagonalizable)*، فإذا كانت كذلك فأوجد المصفوفة غير الشاذة P والتي تحولها إلى مصفوفة قطرية.

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

obeikandl.com

$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2) أوجد حلول نظم المعادلات التفاضلية الخطية باستخدام مفاهيم القيم المميزة والمتجهات المميزة

$y_1' = -4y_1 + 3y_2$ $y_2' = 2y_1 - 3y_2$	$y_1' = 5y_1 - 4y_2 + 4y_3$ $y_2' = 12y_1 - 11y_2 + 12y_3$ $y_3' = 4y_1 - 4y_2 + 5y_3$
$y_1' = 5y_1 - y_2$ $y_2' = -2y_2$ $y_3' = 8y_1 + 7y_2$	$y_1' = y_2 + y_3$ $y_2' = 2y_1 - 3y_3$ $y_3' = y_1 + y_2$
$y_1' = 5y_2 - y_3$ $y_2' = -2y_3$ $y_3' = 8y_1 + 7y_2$	$y_1' = 2y_2 + y_3$ $y_2' = 4y_1 - 3y_3$ $y_3' = y_1 - y_2$
$y_1' = y_1 - y_2$ $y_2' = y_1$ $y_3' = 8y_1 + 7y_2$	$y_1' = -2y_2 + y_3$ $y_2' = 2y_1 - y_3$ $y_3' = y_1 + 6y_2$

****

obeikandl.com